ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z. 113 Nr kol. 1246

Konrad **WOJCIECHOWSKI**

SYNTEZA STOCHASTYCZNIE OPTYMALNYCH PRAW STEROWANIA W PRZYPADKU JEDNOSTAJNEGO I OGRANICZONEGO ROZKŁADU ZMIENNYCH NIEPEWNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono syntezę stochastycznie optymalnych praw sterowania dla jednostajnego i ograniczonego rozkładu zmiennych niepewnych, skończonego horyzontu sterowania, liniowych równań stanu i wyjścia, oraz kwadratowego wskaźnika jakości. Otrzymane prawo sterowania jest dla każdej chwili dyskretnej rozpatrywanego horyzontu liniowa funkcja warunkowej wartości oczekiwanej wektora stanu. Pokazano, że jeżeli rozkład zmiennych niepewnych posiada symetrię środkową, to warunkowa wartość oczekiwana wektora stanu może być zastąpiona przez środek ciężkości warunkowego zbioru stanów.

STOCHSTIC OPTIMAL CONTROL LAW SYNTHESIS UNDER UNIFORM DENSITY OF UNCERTAIN VARIABLES

Summary. In this paper synthesis of stochastic optimal control law under uniform probability density of uncertain variables is presented for finite control horizon, linear state and output equations and quadratic performance criterion. The obtained control law for each stage of the considered horizon is the linear function of expected value of conditional state. It has been shown that if the density function of the state possesses a central symmetry, than expected conditional value of the state can be replaced by center of gravity of conditional set of states being the orthogonal projection of conditional information set on the subspace of the state.

Praca częściowo finansowana z grantu KBN 3P40301006

СИНТЕЗ СТОХАСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ РАВНОМЕРНОГО И ОГРАНИЧЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕУВЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Резюме. В работе представлен синтез стохастически оптимальных законов управления для равномерного и ограниченного распределения неуверенных переменных, конечного горизонта управления, линейных уравнений состояния и выхода, а также для квадратного показателя качества. Полученный закон управления является для каждого дискретного мгновения рассматриваемого горизонта линейной функцией условного математического ожидания вектора состояния. Показывается, что если распределение неуверенных переменных имеет центральную симметрию. то условное математическое ожидание вектора состояния можно заменить центром тяжести условного множества состояний.

1. WPROWADZENIE

Wyniki uzyskane w problemie syntezy prawa sterowania w warunkach niepewności dotyczą głównie problemu liniowo-kwadratowego-gaussowskiego (LQG).

W sformułowaniu klasycznego liniowo-kwadratowego problemu sterowania stochastycznie optymalnego zakłada się, że warunek początkowy x_1, oraz addytywne zakłócenia w_k, v_k są dla K=1,...,N wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi i dodatkowo wartość średnia w_k wynosi zero dla k=1,..., N. Przyjmuje się również, że dopuszczalne prawa sterowania posiadają strukturę informacyjną typu "nested". Przy powyższych założeniach optymalne prawo sterowania w chwili k jest liniową funkcją warunkowej oceny wektora stanu wyznaczonej na podstawie informacji pomiarowej dostępnej w danej chwili k.

W ogólniejszych wersjach problemu LQ [1, 9, 10] dopuszcza się dowolne charakterystyki probabilistyczne zmiennych losowych x_1, w_k, v_k, k=1,...,N uzyskując prawo sterowania w postaci liniowej funkcji oceny wektora stanu uzupełnionej o składnik związany z predykcją zakłóceń w równaniu stanu.

W pracy przyjęto szczególną postać rozkładu charakteryzującego zmienne losowe rozpatrywanego problemu. Założono rozkład jednostajny ograniczony, tj. odpowiednia funkcja gęstości określona jest na ograniczonym nośniku $\mathbb{T}$, który w przypadkach szczególnych (zbiory elipsoidalne, wielościenne) może być parametryzowany. W pracy odnośnie do samego zbioru $\mathbb{T}$ oprócz naturalnego założenia o jego całkowalności w sensie Lebesugue'a zakłada się dodatkowo, że spełnia on pewne warunki symetrii.

Zaletą podejścia przyjętego w pracy jest jawne uwzględnienie (poprzez ograniczność rozkładu) istniejących ograniczeń na realizacje i jednocześnie możliwość uzyskania efektywnych wyrażeń na odpowiednie gęstości warunkowe. W pracy do rozwiązania sformułowanego w p. 2 problemu syntezy prawa sterowania zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych wykorzystywaną w pracy [12] do syntezy praw sterowania w warunkach niepewności ograniczonej. Wybrane definicje i właściwości zbiorów informacyjnych wraz z określonymi na nich funkcjami gęstości prawdopodobieństwa przedstawiono w dodatku A. Podstawowy wynik zawiera twierdzenie 1 zamieszczone w p. 3 wraz z interpretacja. Dowód tego twierdzenia przeniesiono do dodatku B.

Ogólnie w świetle twierdzenia 1 posługiwanie się techniką przestrzeni stanu nie jest efektywne, wymaga bowiem określenia odpowiedniego warunkowego rozkładu gęstości dla wektora stanu. Twierdzenia 2 i 3 z p. 4 wyróżniają przypadek szczególny, w którym do określenia warunkowej oceny stanu wystarczy warunkowy zbiór stanów. Przypadek taki nazywa się efektywnym i ma miejsce, jeżeli funkcje gęstości warunkowych spełniają odpowiednie warunki symetrii.

2. PROBLEM SYNTEZY PRAWA STEROWANIA

2.1. Określenia wstępne

Niech J oznacza zbiór liczb naturalnych. Jego ustalony podzbiór $\mathbb{H} = \{1,...N\}$ nazywamy horyzontem sterowania. Ciąg c: $\mathbb{H} \rightarrow R^q$ oznaczamy $c^N = (c'_1,...,c'_N)$, tym samym symbolem c^N oznaczamy również wektor $[c'_1,...,c'_N]$. Podobnie oznaczamy $c^k = (c'_1,...,c'_k)$, oraz $c^{N\setminus k} = (c'_{k+1},...,c'_N)$, gdzie w obu przypadkach $k \le N$.

Zmienne losowe występujące w rozpatrywanym problemie określone są przez istniejące z założenia funkcje gęstości f. Zakłada się dodatkowo, że są one różne od zera tylko na ograniczonym i całkowalnym w sensie Lebesgue'a zbiorze A odpowiednio wymiarowej przestrzeni wektorowej. Z powyższego względu, jak również dla uzyskania, spójności z pracami [1] stosuje się dla takich funkcji gęstości zapis f_A. Zbiór A nazywany jest nośnikiem funkcji gęstości f_A. Funkcja f_A jest gęstością określona na zbiorze A.

2.2. Sformułowanie problemu

Zakładamy, że

i) dyskretny, stacjonarny układ dynamiczny podlegający sterowaniu w horyzoncie $\mathbb{H}$ ma postać:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $k \in \mathbb{H} = \{1,..,N\}$ x_k, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, z_k, $v_k \in R^p$, $A \in R^{nxn}$, $B \in R^{nxm}$ $C \in R^{pxn}$ oraz istnieje A^{-1},

ii) zmienne x_1, w_k, v_k dla $k \in \mathbb{H}$ są losowe i charakteryzuje je łącznie dany rozkład jednostajny o postaci

$$f_{\mathbb{T}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{m^\circ} \text{ dla } t = (x_1, w^N, v^N) \in \mathbb{T} \subset R^d \quad d = n + nN + pN \\ 0 \quad \text{dla } t = (x_1, w^N, v^N) \notin \mathbb{T} \subset R^d \quad d = n + nN + pN \end{cases}$$

gdzie $\mathbb{T}$ jest danym w przestrzeni zmiennych $t = (x_1, w^N, v^N)$ ograniczonym i mierzalnym w sensie Lebesgue'a zbiorem $\mathbb{T} \subset R^d$, $d=n+nN+pN$,

$$m^o = \int_{\mathbb{T}} dt$$

Dodatkowo zakladamy, że dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zachodzi:

$$\underset{r_{ok}|z_o^k}{E} \; w_k = 0 \tag{2}$$

$$\underset{r_{ok}|z_o^k}{E} \; (x'_{ok} M w_k) = 0 \tag{3}$$

gdzie $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N\backslash k})$ (patrz dodatek A). Macierz $M \in R^{nxm}$ w warunku (3) jest dowolna, indeks "o" informuje, że zapis dotyczy ukladu dynamicznego, w którym dla $k \in \mathbb{H}$, $u_k \equiv 0$,

iii) struktura informacyjna jest typu "nested". Najprostszymi dopuszczalnymi prawami sterowania dla tej struktury są:

$$u_k = u_k(z^k), \quad k \in \mathbb{H} \tag{4}$$

iv) kryterium optymalności ma postać:

$$q = \underset{t}{E} \sum_{k=1}^{k=N} l_k(x_{k+1}, u_k) \tag{5}$$

gdzie dla $k \in \mathbb{H}$

$$l_k = x'_{k+1} P_{k+1} x_{k+1} + u'_k Q_k u_k \tag{6}$$

$$Q_k > 0, \tag{7}$$

$$P_{k+1} \geq 0, \tag{8}$$

v) zadanie syntezy polega na znalezieniu dopuszczalnych praw sterowania $u_k^*(z^k)$,
$k \in \mathbb{H}$, takich że odpowiadająca im wartość kryterium q^* jest minimalna,

$$q \rightarrow \min \tag{9}$$

3. SYNTEZA PRAW STEROWANIA

3.1. Metoda syntezy

W pracy do rozwiązania problemu zastosowano oryginalną metodę zbiorów informacyjnych z określonymi na nich funkcjami gęstości. Polega ona na przekształceniu dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zbioru $\mathbb{T}$ danego w przestrzeni zmiennych (x_1, w^N, v^N) w zbiór R_k, dany dla $k \in \mathbb{H}$ odpowiednio w przestrzeniach zmiennych $(x_k, w^N, v^{N \setminus k}, z^k)$. W wyniku zadanie minimalizacji względem funkcji $u_k(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$ może być sprowadzone do zadania minimalizacji względem wartości tych funkcji, przy ustalonej wartości z^k, $k \in \mathbb{H}$. Dodatkowo przy spełnieniu odpowiednich warunków symetrii zbioru R_k i określonej na nim funkcji gęstości przy ustalonej wartości z^k informację wystarczającą dla sterowania zawiera zbiór będący jego rzutem na podprzestrzeń zmiennych x_k.

Ustalonej wartości z^k odpowiada warunkowy zbiór informacyjny $R_k | z^k$ wraz z określoną na nim funkcją gęstości. Niezależność "kształtu" tego zbioru od sterowań u^{k-1}, jak również niezależność postaci funkcji gęstości od tych sterowań (patrz dodatek A) jest podstawową własnością umożliwiającą otrzymanie prawa sterowania w postaci liniowej funkcji oceny stanu.

3.2. Optymalne prawo sterowania

Podstawowy rezultat uzyskany przy zastosowaniu metody zbiorów informacyjnych przedstawia następujące

Twierdzenie 1. Jeżeli spełnione są założenia i)-v), to optymalne prawo sterowania dla każdego $k \in \mathbb{H}$ określone jest zależnościami:

$$u_k^* = -(Q_k + B'K_{k+1}B)^{-1} B'K_{k+1} A \hat{x}_k \tag{10}$$

gdzie

$$\hat{x}_k = \underset{x_k|z^k}{E} x_k = \int_{X_k|z^k} x_k \, f_{X_k}(x_k|z^k)\, dx_k \tag{11}$$

$$f_{X_k}(x_k|z^k) = \int_{R_k|z^k, x_k} f_{R_k|z^k}(r_k|z^k) d(r_k|z^k, x_k)$$

$$K_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1} B(Q_k + B'K_{k+1} B)^{-1} B K_{k+1}) A + P_k \tag{12}$$

$$K_{n+1} = P_{n+1} \tag{13}$$

Dodatkowo

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} Bu_i \tag{14}$$

$$\hat{x}_{ok} = \underset{x_{ok}|z_o^k}{E} x_{ok} = \int_{X_{ok}|z_o^k} x_{ok} \, f_{X_{ok}}(x_{ok}|z_o^k)\, dx_{ok} \tag{15}$$

$$f_{X_{ok}}(x_{ok}|z_o^k) = \int_{R_{ok}|z_o^k} f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}|z_o^k)\, d(r_{ok}|z_o^k, x_{ok})$$

Dowód tw. 1 jest w swej strukturze podobny do dowodu twierdzenia o sterowaniu statystycznie optymalnym. W dowodzie tym wykorzystuje się w sposób istotny przekształcenia i własności zbiorów informacyjnych oraz określonych na nich funkcji gęstości, zamieszczone w dodatku A. Wynik przedstawiony w twierdzeniu 1 jest ogólny w tym sensie, że oprócz założeń wymienionych w ii) nie zakłada się żadnych ograniczeń na zbiór $\mathbb{T}$. W rezultacie wyznaczenie oceny $\hat{x}_k$ wymaga określenia odpowiedniej funkcji gęstości warunkowej.

4. EFEKTYWNOŚĆ TECHNIKI PRZESTRZENI STANU

Pojęcie efektywności techniki przestrzeni stanów w syntezie prawa sterowania wprowadzono w pracy [12] dla przypadku niepewności o modelu ograniczonym. Obecnie rozszerzamy to pojęcie również na przypadek niepewności losowej. Mówimy, że technika przestrzeni stanu jest efektywna, jeżeli zachodzi:

$$\hat{x}_{ok} = \Pi_{X_{ok}} \left(E_{r_{ok}|z_o^k} r_{ok} \right) = E_{x_{ok}|z_o^k} x_{ok} = \int_{X_{ok}} x_{ok}\, dx_{ok} \Big/ \int_{X_{ok}} dx_{ok} \qquad (16)$$

Oznacza to, że w przypadku ogólnym do wyznaczenia oceny $\hat{x}_k$ potrzebna jest znajomość warunkowej gęstości $f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}|z_o^k)$ określonej na zbiorze $R_{ok}|z_o^k$, a następnie rzutowanie wyznaczonej wartości średniej na podprzestrzeń zmiennych x_{ok}, lub co jest równoważne potrzebna jest znajomość warunkowej gęstości stanu $f_{X_{ok}}(x_{ok})$ określonej na zbiorze X_{ok}. W przypadku efektywnym wystarcza natomiast znajomość zbioru X_{ok} będącego rzutem ortogonalnym zbioru $R_{ok}|z_o^k$ na podprzestrzeń zmiennych x_{ok}.

Inaczej przypadek nazywa się efektywnym, jeżeli warunkowa ocena stanu oraz środek ciężkości zbioru, na którym określona jest warunkowa gęstość stanu, są tożsame. Przykladowo własność taka zachodzi dla zbiorów elipsoidalnych.

Ustalenie warunków, przy których zachodzi (16), jest przedmiotem dalszych rozważań.

4.1. Problem pomocniczy

Niech będzie dany zbiór $\mathbb{A} = \{(x, y) : (x, y) \in R^{n+1}\}$ wraz z określoną na nim funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f_{\mathbb{A}}(x, y)$. Zdefiniujemy:

i) zbiór $\mathbb{A}|x = \{y:(x,y) \in \mathbb{A}\}$ będący przekrojem zbioru $\mathbb{A}$ ustaloną wartością x z określoną na nim funkcja gęstości warunkowej $f_{\mathbb{A}|x}(y) = f_{\mathbb{A}}(x, y) \backslash f_X(x)$,

ii) zbiór $X = \pi_X(\mathbb{A}) = \{x: (x,y)\in\mathbb{A}\}$ będący rzutem ortogonalnym zbioru $\mathbb{A}$ na podprzestrzeń zmiennych x z funkcją gęstości brzegowej o postaci $f_X(x) = \int_{\mathbb{A}|x} f_{\mathbb{A}}(x,y)\,dy$.

Lemat 1. Jeżeli środkiem symetrii zbioru X jest punkt x i równocześnie dla każdego $x\in X$, funkcja gęstości spełnia warunek $f_X(x) = f_X(2x_s-x)$, to

$$Ex = \int_X x f_X(x)\,dx = \int_X x\,dx / \int_X dx = x_s$$

Dowód. Wprowadzając zmienne $z = x - x_s$ umieszczamy początek nowego układu współrzędnych w punkcie x_s. Mamy:

$$\int_X x f_X(x)\,dx = \int_Z (z+x_s) f_X(z+x_s)\,dz = \int_Z z f_X(z+x_s)\,dz + x_s \int_Z f_X(z+x_s)\,dz \tag{a}$$

$$\int_X f_X(x)\,dx = \int_Z f_X(z+x_s)\,dz = 1 \tag{b}$$

gdzie zbiór Z jest symetryczny względem początku układu i dla $z\in Z$, $f_X(z+x_s) = f_X(-z+x_s)$. Na tej podstawie:

$$\int_Z z\, f_X(z+x_s)\,dz \equiv 0 \tag{c}$$

Równocześnie z warunku symetrii zbioru X względem punktu x_s,

$$\int_X x\,dx / \int_X dx = x_s$$

co kończy dowód.

Lemat 1 określa, jakie warunki spełniać muszą zbiór X i określona na nim funkcja gęstości $f_X(x)$. Interesujące jest określenie wystarczających warunków dla zbioru $\mathbb{A}$ i określonej na nim funkcji gęstości $f_{\mathbb{A}}(x, y)$. Dotyczy tego

Lemat 2. Jeżeli środek symetrii zbioru $\mathbb{A}$ istnieje i jest nim punkt (x_s, y_s) oraz funkcja $f_{\mathbb{A}}(x, y)$ jest względem tego punktu symetryczna, to środkiem symetrii zbioru X jest punkt x_s oraz dla każdego $x\in X$, $f_X(x) = f_X(2x_s - x)$.

Dowód. Pierwsza część lematu wynika bezpośrednio z definicji symetrii środkowej i rzutu ortogonalnego zbioru $\mathbb{A}$ na podprzestrzeń zmiennych x. Dla uzasadnienia drugiej części lematu wystarczy zauważyć, że ze względu na symetrię zbioru $\mathbb{A}$ miary zbiorów $\mathbb{A} \mid x$, $\mathbb{A} \mid (2x_S - x)$ są równe.

Podsumowując można stwierdzić, że jeżeli zbiór $\mathbb{A}$ oraz określona na nim funkcja $f_{\mathbb{A}}$ posiadają symetrię środkową względem tego samego punktu, to przy wyznaczaniu wartości warunkowej x funkcja gęstości $f_X(x)$ może być pominięta.

4.2. Warunki efektywności techniki przestrzeni stanu

Obecnie możemy sformułować warunki, przy których zachodzi zależność (16). Precyzuje je

Twierdzenie 2. Niech dla każdego $k \in \mathbb{H}$ będzie określone $\hat{x}_{ok}$ jak w tw. 1 oraz funkcja

$$f_{X_k}(z_o^k, x_{ok}) = \int\limits_{r_{ok} \mid z_o^k, x_{ok}} f_{R_{ok}}(r_{ok})\, d(w^N, v^{N\setminus k})$$

Jeżeli:

i) dla każdego $z_o^k \in P_k = \pi_{z^k}(R_{ok})$ i każdego $x_{ok} \in X_{ok} = \pi_{x^{ok}}(R_{ok} \mid z_o^k)$ istnieje ustalone x_S, takie że: $f_{X_k}(z_o^k, x_{ok}) = f_{X_k}(z_o^k, 2x_S - x_{ok})$,

ii) $x_S = \int\limits_{X_{ok}} x_{ok}\, dx_{ok} \Big/ \int\limits_{X_{ok}} dx_{ok}$

to $\hat{x}_{ok} = x_S$.

Dowód. Bezpośrednie zastosowanie lematu 1.

Twierdzenie 3. Jeżeli dla każdego $z_o^k \in P_k = \pi_{z^k}(R_{ok})$ zbiór warunkowy $(R_{ok} \mid z_o^k)$ oraz funkcja gęstości warunkowej $f_{R_{ok} \mid z_o^k}(r_{ok} \mid z_o^k)$ posiadają symetrię środkową względem punktu $[\hat{x}'_{ok}, \hat{w}^{N'}, \hat{v}^{N\setminus k'}]$, to również zbiór $X_{ok} = \pi_{ok}((R_{ok} \mid z_o^k)$ i określona na nim funkcja gęstości $f_{X_k}(z_o^k, x_{ok})$ posiadają symetrie środkową względem punktu $\hat{x}_{ok}$, funkcja $g_k(z_o^k, x_{ok})$ spełnia warunek i) z twierdzenia 1.

Dowód. Zastosowanie lematu 2.

Warunki efektywności techniki przestrzeni stanu przedstawione w tw. 3 są silne. Przykładowo, warunki te są spełnione, jeżeli $\mathbb{T}$ jest zbiorem elipsoidalnym, a określona na nim funkcja gęstości jest stała. Wtedy bowiem zbiory R_{ok}, $R_{ok} \mid z_o^k$ są również elipsoidalne ze stałymi funkcjami gęstości. Dla zbioru $R_{ok} \mid z_o^k$ oraz określonej na nim funkcji gęstości spełnione są warunki symetrii. Kontynuując przykład zauważmy, że jeżeli zbiór $\mathbb{T}$ jest wielościanem o symetrii środkowej (np. kostka), z określoną na nim stałą funkcja gęstości, to symetrię środkową posiada również zbiór R_{ok} wraz z odpowiednią funkcją gęstości, jednak nie posiadają jej już zbiór warunkowy $R_{ok} \mid z_o^k$ i określona na nim funkcja gęstości.

5. PODSUMOWANIE

Przedstawiona w pracy oryginalna metoda syntezy stochastycznie optymalnych praw sterowania w przypadku jednostajnego ograniczonego rozkładu łącznego zmiennych niepewnych oparta na przekształceniach i własnościach zbiorów informacyjnych wraz z określonymi na nich odpowiednimi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa pozwala na uzyskanie wyników dla szczególnej klasy, ważnych dla zastosowań, postaci rozkładów. Zastosowanie w tym przypadku znanych wyników teorii sterowania stochastycznie optymalnego wymaga określenia odpowiedniej funkcji gęstości, której efektywne wyznaczenie sprowadza się do powtórzenia rozważań pracy.

Przedstawiona metoda z uwzględnieniem dodatków A, B, jest kompletna, definicje i własności zbiorów informacyjnych łącznie z twierdzeniami 1-3 i ich dowodami tworzą całość. Jednocześnie postać uzyskanych wyników jest prosta, co pozwala na ich bezpośrednią implementacje numeryczną.

Wyniki przedstawione w pracy uporządkowane są hierarchicznie. Najbardziej ogólny jest wynik przedstawiony w twierdzeniu 1. W twierdzeniu 2, 3 podaje się pośrednio warunki, jakie powinien spełniać zbiór $\mathbb{T}$, i określona na nim funkcja gęstości, aby problem wyznaczania warunkowej oceny stanu można było zredukować do problemu wyznaczania środka ciężkości warunkowego zbioru stanów.

LITERATURA

[1] Akashi H., Nose K.: On certainty equivalence in stochastic optimal control, Int. J. Control, 21(1975), pp. 875-863.

[2] Barmish B.R., Sankaran J.: The propagation of parametric uncertainty via polytopes, IEEE Trans. Automatic Control, AC-25(1979), pp. 346-349.

[3] Bertsekas D.P.: Control of uncertain systems with a set-membership description of the uncertainty, Ph. D. dissertation, Dept. Elec. Eng., MiT, Cambridge, 1971.
[4] Clement T., Gentil S.: Reformulation of parameter identification with unknown-but-bounded errors, Mathematics and Computers in Simulation, 30 (1988), pp. 257-270.
[5] Fogel E., Huang Y.F.: On the value of information in system identification-bounded noise case, Automatica, 18 (1982), pp. 229-238.
[6] Glover J.D., Schweppe F.C.: Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, AC-16(1971), pp. 411-423.
[7] Kurzhanskii A.B.: Control and Observation under Conditions of Uncertainty, Nauka, Moskow 1977.
[8] Schweppe F.C.: Układy dynamiczne w warunkach losowych, WNT, Warszawa 1978.
[9] Tse E., Bar-Shalom Y.: Generalized certainty equivalence and dual effect in stochastic control, IEEE Trans. Automatic Control, AC-20(1975), pp. 817-819.
[10] Uchida K., Shimemura E.: Optimal control of linear stochastic system with quadratic criterion under classical information structure - On certainty equivalence . Trans, SCiE, 12(1976), pp. 89-95.
[11] Wojciechowski K.W.: Recursive measurement data filtration with uncertainty described by convex polyhedra. Syst. Anal. Model. Simul. 4(1987), pp. 557-560.
[12] Wojciechowski K.W.: Efektywność syntezy prawa sterowania techniką przestrzeni stanu dla zbiorowego modelu niepewności. Konf. RP.I.02, Kazimierz Dolny 1988.

Dodatek A

A. 1. ODWZOROWANIA I ZBIORY INFORMACYJNE

Niech będzie dany układ dynamiczny w postaci:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \,; x_1 \\ z_k = Cx_k + v_k \end{cases} \tag{A.1}$$

gdzie: x_k, $w_k \in R^n$, $u_k \in R^m$, z_k, $v_k \in R^p$, $\in R^{n\mathrm{x}n}$, $B \in R^{n\mathrm{x}m}$, $C \in R^{p\mathrm{x}n}$ oraz istnieje A^{-1}. W przypadku szczególnym dla $u_k \equiv 0$, $k \in \mathbb{H}$ stosujemy zapis:

$$\begin{cases} x_{ok+1} = Ax_{ok} + w_k \; ; \; x_1 \\ z_{ok} = Cx_{ok} + v_k \end{cases} \tag{A.2}$$

Definicja A.1. Określone dla każdego $k \in \mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie ρ_{ok} przekształcające dany zbiór $\mathbb{T} \subset R^d$ w zbiór

$$R_{ok} = \rho_{ok}(\mathbb{T}) = \{(r_{ok}, z_o^k) : (r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k) \big| (s_k, v^k) \in \mathbb{T}\} \in R^d$$

nazywamy swobodnym odwzorowaniem informacyjnym.

Twierdzenie A.1. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2), to dla każdego $k \in \mathbb{H}$ odwzorowanie ρ_{ok} jest liniowe i ma postać:

$$\begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix} = \rho_{ok}(s_k, v^k) = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

gdzie $r_{ok} = (x_{ok}, w^N, v^{N\backslash k})$, $s_k = (x_1, w^N, v^{N\backslash k})$

$$G_p = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad H_p = [P_{41} \; \dots \; P_{42}]$$

$$P_{11} = A^{k-1} \qquad P_{12} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ A^{k-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} k - \text{macierzy} & \quad N - k \text{ macierzy} \end{array} \end{array}$$

$$P_{41}=\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \qquad P_{42}=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ C & & 0 & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ CA^{k-2} & \dots & C & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{cc} \text{k kolumn} & \text{N – k kolumn} \\ \text{macierzowych} & \text{macierzowych} \end{array}$$

Dowód. Prawdziwość twierdzenia wynika z zależności:

$$x_{ok}=A^{k-1}x_1+\sum_{i=1}^{k-1}A^{k-1-i}w_i$$

$$z_{oj}=C(A^{j-1}x_1+\sum_{i=1}^{j-1}A^{j-1-i}w_i)+v_j\ , \quad j=1,\dots,k$$

zapisanych w postaci macierzowej.

Twierdzenie A.2. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.2), to dla każdego $k \in \mathbb{H}$ zachodzi:

$$\left|\det J_{\rho_{ok}}\right|=\left|\det A^{k-1}\right|$$

gdzie

$$J_{\rho_{ok}}=\partial\begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_{ok} \end{bmatrix} / \partial\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$

Dowód. Macierz Jacobiego odwzorowania ρ_{ok} jest tożsama z macierzą (tw. A.1) określającą to odwzorowanie. Wyznacznik tej macierzy jest równy wyznacznikowi macierzy $P_{11}=A^{k-1}$.

Twierdzenie A.2a. Niech będzie dana funkcja gęstości $f_{\mathbb{T}}(s_k, v^k)$ określona na zbiorze $\mathbb{T}$. Funkcja gęstości $f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k)$ określona na zbiorze R_{ok} dana jest zależnością

$$f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k) = \left|\det A^{k-1}\right| f_{\mathbb{T}}(\rho_{ok}^{-1}(r_{ok}, z_o^k))$$

Dowód. Bezpośrednie zastosowanie znanego twierdzenia o funkcji zmiennej losowej np. [7].

Jeżeli funkcja gęstości $f_{\mathbb{T}}(s_k, v^k)$ jest stała, to funkcja gęstości $f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k)$ określona na zbiorze R_{ok} jest również stała.

Definicja A.2. Niech dla każdego $k \in \mathbb{H}$ będzie dany zbiór R_{ok} o elementach (r_{ok}, z_o^k) oraz określona na nim funkcja gęstości $f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k)$.

i) dla ustalonego z_o^k zbiór $R_{ok}\big|z_o^k = \{(r_{ok}) : (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy zbiorem warunkowym zbioru R_{ok} przy warunku z_o^k z określoną na nim funkcją gęstości warunkowej $f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}\big|z_o^k) = f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k) / f_{P_{ok}}(z_o^k)$,

ii) zbiór $P_{ok} = \Pi_{z^k}(R_{ok}) = \{(z_o^k) : (r_{ok}, z_o^k) \in R_{ok}\}$ nazywamy rzutem prostopadłym zbioru R_{ok} na przestrzeń zmiennych z_o^k, odpowiadająca mu funkcja gęstości brzegowej ma postać $f_{P_{ok}}(z_o^k) = \int\limits_{R_{ok}|z_o^k} f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k)\, dr_{ok}$,

iii) zbiór $Z_{ok}\big|z_o^{k-1} = \{z_{ok}, z_o^{k-1}) \in P_{ok}\}$ nazywamy warunkowym zbiorem obserwacji z_{ok} dla danego ciągu obserwacji z_o^{k-1}, odpowiada mu funkcja gęstości o postaci $f_{Z_{ok}|z_o^{k-1}}(z_{ok}) = \int\limits_{P_{ok}|z_o^k} f_{P_{ok}}(z_o^k)\, dr_{ok}$.

iv) zbiór $X_{ok}\big|z_o^k = \Pi_{x_{ok}}(R_{ok}\big|z_o^k) = \{(x_{ok}) : r_{ok} =$
$= (x_{ok}, w^N, v^{N\setminus k}) \in R_{ok}\big|z_o^k\}$
nazywamy warunkowym zbiorem stanów z określoną na nim funkcją gęstości o postaci

$$f_{X_{ok}|z_o^k}(x_{ok}) = \int\limits_{R_{ok}|z_o^k} f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}\big|z_o^k)\, d(r_{ok} \setminus x_{ok}).$$

Twierdzenie A.2b. Jeżeli funkcja gęstości $f_{R_{ok}}(r_{ok}, z_o^k)$ jest stała, to funkcja gęstości warunkowej $f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}|z_o^k)$ jest również stała dla ustalonej wartości z_o^k.

Dowód. Bezpośrednia konsekwencja twierdzenia Bayesa.

Definicja A.4. Określone dla każdego $k \in \mathbb{H}$ wzajemnie jednoznaczne i zależne od prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1,\dots, k-1$ odwzorowanie przekształcające dany zbiór $\mathbb{T} \subset R^d$ w zbiór

$$R_k = \rho_k(\mathbb{T}) = \left\{ (r_k, z^k) : (r_k, z^k) = \rho_k(s_k, v^k) \middle| (s_k, v^k) \in \mathbb{T} \right\} \subset R^d.$$

nazywamy wymuszonym odwzorowaniem informacyjnym.

Twierdzenie A.3. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) i dane są prawa sterowania $u_i(z^i)$, $i = 1,\dots, k-1$, to dla każdego $k \in \mathbb{H}$ odwzorowanie ρ_k określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_l(z^{k-1}) \\ p_4(z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

gdzie: $(r_{ok}, z_o^k) = \rho_{ok}(s_k, v^k)$

$$p_l(z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

$$\underline{p}'_l(z^{k-1}) = \Big[\, p'_l(z^{k-1}), \quad 0,\dots,0 \,\Big]_{Nn+(N-p)p}$$

$$p_4(z^{k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ CBu_l(z^l) \\ \vdots \\ C\sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i) \end{bmatrix}$$

Dowód. Wykorzystując zależność:

$$x_k = x_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

oraz zależność:

$$z_j = z_{oj} + C \sum_{i=1}^{j-1} A^{j-1-i} B u_i(z^i)$$

dla j=2,...,k otrzymujemy po uporządkowaniu do blokowego zapisu wektorowego tezę twierdzenia.

Uwaga. Uzyskanie jawnej postaci odwzorowania ρ_k wymaga rozwikłania zależności z tw. A.3 względem z^k.

Twierdzenie A.4. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1) , to dla każdego $k \in \mathbb{H}$ i dowolnych funkcji $u_i\ (z^i)$, i = 1,..., k-1 zachodzi:

$$\left|\det J_{\rho_k}\right| = \left|\det J_{\rho_{ok}}\right| \left|\det A^{k-1}\right|$$

gdzie

$$J_{\rho_k} = \partial \begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}$$ jest macierzą Jacobiego odwzorowania ρ_k.

Dowód. Wprowadzając pomocnicze odwzorowanie μ_k, κ_k można macierz Jacobiego J_{ρ_k} przedstawić w postaci $J_{\rho_k} = J_{\kappa_k} J_{\mu_k}$, gdzie:

$$J_{\mu_k} = \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix}, \qquad J_{\kappa_k} = \partial \begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} / \partial \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie μ_k określone jest niejawnie (por. tw. A.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p_4\ (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} s_k \\ v^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ p_4 \quad (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Macierz H_p i funkcja wektorowa p_4 (z^{k-1}) są określone jak w tw. A.1, tw. A.3.

$$J_{\mu_{k-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H_p 1 + \partial p_4 & (z^{k-1}) / \partial z^k \end{bmatrix}$$

Dla założonej struktury informacyjnej praw sterowania $u_i(z^i)$, i = 1,...,k-1 mamy:

$$\partial p_4 (z^{k-1}) / \partial z^k = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Stąd det $J_{\mu_{k-1}}$ = det $J_{\mu_k} = 1$

Odwzorowanie κ_k określone jest niejawnie (por. tw. A.3) postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ z^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & (z^{k-1}) \\ & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz G_p jest określona w tw. A.1, funkcja wektorowa $\underline{p}_1$ (z^{k-1}) w tw. A.3.

$$J_{\rho_k} \begin{bmatrix} G_p & \partial p_1 (z) / \partial z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det J_{\kappa_k} \quad \det \; G_p = \det P_{11} = \det A^{k-1}$$

Ostatecznie det J_{ρ_k} = det J_{κ_k} det J_{μ_k} = det A^{k-1}, co kończy dowód.

Twierdzenie A.4a. Niech będzie dana funkcja gęstości $f_{\mathbb{T}}(s_k, v^k)$ określona na zbiorze $\mathbb{T}$. Funkcja gęstości $f_{R_k}(r_k, z^k)$ określona na zbiorze R_k dana jest zależnością

$$f_{R_k}(r_r, z^k) = \left| \det A^{k-1} \right| f_{\mathbb{T}}(\rho_k^{-1}(r_r, z^k))$$

Dowód. Bezpośrednie zastosowanie znanego twierdzenia o funkcji zmiennej losowej w powiązaniu z tw. A.4.

Pomijając w def. A.2-A.3 indeks "o" otrzymujemy kolejno definicje:

i) zbioru $R_k|z^k$ i funkcji gęstości $f_{R_k|z^k}(\eta_k|z^k) = f_{R_k}(\eta_k, z^k)/f_{P_k}(z^k)$,

ii) zbioru P_k i funkcji gęstości $f_{P_k}(z^k) = \int\limits_{R_k|z^k} f_{R_k}(\eta_k, z^k)\, d\eta_k$

iii) zbioru $Z_k|z^{k-1}$ i funkcji gęstości $f_{Z_k|z^{k-1}}(z_k) = \int\limits_{P_k|z^k} f_{P_k}(z^k)\, d\eta_k$,

iv) zbioru $X_x|z^k$ i funkcji gęstości

$$f_{X_x|z^k}(x_k) = \int\limits_{R_z|z^k, x_k} f_{R_k|z^k}(\eta_k|z^k)\, d(\eta_k \setminus x_k).$$

Jeżeli funkcja gęstości $f_T(s_k, v^k)$ jest stala, to funkcja gęstości $f_{R_k}(\eta_k, z^k)$ określona na zbiorze R_k jest również stala.

Twierdzenie A.5. Jeżeli układ dynamiczny ma postać (A.1), (A.2), to

i) $R_k|z^k = \underline{p}_1(z^{k-1}) + R_{ok}|z_o^k$, $\quad f_{R_k|z^k}(\eta_k|z^k) = f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}|z_o^k + \underline{p}_1(z^{k-1}))$

ii) $X_k|z^k = p_1(z^{k-1}) + X_{ok}|z_o^k$, $\quad f_{P_k}(z^k) = f_{P_{ok}}(z_o^k + p_1(z^{k-1}))$

iii)

$$Z_k|z^{k-1} = p_{4k}(z^{k-1}) + Z_{ok}|z_o^{k-1}, \quad f_{Z_k|z^{k-1}}(z^k) = f_{Z_{ok}|z_o^{k-1}}(z_{ok} + p_{1k}(z^{k-1}))$$

gdzie $z_o^k = z^k - p_4(z^{k-1})$, funkcje wektorowe $\underline{p}_1(z^{k-1})$ są określone jak w tw. A.3, a

$$p_{4k}(z^{k-1}) = C \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

Dowód. Dla wykazania własności i) przypomnijmy, że dla każdego $k \in \mathbb{H}$ odwzorowanie ρ_k (def. A.4) określone jest niejawnie postacią:

$$\begin{bmatrix} r_k \\ z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ok} \\ z_o^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & (z^{k-1}) \\ p_4 & (z^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Zbiór warunkowy $R_k \mid z^k$ można wyznaczyć ustalając wartość z^k już w powyższym wyrażeniu. Ponieważ przy ustalonym z^k również ustalone jest z^{k-1}, to $p_1(z^{k-1})$, $p_4(z^{k-1})$ są wektorami liczbowymi, co prowadzi do słuszności tezy.
Odpowiednie wyrażenia dla funkcji gęstości jest konsekwencją własności i) zapisanej dla elementów zbioru.

Prawdziwość ii) wynika z i) i definicji zbiorów $X_{ok} \mid z_o^k$, $X_{ok} \mid z^k$ jako rzutów ortogonalnych zbiorów $R_{ok} \mid z_o^k$, $R_{ok} \mid z^k$ na przestrzenie zmiennych x_{ok}, x_k.
Rzutem wektora p_1 (z^{k-1}) jest wektor p_1 (z^{k-1}) (patrz tw. A.3.).
Wyrażenie dla funkcji gęstości jest konsekwencją własności ii) zapisanej dla elementów zbioru.

Dla uzasadnienia iii) zauważmy, że dla każdego $k \in H$ przy ustalonym z^{k-1}, p_{4k} (z^{k-1}) jest wektorem liczbowym i bezpośrednio z równania obserwacji $z_k = z_{ok} + p_{4k}$ (z^{k-1}). Odpowiednie wyrażenie dla funkcji gęstości jest konsekwencją własności iii) zapisanej dla elementów zbioru.

Dodatek B

Dowód tw. 1 jest w podstawowej strukturze dowodem twierdzenia o sterowaniu stochastycznie optymalnym w problemie LQ, tj.:

i) pierwotny problem minimalizacji względem funkcji (praw sterowania) przekształca się do problemu optymalizacji parametrycznej względem wartości tych funkcji,

ii) znajduje się rozwiązanie jednoetapowego problemu optymalizacji przy założonej funkcyjnej postaci kryterium q_k,

iii) pokazuje się prawdziwość założonej postaci funkcyjnej również dla q_{k-1} oraz niezależność "reszty" od wcześniejszych wartości sterowań.

B.1. PRZEKSZTAŁCENIE DO PROBLEMU OPTYMALIZACJI PARAMETRYCZNEJ

Przyjęte kryterium optymalności zgodnie ze sformułowaniem ma postać:

$$q = \underset{t}{E}\left(\sum_{k=1}^{N} (l_k (x_{k+1}, u_k)) \right)$$

W każdym składniku powyższej sumy dokonujemy odpowiedniej zmiany zmiennych połączonej z odwzorowaniem zbioru $\mathbb{T}$ w zbiór R_k. Na podstawie tw. A.4 z dodatku A oraz rozdzielności uśredniania względem dodawania mamy:

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \underset{(r_k, z^k)}{E} l_k(x_{k+1}, u_k) \tag{B.1}$$

gdzie $a_k = |\det A^{-k+1}| m_0$.

Dalej, korzystając z twierdzenia o całce iterowanej możemy przekształcić (B.1) do postaci:

$$q = a_1^{-1} \underset{r_1|z^1}{E} l_1(x_2, u_1) + \ldots + a_k^{-1} \underset{z^k}{E} \underset{r_k|z^k}{E} l_k(x_{k+1}, u_k) + \ldots$$

$$+ a_N^{-1} \underset{z^N}{E} \underset{r_N|z^N}{E} l_N(x_{N+1}, u_N) = a_1^{-1} \underset{z_1}{E} \underset{r_1|z_1}{E} l_1(x_2, u_1) + \ldots$$

$$+ a_k^{-1} \underset{z_1}{E} \ldots \underset{z_k|z^{k-1}}{E} \underset{r_k|z^k}{E} l_k(x_{k+1}, u_k) + \ldots + a_N^{-1} \underset{z_1}{E} \ldots \underset{z_N|z^{N-1}}{E} \underset{r_N|z^N}{E} l_N(x_{N+1}, u_N) \tag{B.2}$$

Na podstawie (B.2) minimalizacja kryterium q względem funkcji $u_k = u_k(z^k)$, $k \in \mathbb{H}$, sprowadza się do rekurencyjnej minimalizacji względem wartości tych funkcji odpowiednich sum częściowych występujących w prawej stronie wyrażenia (B.2). Mamy:

$$q^* = a_1^{-1} \underset{z_1}{E} \min_{u_1} \Big(\underset{r_1|z_1}{E} l_1(x_2, u_1) + \ldots + a_k^{-1} \underset{z_k|z^{k-1}}{E} \min_{u_k} \Big(\underset{r_k|z^k}{E} l_k(x_{k+1}, u_k) +$$

$$+ a_N^{-1} \underset{z_N|z^{N-1}}{E} \min_{u_N} \Big(\underset{r_N|z^N}{E} l_N(x_{N+1}, u_N)\Big)\ldots\Big)\ldots\Big) \tag{B.3}$$

Wyrażenie (B.3) kończy pierwszą fazę dowodu poświęconą przekształceniu problemu optymalizacji funkcyjnej do optymalizacji parametrycznej.

B.2. JEDNOETAPOWY PROBLEM MINIMALIZACJI

Zakładamy, że wyrażenie:

$$q_k = a_k^{-1} \underset{\eta_k|z^k}{E} l_k(x_{k+1}, u_k) + a_{k+1}^{-1} \underset{z_{k+1}|z^{k+2}}{E} \Big(.. a_N^{-1} \underset{z_N|z^{N-1}}{E} \min_{u_N} \underset{\eta_N|z^N}{E} l_N(x_{N+1}, u_N) .. \Big) \tag{B.4}$$

podlegające w (B.3) minimalizacji względem u_k, przy uwzględnieniu że l_i (x_{i+1}, u_i), $k \in H$, są dodatnio określonymi formami kwadratowymi zmiennych (x_{i+1}, u_i), może być przedstawione w postaci

$$q_k = a_k^{-1} \Big(\underset{\eta_k|z^k}{E} (x'_{k+1} K_{k+1} x_{k+1} + u'_k Q_k u_k) + e_k \Big) \tag{B.5}$$

gdzie e_k jest niezależnie od u_k, oraz $K_{k+1} > 0$.

Łatwo sprawdzić, że dla k=N jest to słuszne i w tym przypadku $K_{N+1} = P_{N+1} > 0$ oraz $e_N = 0$ jest niezależnie od u_N. Zatem dla indukcyjnego dowodu słuszności (B.5) dla każdego $k \in H$ wystarczy pokazać, że założona postać (B.5) implikuje analogiczną postać q_{k-1}.

Wyrażenie q_k podlega minimalizacji parametrycznej względem u_k. Forma kwadratowa zmiennej u_k otrzymana w wyniku podstawienia za x_{k+1} równania stanu jest dodatnio określona, stąd wartość u_k^*, dla której przyjmuje ona minimum globalne, znajdujemy przyrównując do zera jej gradient względem u_k. Mamy kolejno:

$$a_k q_k = \underset{\eta_k|z^k}{E} (x'_k A' K_{k+1} A x_k + 2u'_k B' K_{k+1} A x_x + 2u'_k B' K_{k+1} w_k + 2x'_k A' K_{k+1} w_k + u'_k (Q_k + B' K_{k+1} B) u_k + w'_k K_{k+1} w_k) + e_k \tag{B.6}$$

Na podstawie założeń przyjętych w sformułowaniu problemu zachodzi:

$$u'_k B' K_{k+1} \underset{\eta_k|z^k}{E} w_k \equiv 0 \tag{B.7}$$

$$\underset{\eta_k | z^k}{E} x'_k A' K_{k+1} w_k = 0 \tag{B.8}$$

Rzeczywiście na podstawie tw. A.5 z dodatku A mamy:

$$\underset{\eta_k | z^k}{E} w_k = \underset{r_{ok} | z_o^k}{E} w_k = 0$$

Podobnie

$$\underset{\eta_k | z^k}{E} x'_k A' K_{k+1} w_k = p'_1 A' K_{k+1} \underset{r_{ok} | z_o^k}{E} w_k + \underset{r_{ok} | z_o^k}{E} x'_{ok} A' K_{k+1} w_k = 0$$

Zerowanie się w (B.6) składników (B.7), (B.8) zachodzące przy spełnieniu założeń przyjętych w sformułowaniu problemu powoduje uproszczenie rozważań i wynikowych wzorów określających prawa sterowania.

Obliczając pochodna prawej strony (B.6) względem u_k i przyrównując ją do zera otrzymujemy:

$$B' K_{k+1} A \underset{r_r | z^k}{E} x_k + (Q_k + B' K_{k+1} B) u_k \underset{\eta_k | z^k}{E} = 0$$

Stąd

$$u_k^* = -(Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \hat{x}_k \tag{B.9}$$

$$\hat{x}_k = \underset{\eta_k | z^k}{E} x_k \tag{B.10}$$

Podstawiając (B.9) do (B.6) otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \underset{\eta_k | z^k}{E} (x'_k A' K_{k+1} A x_k + 2\hat{x}'_k A' K_{k+1} B (Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A x_k +$$

$$+ \hat{x}'_k A' K_{k+1} B (Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \hat{x}_k + w'_k K_{k+1} w_k) + e_k \tag{B.11}$$

co kończy fazę dowodu nazwaną jednoetapowym problemem optymalizacji. W fazie tej wykorzystaliśmy założoną postać funkcji q_k, co pozwoliło na określenie optymalnego prawa sterowania $u_k^*(z^k)$ (B.9) oraz odpowiadającej mu postaci q_k^* (B.11).

B.3. WYZNACZENIE POSTACI FUNKCYJNEJ DLA q_{k-1}

Odpowiednio do struktury wyrażenia (B.3) mamy:

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} \underset{r_{k-1}|z^{k-1}}{E} l_{k-1}(x_k, u_{k-1}) + \underset{z_k|z^{k-1}}{E} q_k^* \tag{B.12}$$

Ponieważ $l_{k-1}(x_k, u_{k-1})$ jest z założenia formą kwadratową zmiennych x_k, u_{k-1}, to głównym zadaniem jest przekształcenie drugiego składnika sumy do takiej samej postaci, jaką ma składnik pierwszy.
W tym celu podstawiamy w (B.11):

$$\hat{x}_k = x_k - x_k + \hat{x}_k$$

$$M_k = A'K_{k+1}B(Q + B'K_{k+1}B)^{-1}B'K_{k+1}A$$

Mamy kolejno:

$$a_k q_k^* - \underset{r_k|z^k}{E} x'_k A'K_{k+1}Ax_k = \underset{r_k|z^k}{E} (-2(x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k x_k +$$

$$+ (x_k - x_k + \hat{x}_k)'M_k(x_k - x_k + \hat{x}_k) + w'_k K_{k+1} w_k) + e_k$$

$$= \underset{r_k|z^k}{E} (-2x'_k M_k x_k + 2(x_k - \hat{x}_k)'M_k x_k + x'_k M_k x_k + \ldots - 2(x_k - \hat{x}_k)'$$

$$M_k x_k + (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k) + w'K_{k+1}w_k) + e_k \quad \underset{r_k|z^k}{E} -x'_k M_k x_k +$$

$$\underset{r_k|z^k}{E} (x_k - \hat{x}_k)'M_k(x_k - \hat{x}_k) + \underset{r_k|z^k}{E} w'_k K_{k+1} w_k + e_k$$

Oznaczając

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$$

$$e_k^* = e_k + \mathop{E}_{\eta_k | z^k} w'_k K_{k+1} w_k + \mathop{E}_{\eta_k | z^l} \tilde{x}'_k A'_k K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1} A \tilde{x}_k \tag{B.13}$$

otrzymujemy:

$$a_k q_k^* = \mathop{E}_{\eta_k | z^k} x'_k L_k x_k + e_k^* \tag{B.14}$$

$$L_k = A'(K_{k+1} - K_{k+1} B(Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1}) A$$

Obecnie należy wykonać odpowiednio do (B.12) całkowanie pierwszej strony wyrażenia (B.14) względem z_k po zbiorze $Z_k | z^{k-1}$.

$$\begin{aligned} \mathop{E}_{z_k | z^{k-1}} q_k^* &= a_k^{-1} \mathop{E}_{z_k | z^{k-1}} \left(\mathop{E}_{\eta_k | z^k} x'_k L_k x_k \right) + a_k^{-1} \mathop{E}_{z_k | z^{k-i}} e_k^* = \\ &= a_{k-1}^{-1} \mathop{E}_{z_k | z^{k-1}} x'_k L_k x_k + a_k^{-1} \mathop{E}_{z_k | z^{k-1}} e_k^* \end{aligned} \tag{B.15}$$

Oznaczając

$$e_{k-1} = a_{k-1} a_k^{-1} \mathop{E}_{z_k | z^{k-1}} e_k^* \tag{B.16}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$q_{k-1} = a_{k-1}^{-1} r \mathop{E}_{\eta_{k-1} | z^{k-1}} (x'_k (L_k + P_k) x_k + u'_{k-1} Q_{k-1} u_{k-1}) + e_{k-1})$$

czyli

$$K_k + A'(K_{k+1} - K_{k+1} B(Q + B' K_{k+1} B)^{-1} B' K_{k+1}) A + P_k$$

$$K_{N+1} = P_{N+1}$$

Otrzymana postać (B.17) posiada taką samą strukturę jak (B.5).

Na zakończenie tej fazy dowodu pokażemy, że reszta e_{k-1} nie zależy od żadnego ze sterowań u^{k-1}. W tym celu powróćmy do wyrażenia (B.13) z uwzględnieniem (B.16), analizując kolejno składniki sumy określającej e_{k-1}.

Mamy:

1) $\underset{z_k|z^{k-1}}{E} e_k$, składnik ten na podstawie tw. A.5 dod. A może być przekształcony do postaci $\underset{z_{ok}|z_o^{k-1}}{E} e_k$, w której gęstość określona na zbiorze $Z_k|z_o^{k-1}$ nie zależy od u^{k-1}, a e_k nie zależy od u^k z założenia.

2) drugi ze składników przekształcamy następująco

$$\underset{z_k|z^{k-1}}{E}\ \underset{r_k|z^k}{E} w'_k K_{k+1} w_k = |\det A| \underset{r_{k-1}|z^{k-1}}{E} w'_k K_{k+1} w_k =$$

$$= |\det A| \underset{r_{ok-1}|z_o^{k-1}}{E} w'_k K_{k+1} w_k$$

co pozwala na stwierdzenie jego niezależności od u^{k-1},

3) w ostatnim składniku różnica $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ nie zależy od u^{k-1}, stad na podstawie tw. A.5 z dodatku A

$$\underset{z_k|z^{k-1}}{E} \left(\underset{r_k|z^k}{E} \tilde{x}'_k M_k \tilde{x}_k \right) = \underset{z_k|z^{k-1}}{E} \left(\underset{r_{ok}|z_o^k}{E} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} \right) =$$

$$= \underset{z_{ok}|z_o^{k-1}}{E} \left(\underset{r_{ok}|z_o^k}{E} \tilde{x}'_{ok} M_k \tilde{x}_{ok} \right.$$

stąd cały składnik nie zależy od u^{k-1}.

Czynniki a_k, a_{k-1} mają wartości liczbowe i nie zależą od u^{k-1}. Ostatecznie e_{k-1} nie zależy od u^{k-1}, co kończy ostatnią fazę dowodu.

Dla dowodu zależności

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{ok} + \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

$$\hat{x}_{ok} = \mathop{E}_{r_{ok}|z_o^k} x_{ok}$$

wystarczy wykorzystać określenie

$$\hat{x}_k = \mathop{E}_{r_k|z^k} x_k$$

a następnie na podstawie tw. A.5 z dodatku A podstawić

$$f_{R_k|z^k}(r_k|z^k) = f_{R_{ok}|z_o^k}(r_{ok}|z_o^k + \underline{p}_1(z^{k-1}))$$

oraz

$$x_k = x_{ok} + p_1(z^{k-1})$$

gdzie

$$p_1(z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i(z^i)$$

Recenzent: Dr hab. inż. Mirosław **Zaborowski**
Prof. Pol. Świętokrzyskiej

Wpłynęło do Redakcji 15.05. 1992 r.

Abstract

In this paper synthesis of stochastic optimal control law under uniform probability density of uncertain variables is presented for finite ontrol horizon, linear state and

output equations and quadratic performance criterion. The initial state, the sequence of disturbances in state equation and the sequence of measurement errors in the output equation are jointly characterized by a given a priori uniform density of probability. The control law is a function of the given measurement information constituting together with the system nested information structure and should minimize the mean value of quadratic performance criterion where the mean value is taken with respect to the all uncertain variables. Introducing the notion of information sets and using their one-to-one transformations the control law synthesis problem is converted into the dynamic programming scheme with parameter minimization problem solved on each stage. The obtained control law is for each stage of the considered horizon the linear function of expected value of conditional state. It has been shown also that if the density function of the state possesses a central symmetry, than expected conditional value of the state can be replaced by center of gravity of conditional set of states being the orthogonal projection of conditional information set on the subspace of the state.