

Włodzimierz WEROCHOWSKI*
Politechnika Gdańska

ANALITYCZNE METODY WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ KRYTYCZNYCH NIESTATECZNOŚCI DYSTORSYJNEJ KSZTAŁTOWNIKÓW GIĘTYCH NA ZIMNO OSIOWO ŚCISKANYCH

Streszczenie. W przekrojach cienkościennych pierwsza postać wyboczeniowa najczęściej związana jest z miejscową postacią utraty stateczności. Analiza stateczności kształtowników giętych na zimno z dodatkowymi usztywnieniami ścianek pokazuje, że w odniesieniu do pewnych cech przekroju pierwsza postać utraty stateczności pręta cienkościennego jest związana z postacią dystorsyjną. W niniejszym artykule opisano w skrócie istotę zjawiska niestateczności dystorsyjnej. Podano analityczne metody wyznaczania naprężeń krytycznych dla tej postaci wyboczeniowej oraz dokonano porównania tych metod dla różnych przekrojów ceowych z usztywnieniami. Położono szczególny nacisk na wskazanie przekrojów, dla których metoda normowa [9] daje zawyżone wartości.

ANALYTICAL METHODS FOR DETERMINATION OF CRITICAL STRESSES IN COLD FORMED STRUCTURES UNDER AXIAL COMPRESSION

Summary. The buckling analysis of cold formed structures demonstrates that the minimum buckling load can be connected with distortional mode. The phenomena of distortional buckling and analytical methods for finding the critical stresses of this mode are presented. The analytical method used in national standard [9] in some cases gives higher values of critical stresses of distortional buckling. In such cases other methods (Schafer's or Hancock's) should be additionally implemented.

1. Wstęp

Analiza stateczności kształtowników giętych na zimno pokazuje, że w odniesieniu do pewnych cech przekroju pierwsza postać utraty stateczności pręta cienkościennego jest związana z postacią dystorsyjną. Postać ta w przypadku przekrojów otwartych jest

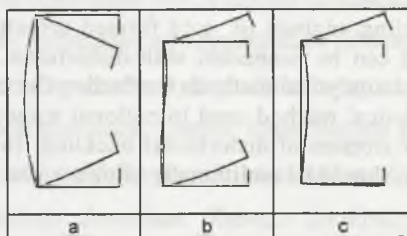
* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Czesław Szymczak

ściskanej jest wynikiem wyboczenia się usztywnienia (zagięcia). Fakt ten, że wyboczenie dystorsyjne może pojawić się przed wyboczeniem miejscowym ścianek kształtownika, spowodował konieczność dokładnego zbadania zjawiska oraz podania analitycznych metod, na których podstawie można wyznaczyć naprężenia krytyczne tej formy utraty stateczności.

Problem niestateczności dystorsyjnej jest ostatnio bardzo często podejmowany w pracach naukowych związanych z kształtownikami profilowanymi na zimno. Historyczny zarys badań nad dystorsyjną postacią wyboczeniową zaprezentował m.in. Schafer [1,2]. Równania opisujące to zjawisko zostały sformułowane przez Hancocka [3], Kesti i Daviesa [4] oraz Schafera [1,2]. Metody analizy niestateczności dystorsyjnej według wymienionych autorów są przedstawione w niniejszym artykule.

2. Niestateczność dystorsyjna

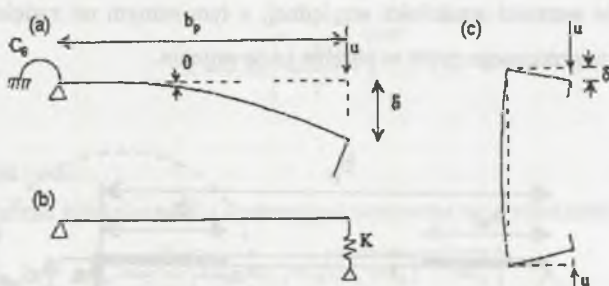
Niestateczność dystorsyjna ze względu na długość półfali wyboczeniowej jest „lokalną” postacią wyboczenia. Związana jest z wyboczeniem się usztywnienia przekroju, np. zagięcia, czego skutkiem jest przemieszczenie narożnika będącego punktem przecięcia się ścianki usztywnianej i usztywniającej. W przypadku ściskania osiowego najbardziej prawdopodobne postaci wyboczenia dystorsyjnego przedstawiono na rys. 1a,b. W przypadku czystego zginania względem poziomej osi głównej postać wyboczenia przedstawiono na rys. 1c. Obrótowi ulegają obie półki, z tym że obrót półki ściskanej jest dominujący.



Rys. 1. Dystorsyjne postacie wyboczeniowe: a,b) osiowe ściskanie, c) czyste zginanie
Fig. 1. Distortional buckling modes: a,b) axial compression, c) pure bending

3. Niestateczność dystorsyjna wg PN-B-03207 [9]

Naprężenia krytyczne niestateczności dystorsyjnej wg normy [9] przy istnieniu usztywnień brzegowych oblicza się stosując model pręta osiowo ściskanego na sprężystym podłożu. Model oraz sposób wyznaczania charakterystyki sprężystego podparcia został przedstawiony na rys.2. Charakterystyka sprężystego podparcia zależy od warunków brzegowych oraz sztywności przylegających do siebie ścianek przekroju (np. średnika i półki).



Rys. 2. Wyznaczanie sztywności podparcia K według [9,10]
 Fig. 2. Determination of the spring stiffness K according to [9,10]

Wartość sprężystego podparcia w układzie zastępczym wyznacza się ze wzoru

$$K = u / \delta \tag{1}$$

gdzie:

δ – ugięcie usztywnienia spowodowane przez obciążenie u .

Naprężenia krytyczne w przypadku ściskanego osiowo pręta na sprężystym podłożu zostały opisane przez Timoshenko i Gere [6] za pomocą wzoru:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI_s}{A_s \lambda^2} + \frac{1}{A_s \pi^2} K \lambda^2 \tag{2}$$

gdzie:

$\lambda = L / m$ – długość półfali wyboczeniowej, gdzie m liczba półfal wyboczeniowych na długości L pręta,

A_s – współpracujące pole przekroju w obrębie usztywnienia; zaczerpiony obszar w okręgu na rys. 3 (wg poz. 5 norma [9]),

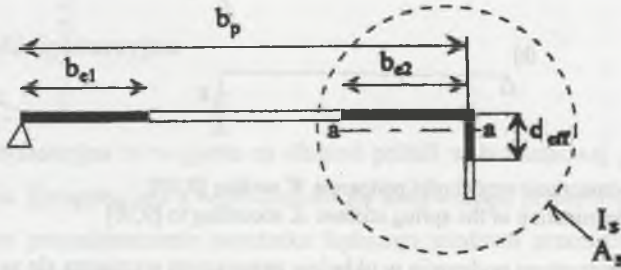
I_s – moment bezwładności współpracującego pola przekroju względem osi a - a przechodzącej przez środek ciężkości tego przekroju - rys. 3,

E – moduł Younga.

W przypadku nieskończonego długiego pręta zależność (2) przyjmuje postać:

$$\sigma_{cr} = \frac{2\sqrt{KEI_s}}{A_s} \quad (3)$$

Przedstawiona metoda daje w pewnym zakresie geometrii kształtowników giętych rozwiązanie zbliżone do rozwiązań otrzymanych metodą ścisłą. Dla pewnej klasy przekrojów naprężenia wyznaczone tą metodą mogą być większe od rzeczywistych naprężeń krytycznych. Zawyżone wartości naprężeń krytycznych wybočenja dystorsyjnego wpływają na zmniejszenie wartości smukłości względnej, a tym samym na zwiększenie efektywnego pola przekroju poprzecznego pręta w obrębie usztywnienia.



Rys. 3. Przekrój zastępczy usztywnienia brzegowego
Fig. 3. Effective cross-sectional area of an edge stiffener

4. Niestateczność dystorsyjna wg Laua i Hancocka (L/H)

Naprężenia krytyczne niestateczności dystorsyjnej można wyznaczyć również metodą zaproponowaną przez Laua i Hancocka [3]. Jej idea polega na wyznaczeniu naprężeń krytycznych wybočenja giętno-skrętnego półki podpartej jak na rys. 4.

Według metody L/H dystorsyjna utrata stateczności, poza skrupowanym obrotem półki, wiąże się również z poziomym, nieskrupowanym przesuwem stopek, w związku z czym przyjęto sztywność podparcia poziomego $k_x=0$. Sztywność podparcia sprężystego na obrót, zapewniona przez środknik, wyznacza się ze wzoru:

$$k_\varphi = \frac{Et^3}{5,46(b_w + 0,06\lambda)} \left[1 - \frac{1,1\sigma'_{cr}}{Et^3} \left(\frac{b_w^2\lambda}{b_w^2 + \lambda^2} \right)^2 \right] \quad (4)$$

gdzie:

σ_{cr} – naprężenie ściskające w środku wyznaczone z zależności (6) przy

przyjęciu $k_{\phi} = 0$,

b_w – wysokość środka,

t – grubość ścianek przekroju,

E – moduł Younga,

λ – długość półfali wybozczeniowej, którą wyznacza się z zależności:

$$\lambda = 4,80 \left(\frac{I_{xf} b_f^2 b_w}{I^3} \right)^{0,25} \quad (5)$$

gdzie:

b_f – szerokość półki.

Naprężenie krytyczne niestateczności dystorsyjnej wyznacza się z zależności:

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{2A_f} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) - \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_3} \right] \quad (6)$$

gdzie:

A_f – pole powierzchni przekroju półki z usztywnieniem (rys. 4),

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – współczynniki wyznaczone na podstawie wzorów:

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{\beta_1} (I_{xf} b_f^2 + 0,039 J_f \lambda^2) + \frac{k_{\phi}}{\beta_1 \eta E} \quad (7)$$

$$\alpha_2 = \eta \left(I_{yf} + \frac{2}{\beta_1} h_y b_f I_{xyf} \right) \quad (8)$$

$$\alpha_3 = \eta \left(\alpha_1 I_{yf} - \frac{\eta}{\beta_1} I_{xyf}^2 b_f^2 \right) \quad (9)$$

$$\beta_1 = h_x^2 + \left(\frac{I_{yf} + I_{xf}}{A_f} \right) \quad (10)$$

$$\eta = (\pi / \lambda)^2 \quad (11)$$

gdzie:

I_{xf}, I_{yf} – momenty bezwładności przekroju (rys. 4) względem osi x, y,

I_{xy} – dewiacyjny moment bezwładności przekroju (rys. 4) względem osi x, y ,

J_f – biegunowy moment bezwładności przekroju (rys. 4).

Na podstawie tych wzorów można wyznaczyć naprężenia krytyczne niestateczności dystorsyjnej. Wyznaczenie wartości naprężeń krytycznych według tej metody jest procesem iteracyjnym. Polega on na tym, iż w pierwszej kolejności wyznaczamy σ_{cr}^* , a następnie wartość k_ϕ , na której podstawie określa się σ_{cr} . Rozwiązanie na podstawie przedstawionego modelu daje wyniki poprawne przy dodatnich wartościach k_ϕ . Przy ujemnych wartościach k_ϕ naprężenia krytyczne σ_{cr} oblicza się ze wzoru (6), przyjmując $k_\phi = 0$.

Davies i Young w [7] zaproponowali poprawkę do powyższej metody w przypadku $k_\phi < 0$. W pierwszej kolejności należy wyznaczyć naprężenia krytyczne przy $k_\phi < 0$, czyli σ_{cr}^* . Dodatkowo należy określić naprężenia krytyczne wybočenja środnika wg wzoru

$$\sigma_w = \frac{\pi^2 D}{tb_w^4} \left(\frac{b_w^2 + \lambda^2}{\lambda} \right)^2 \quad (12)$$

gdzie:

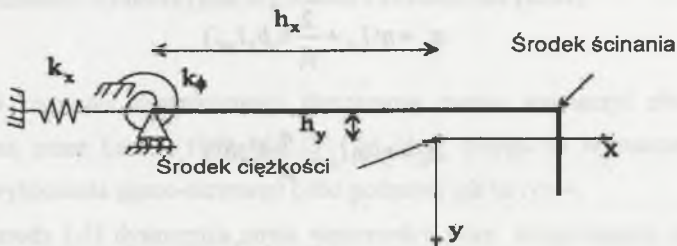
D – sztywność płytowa według [6].

Naprężenia krytyczne niestateczności dystorsyjnej należy wyznaczyć jako średnią wartość naprężeń krytycznych półki oraz środnika

$$\sigma_{cr} = \frac{2\sigma_{cr}^* A_f + \sigma_w t b_w}{A} \quad (13)$$

gdzie:

A – całkowite pole powierzchni przekroju giętego.



Rys. 4. Model Laua i Hancocka do wyznaczania naprężeń krytycznych niestateczności dystorsyjnej

Fig. 4. Lau and Hancock's model for distortional buckling

5. Niestateczność dystorsyjna wg Schafera [1,2]

Określenie naprężeń krytycznych według tej metody, podobnie jak w metodzie L/H, polega na wyznaczeniu zależności między naprężeniami krytycznymi a sztywnością podpory na obrót w miejscu styku środka z usztywnioną stopką. Według tej metody sztywność obrotowa podpory k_ϕ może być wyrażona przez sumę sprężystej sztywności półki i środka ($k_{\phi fe}, k_{\phi we}$) oraz geometrycznej sztywności półki i środka ($k_{\phi fg}, k_{\phi wg}$)

$$k_\phi = (k_{\phi fe} + k_{\phi we}) - (k_{\phi fg} + k_{\phi wg}) \tag{14}$$

W związku ze skomplikowaną postacią zależności sztywności geometrycznej półki i środka od stanu naprężenia przeprowadzono linearyzację tego związku. Wprowadzono współczynnik f_{crd} oraz zastępcze sztywności geometryczne półki $\bar{k}_{\phi fg}$ i środka $\bar{k}_{\phi wg}$. Zależność (14) przyjmuje wtedy postać:

$$k_\phi = k_{\phi fe} + k_{\phi we} - f_{crd}(\bar{k}_{\phi fg} + \bar{k}_{\phi wg}) \tag{15}$$

Wykorzystując to, że wyoboczenie wystąpi, gdy sztywność na skręcanie (15) maleje do zera, można obliczyć naprężenia krytyczne σ_{cr} niestateczności dystorsyjnej z zależności:

$$\sigma_{cr} = \frac{k_{\phi fe} + k_{\phi we}}{k_{\phi fg} + k_{\phi wg}} \tag{16}$$

Wzory określające $k_{\phi fe}, k_{\phi we}, \bar{k}_{\phi wg}, \bar{k}_{\phi fg}$ można przedstawić w postaci:

$$k_{\phi fe} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^4 \left(EI_{xf} (x_o - h_x)^2 - E \frac{I_{yf}^2}{I_{xf}} (x_o - h_x)^2 \right) + \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 GJ_f \tag{17}$$

$$\bar{k}_{\phi fg} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \left[A_f \left((x_o - h_x)^2 \left(\frac{I_{yf}}{I_{xf}} \right) - 2y_o (x_o - h_x) \left(\frac{I_{yf}}{I_{xf}} \right) + h_x^2 + y_o^2 \right) + I_{xf} + I_{yf} \right] \tag{18}$$

$$k_{\phi we} = \frac{Et^3}{6h_w(1-\nu^2)} \tag{19}$$

$$\bar{k}_{\phi wg} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{th_w^3}{60} \tag{20}$$

gdzie długość półfali wyoboczeniowej wyznacza się z zależności

$$\lambda = \left\{ \frac{6\pi^4 h_w (1-\nu^2)}{t^3} \left[I_{xf} (x_o - h_x)^2 - \frac{I_{yf}^2}{I_{xf}} (x_o - h_x)^2 \right] \right\}^{0,25} \tag{21}$$

gdzie:

ν – współczynnik Poissona,

h_w – wysokość środka,

$$x_0 = b_f - h_x,$$

$$y_0 = h_y.$$

Pozostałe oznaczenia są takie same jak w modelu Hancocka.

6. Niestateczność dystorsyjna wg Schafera [1,2]

W celu zobrazowania przydatności poszczególnych metod wykonano przykład numeryczny dotyczący pręta osiowo ściskanego o przekroju ceowym z zagięciami, o grubości ścianek 1,5 mm i zmiennych parametrach $b_w - b_f - d$ (kolumna 1 w tabl. 1). Przyjęto stal S280GD (najczęściej stosowana przez wytwórców kształtowników profilowanych na zimno; Florprofile, BalexMetal, Sadef). W przykładzie tym, przy różnych wymiarach przekroju poprzecznego, wyznaczono σ_{cr} trzema metodami (kolumny 2-4). W tabelicy 1 przedstawiono porównanie metody normowej PN-B-03207 z metodą Schafera oraz metodą Hancocka.

Tablica 1

Przykład numeryczny wyznaczenia σ_{cr} trzema różnymi metodami

t=1,5mm $b_w - b_f - d$	Schafer [MPa]	PN-B-3207 [MPa]	Hancock [MPa]	PN/Schafer [-]	PN/Hancock [-]
200-75-20	160,35	181,94	165,28	1,13	1,10
200-75-15	123,95	141,51	129,61	1,14	1,09
200-50-20	170,56	285,32	183,11	1,67	1,56
200-50-15	131,92	241,63	171,07	1,83	1,41
200-50-10	90,11	158,12	147,09	1,75	1,07
100-50-20	459,86	379,31	419,48	0,82	0,90
100-50-15	386,32	321,24	372,12	0,83	0,86
100-50-10	285,21	210,19	286,72	0,74	0,73

Na podstawie podanego przykładu można zauważyć, że metoda normowa przy bardzo smukłych środnikach i stosunkowo małych szerokościach stopek daje mocno zawyżone wartości naprężeń krytycznych. W przypadku ceownika 200-50-15 naprężenia te są 1,8 razy większe od uzyskanych metodą Schafera. Zostało to potwierdzone w pracy Kesti i Daviesa [4] oraz przez porównanie (tabl. 1). Zawyżone wartości naprężeń krytycznych wyboczenia dystorsyjnego wpływają na zmniejszenie wartości smukłości względnej, a tym samym na zwiększenie wartości zastępczego pola przekroju. W przypadku ściskania zwiększenie zastępczego pola przekroju wiąże się z zawyżoną wartością nośności przekroju. Wartość ta jest równa nośności zawyżonego pola przekroju. W przypadku przekrojów ceowych o stosunkowo szerokich stopkach metoda normowa daje zbliżone wartości naprężeń

krytycznych. W analizowanym przykładzie numerycznym stwierdzono, iż metoda Hancocka oraz Schafera nie zależy od gatunku stali. Natomiast w metodzie normowej gatunek stali może mieć wpływ na charakterystykę geometryczną przekroju zastępczego, a przez to na wartość naprężeń krytycznych - zależność (3).

7. Wnioski

W artykule opisano dystorsyjną postać utraty stateczności. Zwrócono uwagę na możliwość wystąpienia niekorzystnego zjawiska, w którym naprężenia krytyczne niestateczności dystorsyjnej przyjmują wartości mniejsze niż w przypadku wyboczenia miejscowego. Przedstawiono możliwe formy utraty stateczności w przypadku niestateczności dystorsyjnej. Podano analityczne metody wyznaczania naprężeń krytycznych niestateczności dystorsyjnej. W celu zobrazowania przydatności przedstawionych metod wykonano przykład numeryczny.

Analizowana postać wyboczeniowa zależy od wielu czynników. Przedstawione metody wyznaczania naprężeń krytycznych mogą służyć do wyznaczania tych naprężeń w przekrojach stosowanych obecnie w konstrukcjach. Normowa metoda wyznaczania naprężeń krytycznych daje w pewnych przypadkach znacznie zawyżone wartości naprężeń. Dzieje się tak przy bardzo smukłych średnicach i stosunkowo małych szerokościach stopek. Ze względu na ten fakt zaleca się sprawdzenie wartości naprężenia krytycznego wyznaczonego metodą normową wg jednej z alternatywnych do niej metod (Schafera lub Hancocka).

Z przytoczonych rozwiązań i analiz wynika, iż dla pewnych klas przekrojów obliczenia prowadzone metodą normową prowadzą do przeszacowania nośności przekroju z usztywnieniami.

LITERATURA

1. Schafer B.W.: Distortional buckling of cold-formed steel columns. Final report of AISI 2000.
2. Schafer B.W., Pekoz T.: Laterally braced cold-formed steel flexural members with edge stiffened flanges. J. of Structural Engineering 125, 1999.

3. Hancock G.J.: Design for Distortional Buckling of Flexural Members. Thin-Walled Structures 27, 1996.
4. Kesti J., Davies J.M.: Local and distortional buckling of thin-walled short columns. Thin-Walled Structures 34, 1999.
5. Rzeszut K.: Analiza oraz optymalne projektowanie cienkościennych konstrukcji metalowych z uwzględnieniem imperfekcji. Praca doktorska Politechnika Poznańska, 2002.
6. Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
7. Davies J.M., Jiang C.: Design of thin walled columns for distortion buckling. Proc. Of the Second Int. Conference on Coupled Instability in Metal Structures CIMS'96, Liege (Belgium)1996.
8. Bogucki W., Żybartowicz M.: Tablice do projektowania konstrukcji metalowych. Arkady, Warszawa 1996.
9. PN-B-03207:2002 Konstrukcje stalowe. Konstrukcje z kształtowników i blach profilowanych na zimno. Projektowanie i wykonanie.
10. ENV 1993-1-3:1996 Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-3: General rules – Supplementary rules for cold formed thin gauge members and sheeting.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Stefan Piechnik