ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2004
Seria: BUDOWNICTWO z. 102 Nr kol. 1644

Wojciech WITKOWSKI*
Politechnika Gdańska

OCENA EFEKTYWNOŚCI 4-WĘZŁOWYCH ELEMENTÓW POWŁOKOWYCH

Streszczenie. W ramach nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok wprowadzono rodzinę 4-węzłowych elementów skończonych klasy C^0. W pracy analizuje się wrażliwość tychże elementów na zjawisko blokady/zakleszczenia (*ang. locking effect*). Rozważania ograniczone są do liniowej statyki. Formułuje się zasadę prac wirtualnych i zasadę wariacyjną Hu–Washizu, z których wynikają postaci macierzy elementowych. Następnie w przykładach analizuje się występowanie zjawiska blokady w kontekście gęstości podziału i dystorsji siatki.

EVALUATION OF 4-NODE SHELL ELEMENTS

Summary. Within the framework of nonlinear 6-parameter shell theory a family of finite elements is developed. These elements are studied in the context of locking phenomena. Considerations are confined to linear analysis. The element matrices are constructed by using the principle of virtual work and Hu–Washizu functional. Then, in examples the locking phenomena are studied in examples in the context of mesh density and distorsions.

1. Zjawisko blokady w metodzie elementów skończonych

Zjawisko blokady/zakleszczenia (*ang. locking effect*) jest znane od początku metody elementów skończonych (MES). Objawia się ono jako rażąco duży błąd w otrzymanych wynikach, który jest niewrażliwy na zagęszczanie siatki podziału. W powłokach cienkich bardzo małe odkształcenia membranowe lub bardzo małe poprzeczne odkształcenia postaciowe powodują, że energia membranowa lub energia od poprzecznego ścinania tak dominuje w wyrażeniu na całkowitą energię sprężystą, że wręcz usuwa w cień (*blokuje*, *zakleszcza*) decydującą właśnie o rozwiązaniu energię sprężystą od zginania. Aby zaradzić temu efektowi, zaproponowano dotychczas szereg technik, takich jak: technika jednolicie/selektywnie zredukowanego całkowania (*ang. Uniform/Selective Reduced Integration*), technika założonych

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jacek Chróścielewski, prof. Pol. Gdańskiej

odkształceń/naprężeń (*ang. Assumed Strain/Stress Method*), sformułowania mieszane (*ang. mixed formulations*) czy wzbogacone (*ang. enhanced formulations*). W pracy porównuje się trzy 4-węzłowe powłokowe elementy skończone. Są to: standardowy przemieszczeniowy element CAMe4, element ANS (*ang. Assumed Natural Strain*) o założonym polu odkształceń wg koncepcji Dvorkin i Bathe [1] oraz element EAS (*ang. Enhanced Assumed Strain*) o wzbogaconym polu odkształceń wg pracy Simo i Rifai [2].

Technika ANS, opracowana oryginalnie dla odkształceń poprzecznych od ścinania, zakłada, iż odkształcenia obliczane są najpierw w pewnych określonych punktach tzw. pomiarowych (*ang. sample points*), a następnie interpolowane do punktów całkowania. Metoda ta nie wprowadza dodatkowych stopni swobody. Jest solidnym narzędziem szeroko udokumentowanym w literaturze.

Koncepcja wzbogacania odkształceń (EAS) bazuje na dodaniu do standardowych (zgodnych) odkształceń pewnych pól określonych tylko wewnątrz elementu skończonego. Wprowadza ona jednak, na poziomie elementu, dodatkowe wielkości podlegające procesowi kondensacji statycznej.

Celem referatu jest zbadanie zachowania wspomnianych elementów w pewnych testach na występowanie zjawiska blokady w cienkich powłokach sprężystych. Elementy przemieszczeniowe CAMe4 i ANS zostały opracowane w pracy [3], a element EAS jest rozwijany przez autora w ramach pracy doktorskiej.

2. Zarys statyki powłok i implementacji MES

Podstawy teoretyczne rozważanej teorii powłok można odnaleźć np. w pracy [4], [5], a sformułowanie numeryczne zostało omówione m. in. w pracach [3], [5]. Pole przemieszczeń w obszarze powłoki opisane jest przez $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{x}$. Tutaj $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},t)$ jest wektorem wodzącym zdeformowanej powierzchni podstawowej powłoki $M(t)$, a $\boldsymbol{x}$ jego położeniem początkowym $M\equiv M(0)$ traktowanym tu jako konfiguracja odniesienia. Tensor $\boldsymbol{Q}$ opisuje ruch wektorów kierunkowych (najeżenia) $\boldsymbol{t}_i(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{t}_i^0(\boldsymbol{x})$ od konfiguracji początkowej $\{\boldsymbol{t}_i^0(\boldsymbol{x})\}$ do aktualnej $\{\boldsymbol{t}_i(\boldsymbol{x},t)\}$ powierzchni podstawowej powłoki. Reprezentuje on pewien uśredniony wzdłuż włókna (grubości) powłoki obrót. Na wielkości przemieszczeń i obrotów, poza warunkiem odwracalności, nie nakłada się żadnych ograniczeń. W rozważanych w pracy powłokach postuluje się istnienie funkcji gęstości energii odkształcenia $W(\varepsilon_\beta,\kappa_\beta;\boldsymbol{x})$,

$\beta = 1,2$, mierzonej na jednostkę powierzchni M. Zakłada się, że W jest analityczną funkcją uogólnionych odkształceń powłoki zdefiniowanych przez: $\varepsilon_\beta = y_{,\beta} - Qx_{,\beta}$, $\kappa_\beta = \mathrm{ad}^{-1}(Q_{,\beta} Q^{\mathrm{T}})$. Tutaj $(.)_{,\beta} = \partial(.)/\partial\xi^\beta$ oznacza pochodną cząstkową względem dowolnie wybranego układu współrzędnych $\{\xi^\beta, \beta = 1,2\}$ parametryzujących lokalnie M. Poprzez ad(...) oznaczono odwzorowanie, takie że dla dowolnego wektora $z \in E$ i tensora $Z \in so(3)$ jest $z \to Z = \mathrm{ad}(z)$, gdzie z jest wektorem osiowym Z, tzn. $Z\mathrm{v} = z \times \mathrm{v}$ dla każdego $\mathrm{v} \in E$. Relacje konstytutywne tak pojętej powłoki hipersprężystej mają postać: $n^\beta = \partial W/\partial\varepsilon_\beta$, $m^\beta = \partial W/\partial\kappa_\beta$. Tutaj $n^\beta(x,t)$ i $m^\beta(x,t)$ są odpowiednio wektorami przekrojowych (wewnętrznych) sił i momentów. Brzeg ∂M powierzchni podstawowej M jest sumą $\partial M = \partial M_d \cup \partial M_f$ części o określonych odpowiednio przemieszczeniowych ∂M_d i naprężeniowych warunkach brzegowych ∂M_f. Uwzględniając powyższe pojęcia, zapisuje się słabą postać problemu brzegowego jako

$$G[\mathbb{u};\mathbb{w}] = \iint_M [n^\beta \bullet (v_{,\beta} + y_{,\beta} \times w) + m^\beta \bullet w_{,\beta}]\,\mathrm{d}a - \iint_M (f \bullet v + c \bullet w)\,\mathrm{d}a - \int_{\partial M_f} (n^* \bullet v + m^* \bullet w)\,\mathrm{d}s = 0 \tag{1}$$

gdzie $v(x)$ i $w(x)$ są dowolnymi, kinematycznie dopuszczalnymi polami wirtualnych przemieszczeń, ($v(x) = w(x) = 0$ na ∂M_d), a $f(x)$ i $c(x)$ wektorami wypadkowych obciążeń zewnętrznych w postaci sił i momentów powierzchniowych. Rozwiązanie równania (1) przebiega na drodze iteracyjnej. Występowanie tensora obrotu Q stanowi o trudności zagadnienia, gdyż przestrzeń konfiguracyjna rozwiązań nie posiada struktury przestrzeni liniowej. Wymaga to niestandardowej aproksymacji na grupie obrotów, linearyzacji równań, prowadzenia procesu iteracyjnego, parametryzacji i uaktualnienia zmiennych obrotowych. Techniki te omawia się szczegółowo, np. w monografii [5].

Dla wygody wprowadza się zapis macierzowo-operatorowy. Występujące w (1) wirtualne przemieszczenia $\mathbb{w} = (v, w)$, powierzchniowe obciążenia $\mathbb{p} = (f, c)$, obciążenia brzegowe $\mathbb{s}^* = (n^*, m^*)$ oraz miary odkształceń $(\varepsilon_\beta, \kappa_\beta)$ i naprężeń (n^β, m^β) zapisuje się jako macierze jednokolumnowe

$$\mathbb{w} = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{p} = \begin{Bmatrix} f \\ c \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{s}^* = \begin{Bmatrix} n^* \\ m^* \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{s} = \begin{Bmatrix} n^1 \\ n^2 \\ m^1 \\ m^2 \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Wirtualne związki kinematyczne przyjmują postać

$$\delta\varepsilon(\mathbb{u}) = \mathbb{B}\mathbb{w} = \begin{bmatrix} 1(.)_{,1} & (t_1+\varepsilon_1)\times(.) \\ 1(.)_{,2} & (t_2+\varepsilon_2)\times(.) \\ 0 & 1(.)_{,1} \\ 0 & 1(.)_{,2} \end{bmatrix} \mathbb{w}. \tag{3}$$

W zapisie tym dla powłok sprężystych, przy relacji kinematycznej $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbb{u})$ i równaniu konstytutywnym $\mathbb{s} = \hat{\mathbb{s}}(\varepsilon)$, zasada przemieszczeń wirtualnych brzmi

$$G_i[\mathbb{u};\mathbb{w}] = G_e[\mathbb{u};\mathbb{w}], \quad \forall \mathbb{w} = (v, w) \quad \text{kinematycznie dopuszczalnych}. \tag{4a}$$

gdzie

$$G_i[\mathbb{u};\mathbb{w}] = \left(\iint_M (\mathbb{B}(\mathbb{u})\mathbb{w})^T \hat{\mathbb{s}}(\varepsilon)\, da \right), \qquad G_e[\mathbb{u};\mathbb{w}] = \left(\iint_M \mathbb{w}^T \mathbb{p}\, da + \int_{\partial M_f} \mathbb{w}^T \mathbb{s}^* dl \right) \tag{4b}$$

Funkcjonał (4b) stanowi bazę dla przemieszczeniowych elementów skończonych CAMe4 oraz punkt wyjścia przy formułowaniu elementów o założonych odkształceniach (ANS) opracowanych w pracy [3].

Elementy EAS [2] biorą za punkt wyjścia zasadę wariacyjną Hu–Washizu. Zakładając potencjalność obciążenia $\delta V[\mathbb{u};\mathbb{w}] = -G_e[\mathbb{u};\mathbb{w}]$, istnienie powierzchniowej funkcji energii odkształcenia $\Phi(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon_\beta, \kappa_\beta)$ i relacji kinematycznej $\varepsilon = \bar{\varepsilon}(\mathbb{u})$, wariacja zasady Hu–Washizu przybiera postać

$$\delta W[\mathbb{u},\varepsilon,\mathbb{s};\mathbb{w},\delta\varepsilon,\delta\mathbb{s}] = \iint_M \left((\mathbb{B}\mathbb{w})^T \mathbb{s} + \delta\mathbb{s}^T(\bar{\varepsilon}(\mathbb{u}) - \varepsilon) + \delta\varepsilon^T(\partial_\varepsilon \Phi - \mathbb{s}) \right) da + \delta V[\mathbb{u};\mathbb{w}], \tag{5}$$

U podstaw sformułowania EAS leży równanie $\varepsilon = \bar{\varepsilon}(\mathbb{u}) + \hat{\varepsilon}$, gdzie $\bar{\varepsilon}(\mathbb{u})$ jest wektorem zgodnych odkształceń, a $\hat{\varepsilon}$ - wektorem odkształceń dodatkowych (wzbogacających). Stąd można zapisać $\bar{\varepsilon} - \varepsilon = -\hat{\varepsilon}$, co z kolei daje

$$\delta W[\mathbb{u},\hat{\varepsilon},\mathbb{s};\mathbb{w},\delta\hat{\varepsilon},\delta\mathbb{s}] = \iint_M \left((\mathbb{B}\mathbb{w})^T \partial_\varepsilon \Phi + (\delta\hat{\varepsilon})^T(\partial_\varepsilon \Phi - \mathbb{s}) - \delta\mathbb{s}^T \hat{\varepsilon} \right) da + \delta V[\mathbb{u};\mathbb{w}], \tag{6}$$

Fizyczne składowe (odniesione do bazy ortonormalnej) dodatkowych pól odkształceń oblicza się na poziomie elementu wg $\hat{\varepsilon}(\xi) = \mathbb{P}(\xi)\beta_{(e)}$. Wybór swobodnych parametrów elementowych $\beta_{(e)}$ oraz macierzy interpolacyjnej $\mathbb{P}(\xi)$ decyduje o skuteczności omawianego podejścia. Funkcje wchodzące do macierzy $\mathbb{P}$ są definiowane we współrzędnych izoparametrycznych $\xi = (r,s)$. Następnie przenosi się je do przestrzeni fizycznej, stosując regułę transformacji w przód (*ang. push–forward*), gdzie rolę gradientu deformacji pełni jakobian przekształcenia izoparametrycznego. W toku przekształceń otrzymuje się wzór $\mathbb{P}(\xi) = j_0 j^{-1}\, \mathbb{T}^{-T}\big|_{(r,s)=(0,0)}\, \bar{\bar{\mathbb{E}}}$. Tutaj j_0 jest wyznacznikiem jakobianu obliczanym w środku ele-

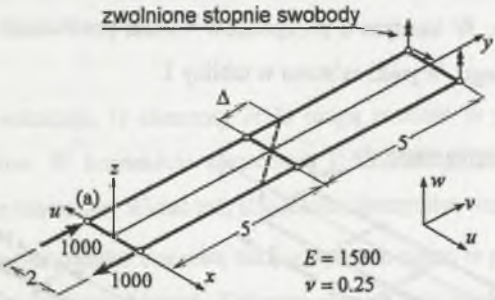
mentu $(r = s = 0)$, j zaś jest wyznacznikiem jakobianu w punktach całkowania. Postać macierzy $\mathbb{T}$ zależy od liczby składowych odkształcenia, a $\tilde{\mathbb{E}}$ oznacza macierz funkcji interpolacyjnych pola wzbogaconych odkształceń $\hat{\varepsilon}$ we współrzędnych izoparametrycznych $(r = s)$. Od $\tilde{\mathbb{E}}$ żąda się, by spełniała warunek $\int_{\Omega} \tilde{\mathbb{E}}(\xi)\, d\xi = \mathbf{0}$. Idąc za pracą [6], wzbogaca się tylko odkształcenia poprzeczne i membranowe, pozostawiając niezmienione odkształcenia zgięciowe. Definiując następujące funkcje: $f \equiv f(r,s) = 2r(s^2 - 1)$, $g \equiv g(r,s) = 2s(r^2 - 1)$, wprowadzono dwa elementy. Elementy te oznacza się: EAS(10) i EAS(14), ich macierze $\tilde{\mathbb{E}}$ dane są odpowiednio

$$\underset{6\times 10}{\tilde{\mathbb{E}}(10)} = \begin{bmatrix} r & & & & & \\ & s & & & 0 & \\ & & r & & & \\ & & & s & & \\ 0 & & & f\ g & fg & \\ & & & & g\ f & fg \end{bmatrix}, \quad \underset{6\times 14}{\tilde{\mathbb{E}}(14)} = \begin{bmatrix} r & rs & & & & & & \\ & s & rs & & & 0 & & \\ & & r & rs & & & & \\ & & & s & rs & & & \\ 0 & & & & f\ g & fg & & \\ & & & & & g\ f & fg & \end{bmatrix} \tag{7}$$

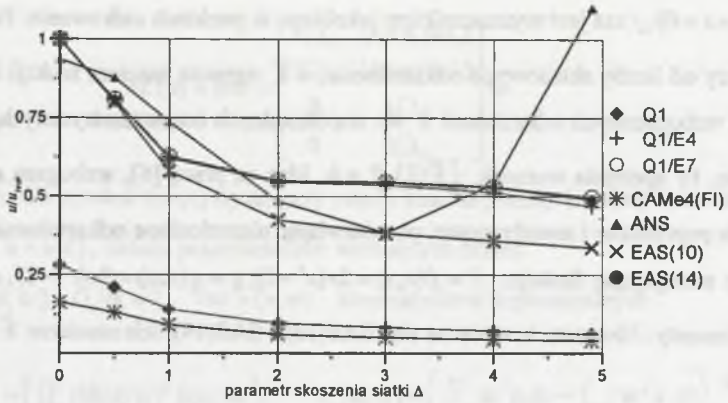
3. Testy

3.1. Test membranowy

W zadaniu pierwszym ocenia się elementy pod kątem wrażliwości na dystorsje siatki podziału w PSN (rys. 1). W rozwiązaniu śledzi się przemieszczenie u punktu (a). Przykład ten podjęto między innymi w pracach [2] i [7]. Dodatkowo podaje się rozwiązania z własnych elementów PSN: Q1 – standardowy biliniowy element izoparametryczny, Q1/E4 i Q1/E7 – jak Q1 z odpowiednio 4 i 7 parametrami wzbogacającymi wg [7].



Rys. 1. Test membranowy – dane zadania, jednostki {N, m}
Fig. 1. Membrane test – problem statement, units {N, m}

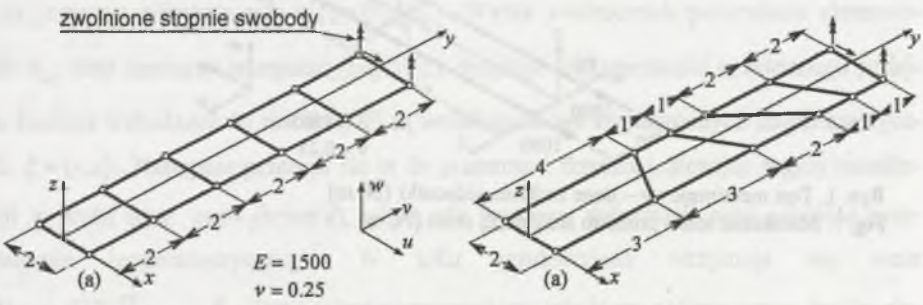


Rys. 2. Test membranowy – wyniki
Fig. 2. Membrane test – results

Z rys. 2 wynika, że standardowe przemieszczeniowe elementy Q1 i CAMe4 są zablokowane. Powłokowy element ANS, do skoszenia $\Delta = 4$ (patrz rys. 1), daje dobre wyniki, „wybuchając" dalej, co może być wynikiem założeń obliczania odkształceń w metodzie ANS. Na tle powyższych, elementy EAS dają bardzo dobre rezultaty – w szczególności należy podkreślić monotoniczność, jak i dokładne rozwiązanie dla $\Delta = 0$. Warto zauważyć, iż EAS(14) daje lepsze wyniki niż EAS(10).

3.2. Test membranowy i płytowy

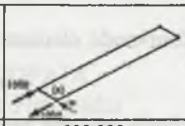
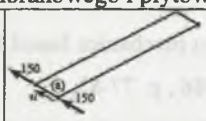
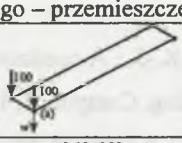
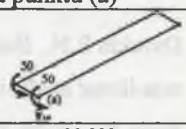
W kolejnym zadaniu (rys. 3) bada się także wrażliwość rozwiązań na dystorsje siatki. W PSN bada się dwa przypadki obciążenia (za pracą [8]), a w stanie płytowym proponuje się dwa własne warianty. W każdym z przypadków wyniki porównane są z rozwiązaniami wg teorii belek Bernoulliego. Wyniki zebrano w tablicy 1.



Rys. 3. Test membranowy + płytowy – dane zadania, jednostki {N, m}
Fig. 3. Membrane + bending test – problem statement, units {N, m}

Tablica 1

Wyniki dla testu membranowego i płytowego – przemieszczenia punktu (a)

				
Teoria belek	**100.000**	**102.600**	**268.660**	**20.000**
		SIATKA REGULARNA		
CAMe4 (FI)	55.661	58.593	101.480	7.566
CAMe4 (URI)	100000**	99001**	262.670**	20.000**
ANS	93.662	95.393	262.06	19.818
EAS(10)	99.900	101.56	262.06	19.818
EAS(14)	99.900	101.57	262.06	19.818
		SIATKA NIEREGULARNA		
CAMe4 (FI)	40.583	46.433	105.06	7.105
CAMe4 (URI)	103000**	99751**	267.67**	20.600
ANS	92.799	94.355	260.39	19.836
EAS(10)	84.600	87.236	264.03	20.533
EAS(14)	95.069	97.136	264.03	20.533

** wymagane całkowite zamocowanie

Wyniki dla elementu przemieszczeniowego CAMe4 przy pełnym całkowaniu są obarczone efektem blokady. Jest to widoczne zwłaszcza w najtrudniejszym i najbardziej reprezentatywnym teście czystego zginania, gdzie z definicji naprężenia poprzeczne są równe zeru. Znaczną poprawę wyników uzyskuje się w stanie płytowym przy jednolicie zredukowanym całkowaniu kosztem jednak wystąpienia form pasożytniczych (*ang. spurious zero-energy modes*). W rozwiązaniach elementem ANS widoczne jest jego dobre zachowanie w PSN. Podobnie jak w poprzednim zadaniu elementy EAS dają dobre wyniki i tu zaznacza się przewaga elementu EAS(14) nad EAS(10).

4. Wnioski

Otrzymane wyniki wskazują, iż elementy ANS mogą zawieść w przypadku znacznych dystorsji siatki podziałów. W kontekście elementów EAS należy zaznaczyć ich mniejszą wrażliwość na skoszenie elementu. Widać też, iż dodanie iloczynów współrzędnych *rs* w macierzy $\bar{\mathbb{E}}$ znacznie poprawia wyniki. Poprawę taką otrzymano także w pracy [7], gdzie stosowano powłokowy element zdegenerowany. Dalszym etapem jest implementacja w zakresie geometrycznie nieliniowym. Przewiduje się przedstawienie wyników w wystąpieniu konferencyjnym.

LITERATURA

1. Dvorkin E.N., Bathe K.-J. : A continuum mechanics based four-node element for general non-linear analysis. Eng. Comput., 1, 1986 , p. 77-88.
2. Simo J.C., Rifai M.S.: A class of mixed assumed strain methods and the methods of incompatible modes. Int. J. Num. Meth. Engng, 29, 1990, p. 1595-1638.
3. Chróścielewski J, Makowski J, Stumpf H.: Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures, Comp. Meth. Appl.Mech. Engng., 1997, p. 141,1-46.
4. Libai A., Simmonds J.G.: The Nonlinear Theory of Elastic Shells, 2nd ed. Cambridge, Cambridge University Press, 1998.
5. Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.: Statyka i dynamika powłok wielopłatowych: Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych, w druku w serii "Biblioteka Mechaniki Stosowanej", IPPT PAN, Warszawa 2004.
6. de Sa C., J., M., A., Jorge N., R., M., N., Valente R., A., F., Areias P., M., A.: Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation. Int. J. Num. Meth. Engng, 53, 2002, p. 1721-1750
7. Andelfinger U., Ramm E.: EAS elements for two – dimensional, three – dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR elements. Int. J. Num. Meth. Engng, 36, 1993, p. 1311-1337.
8. Piltner R., Taylor R.L.: A systematic construction of B-bar functions for linear and nonlinear mixed-enhanced finite elements. UCB/SEMM Report 96/02, University of California at Berkeley, Berkeley, USA 1996.

Badania wykonano w ramach projektu badawczego KBN 5 T07A 00825.

Recenzent: Dr hab. inż. Tomasz Lewiński, prof. Pol. Warszawskiej