

Paweł STAPÓR*

Politechnika Świętokrzyska

ANALIZA SKOŃCZENIE-ELEMENTOWA PRZYSTOSOWANIA MAŁO WYNIOSŁEJ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ POWŁOKI WALCOWEJ DO OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO

Streszczenie. Artykuł dotyczy analizy przystosowania wstępnie przeciążonych sprężysto-plastycznych konstrukcji powierzchniowych, poddanych a priori zdefiniowanemu programowi obciążenia. Program obciążenia obejmuje rodzaj siły, jej rozkład i sposób zmiany tego obciążenia. W szczególnym przypadku rozważany jest jednoparametrowy ruchomy układ sił, przemieszczający się według zadanej drogi. W wyniku numerycznej analizy problemu, przy użyciu metody elementów skończonych (MES), wyznaczana jest wartość parametru przystosowania konstrukcji dla zadanych wartości obciążeń. Efektywność proponowanych algorytmów zademonstrowana jest na przykładzie analizy mało wyniosłej powłoki walcowej.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SHAKEDOWN OF AN ELASTIC- PLASTIC CYLINDRICAL PANEL UNDER MOVING LOAD

Summary. The problem of shakedown of elastic-plastic surface structures, loaded according to an a priori defined load program, is considered in the paper. In general, the load program covers the kind of load, its distribution on the structure and the way in which the structure is loaded. In specific case, one parameter set of loads moving slowly on the structure according to the specified load program, is taken into account. As a result, the shakedown load parameter is calculated numerically using the finite element method (FEM). An example of shakedown of the cylindrical panel demonstrates effectiveness of proposed algorithms of analysis..

1. Wstęp

Proponowana w artykule metoda analizy przystosowania konstrukcji powierzchniowych do obciążenia ruchomego jest pewną kontynuacją procedur przedstawionych w [2], gdzie rozpatrywano przystosowanie sprężysto-plastycznych konstrukcji ramowych. W artykule tym

*Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Czesław Cichoń

zastosowano statyczną metodę analizy opartą na twierdzeniu Neala [8] oraz na idei aktualnego obszaru sprężystego zaproponowanej przez Königa [7]. Inne teoretyczne rozważania i wyniki analizy przystosowania konstrukcji prętowych zostały przedstawione w pracach [3], [4] i [5].

Możliwości nowoczesnych metod obliczeniowych, takich jak metoda elementów skończonych, powodują, że dotychczas teoretyczne rozważania prezentowane w tych pracach, teraz mogą być efektywnie wykorzystane w zastosowaniu do znacznie bardziej złożonych konstrukcji.

W przeciwieństwie do klasycznej analizy przystosowania, którą możemy uważać za pewne uogólnienie analizy granicznej, wykorzystującej twierdzenia Melana i Koitera [6,12], w artykule prezentowana jest metoda, w której możliwości przystosowania konstrukcji badane są dla rzeczywistych pól naprężeń resztkowych.

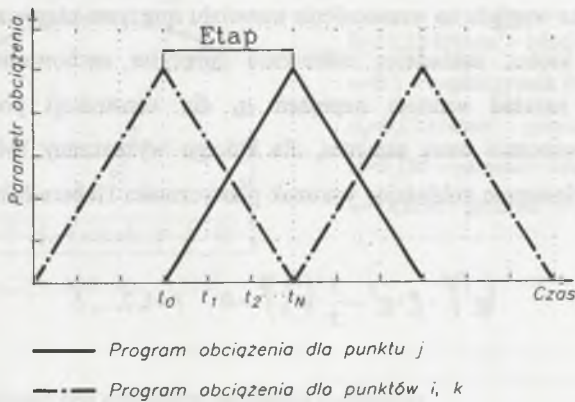
Konstrukcje mogą być wystawione na działanie różnego rodzaju sił, których amplitudy mogą zmieniać się w pewnym zakresie lub jeżeli pozostają stałe, ich miejsca przyłożenia mogą ulegać zmianie. Pierwszy przypadek sprowadza się do wyznaczenia obszaru przystosowania (lub w przypadku obciążenia dwuparametrowego powierzchni przystosowania) dla zadanego programu obciążenia. Problem wyznaczenia takiej powierzchni rozpatrywany był w pracy [10]. Natomiast w tym artykule skupiono się na jednoparametrowym obciążeniu poruszającym się powoli po konstrukcji według zdefiniowanego programu. Założenie powolnego ruchu upoważnia nas do pominięcia w obliczeniach efektu sił bezwładności. W wyniku realizacji programu obciążenia konstrukcja może pozostawać w stanie sprężystym lub mogą pojawiać się pewne naprężenia resztkowe będące efektem procesów niezachowawczych. Dalsza analiza ma na celu wyznaczenie parametru określającego wartość obciążenia, dla którego realizacja kolejnych cykli obciążenia nie będzie powodować procesów niesprężystych. Parametr obciążenia spełniający ten warunek nazwany będzie parametrem przystosowania.

Metoda analizy jest w pełni numeryczna, podstawowe równania problemu formułowane są przy użyciu metody elementów skończonych w całkowitym opisie Lagrange'a. Przyrostowy układ równań równowagi rozszerzony o równanie więzów Riksa-Wempnera rozwiązywany jest metodą Newtona-Raphsona [11].

Do dyskretyzacji skończenie elementowej konstrukcji użyto sprężysto-plastycznego elementu płytowego RSE-V [1] z wprowadzonym szóstym stopniem swobody.

2. Obciążenie ruchome

Rozpatrywany problem ma charakter statyczny, w związku z czym pojęcie „czas” definiuje jakikolwiek parametr monotonicznie rosnący podczas procesu obciążania. W najprostszym przypadku obciążenia jednoparametrowego przemieszczanie siły może być symulowane przez zmianę wartości parametru obciążenia w węzłach, gdzie pojawiają się niezerowe składowe tego wektora. Przejście z danego miejsca przyłożenia siły do sąsiedniego na drodze ruchu obciążenia będziemy nazywać etapem S . Każdy etap realizowany jest w zadanej liczbie kroków N . Powyższe definicje zilustrowane są na rys. 1., pokazującym zmiany parametru obciążenia w czasie przy przejściu z punktu przyłożenia siły i do punktu k poprzez punkt j .



Rys. 1. Program ruchu obciążenia dla przemieszczenia siły z punktu i do punktu k przez punkt j

Fig. 1. Moving load program for the load moves from the point i through j to the point k

Efekt ruchu obciążenia symulowany jest przy użyciu macierzy \underline{M} z liczbą wierszy równą $(S+1)$ i liczbą kolumn równą liczbie niezerowych składowych wektora obciążenia.

Zmiana wartości składowej F_r wektora odniesienia w punktach i, j definiowana jest w formie równań

$$\begin{aligned} F_r^i &:= F_r^i - \Delta\lambda \bar{F}_r \\ F_r^j &:= F_r^j + \Delta\lambda \bar{F}_r, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:

$\Delta\lambda = \lambda / N$ – przyrost parametru obciążenia,

\overline{F}_r – składowa r wektora obciążenia

oraz $F_r^i = \lambda \overline{F}_r$ i $F_r^j = 0$ w czasie $t = t_0$, ze zmianą indeksów $i \rightarrow j$, $j \rightarrow k$ dla definicji zmian położenia siły z punktu j do punktu k .

3. Metoda wyznaczania parametru przystosowania

Wartość parametru przystosowania dla zadanego programu obciążenia znajdowana jest w dwu krokach. Pierwszy krok sprowadza się do wyznaczenia rozkładu wektora naprężeń resztkowych $\underline{\sigma}_r$ w konstrukcji dla realizowanego programu obciążenia. W tym punkcie konieczne jest również zapamiętanie bieżącej wartości granicy plastyczności σ_p^l w każdym punkcie Gaussa l , ze względu na wzmocnienie materiału sprężysto-plastycznego.

W kolejnym kroku, zakładając całkowicie sprężyste zachowania się konstrukcji, wyznaczany jest rozkład wektora naprężeń $\underline{\sigma}_e$ dla konstrukcji poddanej obciążeniu odniesienia (niekoniecznie temu samemu, dla którego wyznaczany był rozkład naprężeń resztkowych $\underline{\sigma}_r$). Następnie zakładając warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego w formie

$$\left(\underline{\sigma}^l\right)^T \cdot P \cdot \underline{\sigma}^l - \frac{2}{3} \cdot \left(\sigma_p^l\right)^2 = 0 \quad l=1, 2, \dots, L \quad (2)$$

z

$$\underline{\sigma}_l = \underline{\sigma}_r^l + \lambda \underline{\sigma}_e^l \quad l=1, 2, \dots, L \quad (3)$$

gdzie:

P – tzw. macierz projekcji,

L – całkowita liczba punktów Gaussa (punktów numerycznego całkowania)

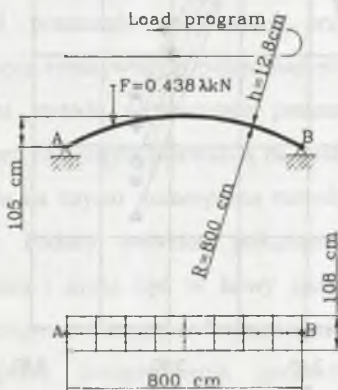
równanie (2) staje się kwadratowym równaniem ze względu na parametr obciążenia λ^l . Ostatecznie parametr przystosowania λ_{SH} szukany jest jako minimalna wartość spośród dodatnich wartości λ^l w całym obszarze konstrukcji

$$\lambda_{SH} = \min_l \left(\lambda^l \right) \quad (4)$$

4. Przykład wyznaczenia parametru przystosowania dla powłoki walcowej pod działaniem obciążenia ruchomego

W celu zademonstrowania metody wyznaczania parametru przystosowania dla rzeczywistej konstrukcji posłużono się przykładem powłoki walcowej. Wymiary konstrukcji, sposób dyskretyzacji i parametry materiału przedstawia rys. 2. Łuk został zdyskretyzowany 16 elementami skończonymi typu RSE-V [1,10]. Program obciążenia definiuje zadana liczba cykli przemieszczania się siły F wzdłuż drogi $A \rightarrow B \rightarrow A$, rys. 2.

Wartości wektora $\underline{\sigma}$ wyznaczone były dla tego samego programu obciążenia, jaki był realizowany dla wyznaczenia wektora $\underline{\sigma}$.

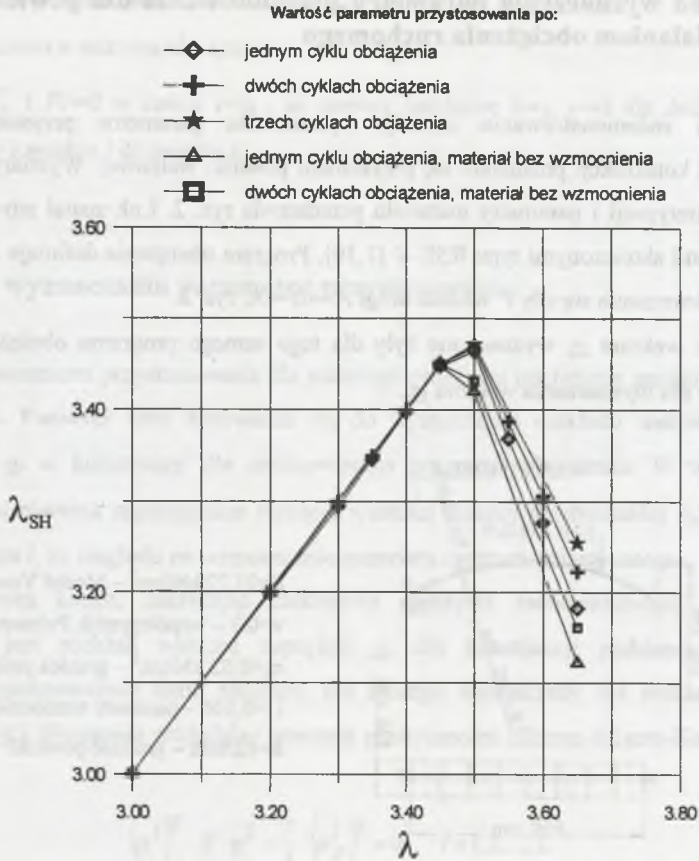


$E=21,22 \text{ kN/cm}^2$ – Moduł Younga
 $\nu=0.3$ – współczynnik Poissona
 $\sigma_p=0,02 \text{ kN/cm}^2$ – granica plastyczności
 $H=0,106$ – parametr wzmocnienia
 $h=12,8 \text{ cm}$ – grubość powłoki

Rys. 2. Powłoka walcowa pod działaniem obciążenia ruchomego

Fig. 2. Cylindrical panel under moving load

Wyniki analizy ilustruje rys. 3 i tabela 1. Na wykresie przedstawiona jest wartość parametru przystosowania λ_{SH} dla różnych wartości parametru obciążenia λ oraz dla różnej liczby cykli obciążenia (1, 2 lub 3). Można zauważyć, że po przekroczeniu wartości $\lambda \approx 3.45$ przyrost wartości λ_{SH} zaczyna maleć, po czym osiągnięta zostaje maksymalna wartość w punkcie $\lambda_{SH} \approx 3.46$. Następnie dla większych wartości λ wartość λ_{SH} gwałtownie spada, jednakże obserwuje się wyższe wartości λ_{SH} dla większej liczby cykli obciążenia. Szczegółowe wartości obliczeń zestawione zostały w tab. 1.



Rys. 3. Parametr przystosowania w funkcji parametru obciążenia

Fig. 3. Shakedown parameter vs. load parameter

Tabela 1

Wyniki obliczeń

λ	$\lambda_{SH} - 1$ cykl	$\lambda_{SH} - 2$ cykle	$\lambda_{SH} - 3$ cykle	$\lambda_{SH} - 1$ cykl, (materiał bez wzmocnienia)	$\lambda_{SH} - 2$ cykle, (materiał bez wzmocnienia)
2.5292	2.5292				
2.53				2.5302	
2.8	2.8007			2.8034	
3	3.0002	3.0002		3.0007	3.0007
3.2	3.1976	3.1999		3.1994	3.2009
3.3	3.2938	3.2991			
3.35	3.3453	3.3493			

cd. tabeli 1

3.4	3.3974	3.3996			
3.45	3.4474	3.4497	3.4497	3.4485	3.4502
3.5	3.4635	3.4676	3.4711	3.42	3.4315
3.55	3.3684	3.3871			
3.6	3.2758	3.3056			
3.65	3.1811	3.222	3.2539	3.1217	3.16

5. Wnioski

Artykuł prezentuje możliwości przystosowania konstrukcji powierzchniowych z wyznaczonym rzeczywistym polem naprężeń resztkowych. Metoda elementów skończonych plus prosta metoda wyznaczania parametru przystosowania dla konstrukcji poddanych obciążeniom ruchomym pozwalają na analizę złożonego zjawiska przystosowania. Jednakże ze względu na czysto numeryczną metodę analizy bardziej ogólne wnioski nie mogą być wysunięte. Podany przykład pokazuje, że proponowana metoda jest efektywna w zastosowaniu i może być w łatwy sposób rozszerzona na bardziej złożone konstrukcje powierzchniowe z różnymi rodzajami obciążeń. Następnym zadaniem autora jest rozszerzenie metody przez uwzględnienie geometrycznych nieliniowości i innych warunków plastyczności.

LITERATURA

1. Bielski, J., Radwańska M.: Computational problems of FE-analysis of elastic-plastic surface structures. *CAMES*, 8, 2001, pp. 17-44.
2. Cichoń, Cz., Ciba A.: Shakedown domains of pre-loaded frames. *Proc. Fifth Intern. Conf. Computational Plasticity*, Barcelona, Spain, 17-20 March, 1997, pp.1761-1766.
3. Cichoń, Cz. Waszczyszyn Z.: Shakedown of an elastic-plastic arch under moving load. *J. Struct. Mech.*, 3(3), 1974-1975, pp.283-300.
4. Davies J.M.:The response of plane framework to static and variable repeated loading in the elastic plastic range. *Struct. Engng.*, 44, 8, 1966, pp. 277-283.

5. Dayle G.: Shakedown of continuous bridges. Thesis presented to Washington University in partial fulfilment of the requirements for the Degree of Doctor of Science, June, 1969.
6. Jirasek M., Bažant Z.P.: Inelastic Analysis of Structures. John Willey & Sons, LTD, 2002.
7. König, J.A.: Theory of shakedown of elastic plastic structures. Arch. Mech., 18, 1966, pp.227+268.
8. Neal B. G.: Plastic collapse and shakedown theorems for structures of strain hardening material. J. Aero, Sci, 17, 1950, pp. 297-306.
9. Papkovich P.F.: Papers on the Slip Structural Mechanics. Izd. Sudostroyenye, Leningrad (in Russian), 1963.
10. Stąpór P., Cichoń Cz.: Safe loading domains of pre-loaded elasto-plastic plates. Proc. 15th Intern. Conf. Computer Methods in Mechanics, CMM-2003, Gliwice/Wisła, June 3-6, 2003, pp. 323-324.
11. Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: Stability of Structures by Finite Element Methods. Elsevier, 1994.
12. Życzkowski M.: Combined loading in the Theory of Plasticity. Polish-Scientific Publ.,1981.

Recenzent: Dr hab. inż. Maria Radwańska