

Krzysztof SKWAREK*
Politechnika Śląska

STATECZNOŚĆ LEPKOSPĘŻYSTEGO PRĘTA WARSTWOWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU ŚCINANIA

Streszczenie. W artykule przedstawiono analizę problemu stateczności pręta warstwowego z warstwami sprężystymi i lepkospężystymi, z uwzględnieniem wpływu ścinania. Wyprowadzono równania linii ugięcia takiego pręta w przypadku ogólnym oraz dla pręta z warstwami lepkospężystymi opisanymi modelem standardowym. Rozwiązanie zastosowano w przykładzie dla pręta o przekroju złożonym z elementu stalowego i warstwy betonu.

STABILITY OF VISCOELASTIC LAYERED BAR TAKING SHEAR STRESS INTO CONSIDERATION

Summary. The article shows the analysis of stability of layered bar with elastic and viscoelastic layers taking shear stress into consideration. Formulas of bending line of the bar for general case and also for viscoelastic layers based on standard model were derived in the article. The solution was used in the example for the bar consisting of steel element and layer of concrete.

1. Wstęp

Spotykane coraz częściej w rozwiązaniach konstrukcyjnych układy warstwowe wymagają rozwiązywania nowych zagadnień teoretycznych, wśród których najistotniejsze to:

- zagadnienie kontaktowe na styku warstw,
- problemy stabilności i dynamiki konstrukcji warstwowych,
- szacowanie nośności.

W niniejszym opracowaniu podjęto rozważania nad problemem stabilności konstrukcji warstwowych, które stają się o tyle istotne, iż zespolenie materiału sprężystego z materiałem lepkospężystym powoduje, iż układ staje się lepkospężysty. Natomiast utrata stateczności

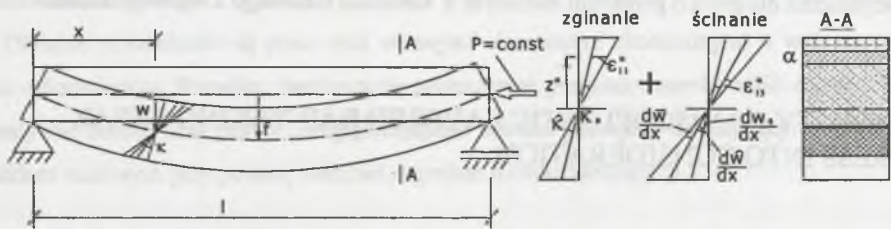
* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik

wnosi tu nową jakość – istotny staje się czas. W efekcie zamiast natychmiastowej utraty stateczności otrzymujemy proces, który w różnych chwilach prowadzi do utraty stabilności narastania przemieszczeń.

W przypadku zespolenia materiałów o różnych własnościach fizycznych trzeba uwzględnić również wpływ ścinania na proces. Przedstawiony zakres problemów jest celem niniejszego opracowania.

2. Równania problemu

Poniżej w kolejnych podpunktach pokazano kształt równań geometrycznych, fizycznych i sił przekrojowych w warstwowym pręcie lepkosprężystym.



Rys. 1. Schemat lepkosprężystego pręta warstwowego oraz rozkład odkształceń w przekroju
Fig. 1. Diagram of viscoelastic, layered bar and its strains in the cross-section

gdzie:

$w(\kappa)$ - ugięcie całkowite (krzywizna całkowita), $w_0(\kappa_0)$ - wstępne, trwałe ugięcie (wstępna, trwała krzywizna), $\hat{w}(\hat{\kappa})$ - ugięcie (krzywizna) wywołane zginaniem, $\bar{w}(\bar{\kappa})$ - ugięcie (krzywizna) wywołane ścinaniem.

2.1. Strona geometryczna

Przyjęto tu, iż przemieszczenia pręta (ugięcia) są sumą klasycznych składowych (w_0 ; \hat{w}) oraz dodatkowej składowej \bar{w} wynikającej ze ścinania.

$$w = w_0 + \hat{w} + \bar{w} \quad (1)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} + \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \quad (2)$$

$$\kappa = \kappa_0 + \hat{\kappa} + \bar{\kappa} \quad (2')$$

Odształcenia w warstwie α , wywołane zginaniem (ε_{11}) oraz odkształcenia postaciowe (ε_{13}) wywołane ścinaniem wynoszą:

$$\varepsilon_{11}^{\alpha} = \tilde{\kappa} \cdot z^{\alpha}; \quad \varepsilon_{13}^{\alpha} = \frac{d\bar{w}}{dx} \quad (3)$$

2.2. Strona fizyczna

Założono, iż pręt składa się z β warstw sprężystych oraz α warstw lepkosprężystych. Związki między odkształceniami i naprężeniami w warstwach opisane są:

- w warstwach sprężystych równaniami:

$$\varepsilon_{11}^{\beta} = \frac{1}{E^{\beta}} \cdot \sigma_{11}^{\beta}; \quad \varepsilon_{13}^{\beta} = \frac{1}{G^{\beta}} \cdot \sigma_{13}^{\beta} \quad (4)$$

- w warstwach lepkosprężystych równaniami nieinwariantnej teorii dziedziczności :

$$\varepsilon_{11}^{\alpha}(t) = \frac{1}{E^{\alpha}(t)} \cdot \left[\sigma_{11}^{\alpha}(t) + \int_0^t K_1^{\alpha}(t, \tau) \cdot \sigma_{11}^{\alpha}(\tau) \cdot d\tau \right] \quad (5)$$

$$\varepsilon_{13}^{\alpha}(t) = \frac{1}{G^{\alpha}(t)} \cdot \left[\sigma_{13}^{\alpha}(t) + \int_0^t K_2^{\alpha}(t, \tau) \cdot \sigma_{13}^{\alpha}(\tau) \cdot d\tau \right] \quad (6)$$

Ogólnie, układ warstw sprężystych oraz lepkosprężystych można zapisać tylko jedną parą równań: (5) i (6), z zastrzeżeniem, iż w warstwie sprężystej $K^{\alpha}(t, \tau) \equiv 0$.

W równaniach (5) i (6) jądra K_1^{α} i K_2^{α} wynoszą:

$$K_1^{\alpha}(t, \tau) = -E^{\alpha}(t) \cdot \frac{\partial \varphi_1^{\alpha}(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (7)$$

$$K_2^{\alpha}(t, \tau) = -G^{\alpha}(t) \cdot \frac{\partial \varphi_2^{\alpha}(t, \tau)}{\partial \tau} \quad (8)$$

gdzie:

$$G^{\alpha}(t) = \frac{E^{\alpha}(t)}{2 \cdot [1 + \nu_1^{\alpha}(t)]} \quad (9)$$

$$\varphi_2^{\alpha}(t, \tau) = 2 \cdot [1 + \nu_2^{\alpha}(t, \tau)] \cdot \varphi_1^{\alpha}(t, \tau) \quad (10)$$

$E^{\alpha}(t)$, $G^{\alpha}(t)$ - moduł Younga, moduł Kirchhoffa materiału w warstwie α (dla warstw sprężystych $E^{\beta}(t) = \text{const}$, $G^{\beta}(t) = \text{const}$),

$\varphi_1^{\alpha}(t, \tau)$, $\varphi_2^{\alpha}(t, \tau)$ - funkcje pełzania,

$\nu_1^{\alpha}(t)$, $\nu_2^{\alpha}(t, \tau)$ - współczynniki Poissona odpowiadające odkształceniom sprężystym i odkształceniom pełzania.

2.3. Równania sił przekrojowych

Z warunku równowagi sił osiowych w przekrojach obliczamy położenie osi obojętnej:

$$N = \sum_{\alpha} N(t, x)^{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \int_0^l \psi_1^{\alpha}(t, \tau) \cdot \frac{\partial \kappa(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau \cdot \int_{F^{\alpha}} z^{\alpha}(t, x) dF^{\alpha} + \quad (11,12)$$

$$+ \sum_{\beta} \int_0^l E^{\beta} \cdot H(t - \tau) \cdot \frac{\partial \kappa(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau \cdot \int_{F^{\beta}} z^{\beta}(t, x) dF^{\beta} = 0$$

Siły wewnętrzne: momenty zginające oraz siły tnące w poszczególnych warstwach przekrojów oraz w całych przekrojach:

$$M^{\alpha}(t, x) = \int_{F^{\alpha}} \sigma_{11}^{\alpha}(t, x) \cdot z^{\alpha} dF^{\alpha}, \quad M = \sum_{\alpha} M^{\alpha}(t, x) \quad (13)$$

$$M = \sum_{\alpha} \int_0^l \psi_1^{\alpha}(t, \tau) \cdot \frac{\partial \kappa(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau \cdot \int_{F^{\alpha}} z^{\alpha}(t, x)^2 dF^{\alpha} + \quad (14)$$

$$+ \sum_{\beta} \int_0^l E^{\beta} \cdot H(t - \tau) \cdot \frac{\partial \kappa(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau \cdot \int_{F^{\beta}} z^{\beta}(t, x)^2 dF^{\beta}$$

$$T^{\alpha}(t, x) = \int_{F^{\alpha}} \sigma_{13}^{\alpha}(t, x) dF^{\alpha}, \quad T = \sum_{\alpha} T^{\alpha}(t, x) \quad (15)$$

$$T = \sum_{\alpha} \int_0^l \psi_2^{\alpha}(t, \tau) \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}(\tau, x)}{\partial x \partial \tau} d\tau \cdot k^{\alpha} \int_{F^{\alpha}} dF^{\alpha} + \sum_{\beta} \int_0^l G^{\beta} \cdot H(t - \tau) \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}(\tau, x)}{\partial x \partial \tau} d\tau \cdot k^{\beta} \int_{F^{\beta}} dF^{\beta} \quad (16)$$

gdzie: $\psi_1^{\alpha}(t, \tau)$, $\psi_2^{\alpha}(t, \tau)$ - funkcje relaksacji materiału lepkosprężystego warstwy α (przy czym: $\psi_1^{\alpha}(t, t) = E^{\alpha}(t)$, $\psi_2^{\alpha}(t, t) = G^{\alpha}(t)$); $H(t - \tau)$ - funkcja Heaviside'a, k^{α} - współczynnik zależny od kształtu przekroju (np. dla prostokąta $k = l, l$).

3. Rozwiązanie

Z równań (14) i (16) po uwzględnieniu równań strony geometrycznej i fizycznej otrzymano dla warstwy α (gdzie poprzez α oznaczono dalej warstwy lepkosprężyste i sprężyste przekroju):

$$\sum_{\alpha} E^{\alpha} J^{\alpha} \cdot \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} = - \sum_{\alpha} M^{\alpha} - \sum_{\alpha} M^{\alpha} \circ K_1^{\alpha} \quad (17)$$

$$\sum_{\alpha} G^{\alpha} k^{\alpha} F^{\alpha} \cdot \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = \sum_{\alpha} \frac{d^2 M^{\alpha}}{dx^2} + \sum_{\alpha} \frac{d^2 M^{\alpha}}{dx^2} \circ K_2^{\alpha} \quad (18)$$

gdzie: F^α , J^α - pole przekroju i moment bezwładności warstwy α , symbol „ \circ ” oznacza całkę

$$\text{iloczynu funkcji: } f_1 \circ f_2 = \int_0^l f_1(t, \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau.$$

W dalszych rozważaniach przyjęto następujące oznaczenia:

$$EJ = \sum_{\alpha} E^{\alpha} J^{\alpha}; \quad GkF = \sum_{\alpha} G^{\alpha} k^{\alpha} F^{\alpha} \quad (19)$$

$$M \circ K_1 = \sum_{\alpha} M^{\alpha} \circ K_1^{\alpha}, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} \circ K_2 = \sum_{\alpha} \frac{d^2 M^{\alpha}}{dx^2} \circ K_2^{\alpha} \quad (20)$$

Sumując równania (17) i (18) dla całego przekroju, a następnie wstawiając je do równania krzywizn (2), otrzymujemy równanie całkowe Voltery 2 rodzaju:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d^2 w_0}{dx^2} = & \frac{1}{EJ} \cdot [-M - M \circ K_1] + \\ & + \frac{1}{GkF} \cdot \left[\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{d^2 M}{dx^2} \circ K_2 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Oznaczając strzałkę ugięcia całkowitego jako $f(t)$ i przyjmując linię ugięcia pręta przedstawionego na rys. (1) w postaci:

$$w(t, x) = f(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \quad (22)$$

oraz uwzględniając, że

$$M(t, x) = P \cdot w(t, x) \quad (23)$$

równanie (21) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} -f(t) \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + f_0 \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = & \frac{1}{EJ} \cdot [-P \cdot f(t) - P \cdot \int_0^l f(\tau) K_1(t, \tau) d\tau] + \\ & + \frac{1}{GkF} \cdot \left[-P \cdot f(t) \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - P \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \int_0^l f(\tau) K_2(t, \tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Dalszy tok rozwiązania równania (21) przedstawiono przyjmując następujące założenia:

- Warstwy lepkosprężyste opisane są równaniami inwariantnej teorii dziedziczności:

$$K^{\alpha}(t, \tau) = K^{\alpha}(t - \tau) \quad (25)$$

- Moduł Younga warstwy lepkosprężystej jest stały w czasie: $E^{\alpha}(t) = \text{const}$.
- W związku z niewielką różnicą współczynników Poissona $\nu^{\alpha}_1(t)$, $\nu^{\alpha}_2(t, \tau)$ przyjęto, iż $\nu^{\alpha}_1(t) = \nu^{\alpha}_2(t, \tau) = \nu^{\alpha} = \text{const}$, w wyniku czego funkcje pełzania oraz moduły: Younga i Kirchhoffa przy zginaniu i ścinaniu są proporcjonalne.
- Brak wstępnych trwałych ugięć pręta.

Po uwzględnieniu powyższych założeń równanie (24) możemy zapisać w postaci:

$$f(t) \cdot \left(P_e - P - \frac{P_e}{GFk} \cdot P \right) = P \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot P_e}{GFk} \right) \cdot \int_0^t f(\tau) K_1(t - \tau) d\tau \quad (26)$$

gdzie:

$$P_e = EJ \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (27)$$

Przyjmując nową zmienną $\theta = t - \tau \Rightarrow d\theta = -d\tau$ oraz szukając rozwiązania o postaci:

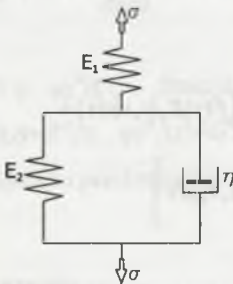
$f(t) = f_0 \cdot e^{\lambda t}$, otrzymujemy równanie:

$$\frac{P_e - P - \frac{P_e}{GFk} \cdot P}{P \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot P_e}{GFk} \right)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \theta} \cdot K_1(\theta) d\theta \quad (28)$$

Prawa strona równania (28) przedstawia przekształcenie Laplace'a funkcji $K_1(\theta)$: $\bar{K}_1(\lambda) = L(K_1(\theta))$. Wyznaczając parametr λ z równania (28), otrzymujemy szukane rozwiązanie linii ugięcia.

Do dalszych rozważań przyjęto, iż w przekroju występuje jedna warstwa lepkosprężysta oraz jądro równania całkowego $K_1(t - \tau)$, opierając się na standardowym modelu reologicznym:

$$K_1(t - \tau) = C \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma(t - \tau)}$$



$$E = \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}, \quad n = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$$

$$\gamma = \frac{E}{E_1 \cdot n}, \quad \gamma \cdot C = \frac{E_1 - E}{E_1 \cdot n}$$

Rys. 2. Schemat modelu standardowego wraz z oznaczeniami parametrów

Fig. 2. Diagram of standard model and its parameters specification

Rozwiązanie równania (28) dla przyjętego modelu standardowego przyjmuje postać:

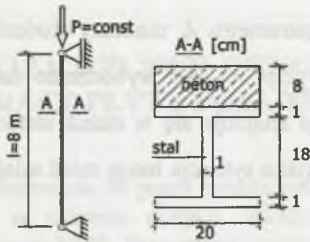
$$f(t) = f_0 \cdot e^{\lambda t}, \quad \text{gdzie:} \quad (29)$$

$$\lambda = \frac{P \cdot \left(C \cdot \gamma + \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot C \cdot \gamma \cdot P_e}{GFk} - \gamma + \gamma \frac{\gamma \cdot P_e}{GFk} \right) - P_e \cdot \gamma}{P_e - P \cdot \left(1 + \frac{P_e}{GFk} \right)} \quad (30)$$

Wartość f_0 wyznaczamy z warunku początkowego.

4. Przykład liczbowy

Ilustracją numeryczną poprzednio prezentowanych rozważań będzie utrata stabilności odkształceń słupa stalowo-betonowego o następujących charakterystykach geometrycznych i materiałowych:



Warstwa lepkosprężysta (beton):

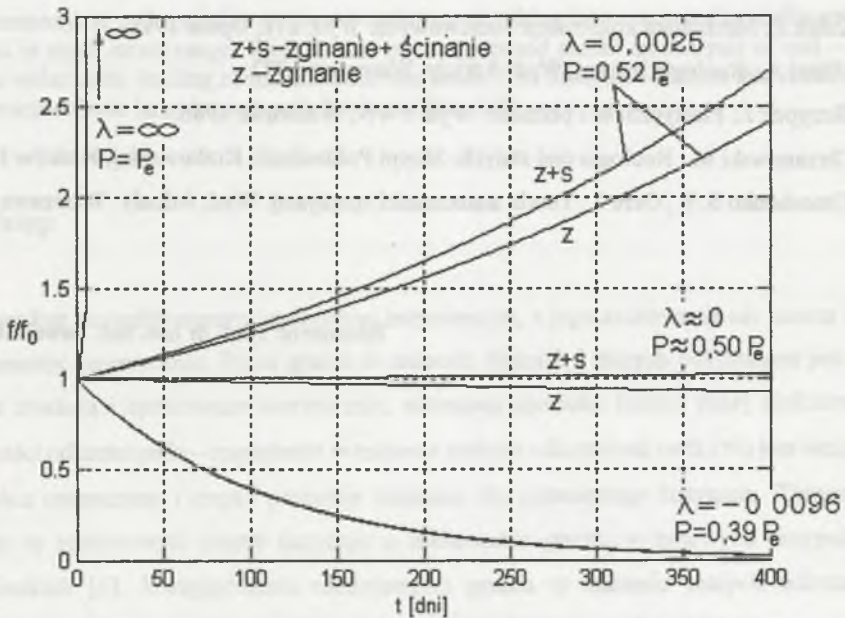
$E_1=29$ [GPa]; $F=0.016$ [m²]; $G=13$ [GPa]; $k=1,200$;
 $\nu=0,17$; $C=0,97$ [m²/ Pa]; $\gamma=0,026$ [d⁻¹]

Warstwa sprężysta (stal):

$E=200$ [GPa]; $F=0.042$ [m²]; $G=80$ [GPa],
 $k=1,254$; $\nu=0,30$

Rys. 3. Dane geometryczne oraz materiałowe przyjęte w przykładzie
 Fig. 3. Geometrical and material data used in the example

Poniżej przedstawiono wykresy strzałki ugięcia od czasu w zależności od różnych wartości siły P.



Rys. 4. Wykresy zmiany ugięcia od czasu w zależności od parametru λ
 Fig. 4. Deflection-time diagrams depending on parameter λ

5. Podsumowanie

Analizując utratę stateczności lepkosprężystego pręta warstwowego, możemy dojść do następujących wniosków:

Poszukując funkcji ugięcia, w zależności od czasu, w postaci $w(x,t) = w_1(x) \cdot e^{\lambda t}$ dla pręta bez trwałego ugięcia początkowego i analizując znak parametru λ , możemy stwierdzić, że przy $\lambda > 0$ pręt może ulec z czasem wyboczeniu (przy $\lambda \rightarrow \infty$ wyboczenie następuje natychmiastowo po przyłożeniu siły P), przy $\lambda = 0$ pręt znajduje się w stanie stateczności, przy $\lambda < 0$ ugięcia pręta przy stałym obciążeniu maleją (taka sytuacja może mieć miejsce np. przy wstępnym ugięciu sprężystym pręta).

Badając wpływ ścinania na utratę stateczności pręta lepkosprężystego, możemy stwierdzić, iż wpływ ten wzrasta wraz z upływem czasu. W analizowanym przykładzie wzrost narastającego ugięcia od ścinania po okresie 400 dni wynosił $\approx 8\%$.

LITERATURA

1. Kubik J.: Mechanika konstrukcji warstwowych. Wyd. TiT, Opole 1993.
2. Mitzel A.: Reologia betonu. Wyd. Arkady, Warszawa 1972.
3. Skrzypek J.: Plastyczność i pełzanie. Wyd. PWN, Warszawa 1986.
4. Chrzanowski M.: Reologia ciał stałych. Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995.
5. Timoshenko S. P., Gere J.: Teoria stateczności sprężystej. Wyd. Arkady, Warszawa 1963.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Paweł Śniady