

Józef MIKRUT

Centralny Ośrodek Informatyki Górnictwa

## MOŻLIWOŚCI I KORZYŚCI ZE STOSOWANIA METOD GEOSTATYSTYCZNYCH W GEOLOGII

**Streszczenie.** W referacie wprowadza się podstawowe pojęcia geostatystyki, jak: zmienna regionalna i semiwariogram oraz wskazuje na najważniejsze dziedziny zastosowania tej teorii w geologii. Omówiono również aktualny stan prac realizowanych w Centralnym Ośrodku Informatyki Górnictwa w Katowicach w ramach skomputeryzowanego systemu gospodarki złożem i ochrony powierzchni - I - GZOP.

### 1. WSTĘP

Na przestrzeni ostatnich lat rozwinęła się wyspecjalizowana gałąź statystyki matematycznej, zwana geostatystyką. Znajduje ona zastosowanie w takich dziedzinach nauki, jak hydrologia, meteorologia, demografia i [in. tj., tam gdzie nieznana wartość w przestrzeni (czy w czasie) ma być wyznaczona na podstawie znanych wartości w punktach sąsiednich, z uwzględnieniem ich lokalizacji względem siebie. Szczególnie intensywnie prowadzone są w wielu krajach prace nad zastosowaniem tych metod w geologii. Wśród kilku ośrodków w Polsce prace w dziedzinie geostatystyki prowadzone są również w Centralnym ośrodku Informatyki Górnictwa w Katowicach w ramach prac nad Skomputeryzowanym Systemem Gospodarki Złożem i Ochrony Powierzchni I-GZOP [3].

### 2. PODSTAWOWE POJĘCIA GEOSTATYSTYKI

Teoria geostatystyki opiera się na pojęciu "ziennej regionalnej" (zregionalizowanej), czyli losowej funkcji współrzędnych geograficznych X-Y [1, 2, 4]. Zmienną regionalną może być np. głębokość zalegania stropu karbonu mierzona od powierzchni ziemi, procentowa zawartość siarki w węglu czy zawartość minerału w rudzie na określonym obszarze. Stosuje się również, choć rzadziej, zmiennę regionalną jednego argumentu, np. przy badaniu zawartości minerału wzdłuż odwiertu dla ustalonych współrzędnych geograficznych X-Y. W literaturze spotyka się też przypadki ziennej regionalnej trzech argumentów, np. w zagadnieniu analizy zawartości minerału w funkcji współrzędnych geograficznych X-Y i głębokości H. W praktyce

dyponujemy tylko informacją o pewnej realizacji tej zmiennej w postaci danych z tzw. "punktów stwierdzeń". W geologii są to informacje z odwier-tów oraz z prób uzyskanych w czasie robót górniczych.

Ze względu na swą specyfikę wyróżnić można następujące składowe zmien-ności wartości parametrów złoża:

- a) skokowe niejednorodności (np. uskoki czy raptowne zaniki warstw),
- b) składowa o charakterze systematycznym, tzn. mająca cechy trendu (wy-rażna niecka stropu karbonu, wzrastanie miąższości pokładu w jakimś kierunku czy przeplatanie się obszarów bogatych w rudę z ubogimi),
- c) losowa składowa zmienności charakteryzująca się równym prawdopodobień-stwem odchyłek "in minus", jak i "in plus".

Jednym z podstawowych założeń geostatystyki jest jednorodność, która nie dopuszcza do występowania obszarów o wyraźnym zróżnicowaniu poziomu wartości (np. uskoki). Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to obszar należy podzielić na podobszary jednorodny i dla każdego z nich oddzielnie stosować metody geostatystyki bądź (o ile to jest możliwe) "przywieść" dane o obszarze za pomocą specjalnych przekształceń do stanu jednorodno-ści. Po przeprowadzonej analizie geostatystycznej należy dokonać prze-kształceń odwrotnych [7].

Przed właściwą analizą zmiennej regionalnej stwierdza się, czy jest ona obarczona trendem, czy też nie. W zastosowaniach do geologii zaleca się wyznaczanie powierzchni trendu w postaci wielomianów potęgowych zmien-nych  $X$  i  $Y$  stopnia co najwyżej trzeciego [4]. Niekiedy dość naturalne wydaje się stosowanie wielomianów trygonometrycznych, np. gdy daje się zauważyć wyraźne przeplatanie się obszarów bogatych w rudę z biedniejszymi. W praktyce nie spotyka się tego rodzaju zastosowań, głównie z powodu poważnych trudności z doбором okresu w funkcjach trygonometrycznych.

Oprócz wspomnianego wyżej założenia o jednorodności zmiennej regional-nej, zakłada się dla jej losowej składowej stacjonarność i istnienie ko-relacji przestrzennej. Założenie stacjonarności oznacza, że dla różnych par punktów z obszaru określoności tej zmiennej (w różnych miejscach zło-ża), o ile tylko te pary wyznaczają ten sam kierunek oraz odległości mię-dzy punktami w parach będą jednakowe, oczekiwane różnice wartości zmien-nej w tych parach punktów będą jednakowe. Stacjonarność nie oznacza izo-tropowości, zatem struktura zmian wartości w różnych kierunkach może być różna (dopuszcza się anizotropowość). Z kolei założenie o korelacji prze-strzennej oznacza występowanie pewnego "podobieństwa przestrzennego" war-tości losowej składowej zmiennej regionalnej w tym sensie, że wartość w dowolnym punkcie bardziej związana jest z wartościami w punktach bliż-szych niż z wartościami w punktach dalszych.

W wyniku przyjęcia wymienionych założeń dla składowej losowej zmiennej regionalnej wyróżnia się składową przypadkową wariancji (zwaną efektem samorodków) oraz składową przestrzenną, bezpośrednio zależną od kierunku i odległości między punktami stwierdzeń. Losowa składowa związana jest

głównie z fluktuacją wartości rozważanego parametru złoza. A więc mimo że odległość między punktami stwierdzeń maleje do zera, to wartość wariancji dąży w granicy do pewnej wartości  $C_0 \geq \beta$ . Składowa przestrzenna wariancji wynika zaś z faktu zmniejszania się autokorelacji między wartościami w miarę wzrostu odległości między punktami stwierdzeń. Ilościowej oceny powyższego faktu dokonuje się za pomocą tzw. "semiwariogramu", który w szczególnym przypadku, dla regularnej sieci opróbowań (punktów stwierdzeń) wyznacza się ze wzoru Matherona [1, 2, 4]:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \cdot \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i) - z(x_i+h))^2$$

gdzie:

- $N(h)$  - liczba par punktów stwierdzeń na kierunku  $\vec{h}$  odległych od siebie o  $h$ ,
- $Z(x_i), Z(x_i+h)$  - wartości losowej składowej zmiennej regionalnej w poszczególnych parach punktów na kierunku  $\vec{h}$  odległych od siebie o  $h$ .

Znane są również, choć znacznie bardziej skomplikowane, metody wyznaczania semiwariogramu dla nieregularnej sieci opróbowań.

Do tak wyznaczanego semiwariogramu, zwanego semiwariogramem eksperymentalnym, dobiera się odpowiedni model semiwariogramu teoretycznego. W praktyce najszersze zastosowanie znalazły dwa modele teoretyczne [1, 2, 4], mianowicie:

a) liniowy

$$\gamma(h) = \begin{cases} W \cdot h + W_0 & \text{dla } h > \beta \\ \beta & \text{dla } h = \beta \end{cases}$$

gdzie:

- $W_0$  - efekt samorodków, tzn. składowa losowa semiwariogramu,  
 $W$  - tangens kąta nachylenia semiwariogramu.

b) sferyczny

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \cdot \left( \frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right) + C_0 & \text{dla } h \leq a \\ C + C_0 & \text{dla } h > a \\ 0 & \text{dla } h = \beta \end{cases}$$

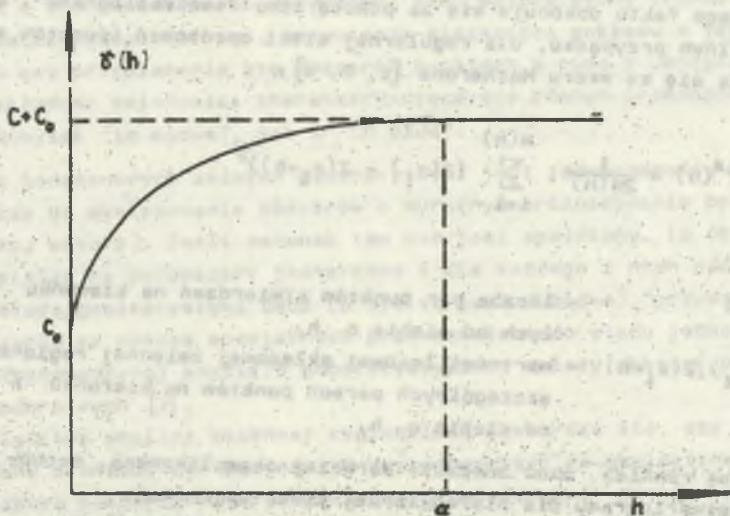
gdzie:

$C_0$  - efekt samorodków,

$C$  - graniczna wartość przestrzennej składowej wariancji,

$a$  - strefa wpływu.

Semiwariogram sferyczny ilustruje rys. 1.



Rys. 1. Semiwariogram sferyczny

Fig. 1. Spherical semi-variogram/lie detector = variograf

Strefa wpływu, zwana rangę semiwariogramu, wyznacza tę odległość między punktami stwierdzeń, powyżej której korelacja między wartościami nie występuje. Dla złóż o zerowej randze semiwariogramu (tzn.  $a = \emptyset$ ) brak jest korelacji, w związku z czym można analizować je przez zastosowanie metod statystyki matematycznej.

Określenie powierzchni trendu oraz zestawu semiwariogramów dla ustalonych kierunków nazywa się wyznaczaniem geostatystycznego modelu złoża.

### 3. PODSTAWOWE ZASTOSOWANIA GEOSTATYSTYKI

W oparciu o geostatystyczny model złoża rozwiązać można następujące problemy z dziedziny geologii:

- a) dokonać najbardziej wiarygodnej estymacji (szacowania) wartości parametru w bloku złoża lub w dowolnym jego punkcie, z jednoczesnym wyznaczeniem błędu tego oszacowania,
- b) rozwiązać zadanie optymalnego rozmieszczenia nowych otworów wiertniczych.

Zadanie estymacji rozwiązuje się metodę Kriging [1, 2, 4, 5, 6], w której nieznaną wartość Z (np. średnie zapopielenie w bloku) szacuje się za pomocą estymatora liniowego:

$$Z = \sum_{i=1}^N w_i \cdot Z_i$$

gdzie:

$Z_i$  - wartości zmiennej regionalnej w punktach stwierdzeń,

$w_i$  - wagi przypisywane punktom stwierdzeń.

Wagi  $w_i$  wyznacza się z układu równań zwanego układem równań krigingu:

$$w_1 \cdot \mathcal{J}(p_1, p_1) + w_2 \cdot \mathcal{J}(p_1, p_2) + \dots + w_n \cdot \mathcal{J}(p_1, p_n) + \lambda = \mathcal{J}(p_1, A)$$

$$w_1 \cdot \mathcal{J}(p_2, p_1) + w_2 \cdot \mathcal{J}(p_2, p_2) + \dots + w_n \cdot \mathcal{J}(p_2, p_n) + \lambda = \mathcal{J}(p_2, A)$$

$$\dots$$

$$w_1 \cdot \mathcal{J}(p_n, p_1) + w_2 \cdot \mathcal{J}(p_n, p_2) + \dots + w_n \cdot \mathcal{J}(p_n, p_n) + \lambda = \mathcal{J}(p_n, A)$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$$

W powyższym zapisie przyjęto następujące oznaczenia:

$\mathcal{J}(p_1, p_j)$  - wartość semiwariogramu dla pary punktów stwierdzeń  $p_1$  oraz  $p_j$  (tzn. dla kierunku i odległości wyznaczonych przez tę parę punktów),

$\mathcal{J}(p_1, A)$  - średnia wartość semiwariogramu między punktem stwierdzeń  $p_1$  a blokiem A, w którym dokonuje się szacowania, wg wzoru:

$$\mathcal{J}(p_1, A) = \frac{1}{|A|} \iint_A \mathcal{J}(p_1, p) dp$$

Błąd tak dokonanego oszacowania wyznacza się ze wzoru:

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \mathcal{J}(p_i, A) + \lambda - \mathcal{J}(A, A)$$

gdzie:

$\lambda$  - współczynnik wyznaczony w układzie równań krigingu,

$\mathcal{J}(A, A)$  - średnia wartość semiwariogramu między punktami bloku A, obliczona wzorem:

$$f(A, A) = \frac{1}{|A|^2} \iint_A \iint_A f(p_1, p_2) dp_1 dp_2$$

Powyższe zależności znacznie upraszczają się, jeśli dokonujemy szacowania nie w bloku, lecz w określonym punkcie złoża. Wówczas prawa strona równań krigingu przyjmuje wprost wartości semiwariogramu między punktami stwierdzeń a punktem złoża, w którym dokonuje się estymacji. W oparciu o tak wyznaczone informacje można wykreślić izoliniową mapę parametru złoża, a także mapę błędu (wiarygodności).

Zagadnienie optymalnego rozmieszczenia nowych odwiertów [8] polega na rozwiązaniu następujących zadań:

- wyznaczyć minimalną liczbę nowych punktów stwierdzeń (odwiertów) oraz wskazać ich lokalizację, tak aby maksymalny błąd oszacowania w obszarze złoża nie przekroczył podanej wartości,
- spośród zaproponowanych  $N$  lokalizacji wybrać przewidzianą w planie liczbę  $n < N$  odwiertów do realizacji, tak aby dzięki informacjom uzyskanym z tych odwiertów zminimalizować błąd w obszarze złoża,
- spośród zaproponowanych  $N$  lokalizacji o znanych kosztach realizacji każdego odwiertu wybrać  $n < N$  odwiertów takich, by łączny koszt ich realizacji nie przekroczył przewidzianej planem kwoty oraz by jednocześnie zminimalizować błąd oceny w obszarze złoża.

W podobnym zakresie przewiduje się wdrożenie metod geostatystyki, w ramach prac nad Skomputeryzowanym Systemem Gospodarki Złożem i Ochrony Powierzchni I-GZOP realizowanym przez Centralny Ośrodek Informatyki Górnictwa (COIG).

#### 4. AKTUALNY STAN PRAC COIG W ZAKRESIE GEOSTATYSTYKI

Do końca maja 1986 roku opracowano w COIG dwa programy dla komputerów ICL-1900/ODRA-1300 pozwalające wyznaczyć geostatystyczny model złoża w zakresie dowolnego parametru, mianowicie KRG1, KRG2.

Program KRG1 dokonuje aproksymacji zmiennej regionalnej wielomianami potęgowymi współrzędnych geograficznych X-Y stopnia 0, 1, 2 i 3, dostarczając geologowi rezultatów analiz statystycznych pozwalających rozstrzygnąć, który z tych wielomianów opisuje faktyczną powierzchnię trendu. Dla każdej z tych czterech teoretycznych powierzchni wyznaczane są następujące charakterystyki (rys. 2):

- współczynniki wielomianów, równań powierzchni trendu,,
- charakterystyki rozproszenia losowej składowej zmiennej regionalnej względem powierzchni trendu, odchylenie standardowe i współczynnik zmienności,

SIEC OPROCEWAN: NIEREGULARNA

LICZBA DANYCH: 84

WARTOSC SREDNIA: 136,24

ANALIZA TRENDU ZMIENNEJ REGIONALNEJ

\*\*\*\*\*

STOPIEN 0:

\*\*\*\*\*

$$Z_0 = A$$

GDZIE:

$$A = 136,24$$

STOPIEN 1:

\*\*\*\*\*

$$Z_1 = A + B \cdot X + C \cdot Y$$

GDZIE:

$$A = 360,9 \quad B = 0,1656E-03 \quad C = 0,1597E-01$$

STOPIEN 2:

\*\*\*\*\*

$$Z_2 = A + B \cdot X + C \cdot Y + D \cdot X^2 + E \cdot X \cdot Y + F \cdot Y^2$$

GDZIE:

$$A = 453,8 \quad B = -0,8915E-01 \quad C = -0,0441E-01 \quad D = -0,1782E-07 \quad E = -0,6140E-05 \quad F = -0,7970E-05$$

STOPIEN 3:

\*\*\*\*\*

$$Z_3 = A + B \cdot X + C \cdot Y + D \cdot X^2 + E \cdot X \cdot Y + F \cdot Y^2 + G \cdot X^3 + H \cdot X^2 \cdot Y + I \cdot X \cdot Y^2 + J \cdot Y^3$$

GDZIE:

$$A = 0,2424E 05 \quad B = -3,598 \quad C = 0,1763 \quad D = 0,1237E-03 \quad E = -0,1641E-03 \quad F = -0,7500E-04$$

$$G = -0,2187E-08 \quad H = -0,0074E-10 \quad I = -0,5502E-09 \quad J = -0,4451E-08$$

STATYSTYKA ANALIZY TRENDU

\*\*\*\*\*

	Z0	Z1	Z2	Z3
ODCHYLENIE STANDARDOWE:	26,38	18,98	16,05	14,60
WSPOLCZYNNIK ZMIENNOSCI:(%)	19,25	13,70	11,72	10,66
WSPOLCZYNNIK ASYMETRII:	-0,8650	-0,3271	0,8019E-01	20,7064
WSPOLCZYNNIK EKSCESU:	0,1150	0,1734E-01	1,105	1,786
WSPOLCZYNNIK DETERMINACJI:(%)	0,0000E 00	28,44	39,17	44,66
WSPOLCZYNNIK FISCHERA:	(G)1,450	(H)1,952	(I)1,384	(J)1,200

Rys. 2. Analiza trendu zmiennej regionalnej

Fig. 2. Analysis of the regional variable trend

SEMIWARIOGRAMY  
 \*\*\*\*\*

USREDNIONE WYNIKI BADAŃ ŁĄCZNIE 1520 PAR PUNKTÓW STWIĘDZEM

A) EKSPERYMENTALNY  
 \*\*\*\*\*

ŚREDNI KRÓK [m]	LICZBA WYNIKÓW	WARTOŚCI DLA ZMIENNYCH LOSOWYCH			
		Z0	Z1	Z2	Z3
105.27	29	225.2	227.1	237.8	238.2
204.32	75	195.8	193.0	194.4	195.4
303.60	35	139.5	143.1	143.3	145.2
390.75	28	198.7	220.7	205.8	190.5
502.91	35	253.2	262.5	236.9	224.5
590.23	117	237.3	290.4	248.2	220.1
700.73	28	229.7	253.0	219.1	195.0
795.50	65	275.0	300.4	235.6	222.8
900.19	25	247.2	290.2	183.5	157.2
999.04	39	353.2	374.3	246.4	219.6
1097.24	26	352.1	334.4	231.2	205.4
1190.25	20	364.6	357.7	214.1	176.3
1306.14	35	321.1	325.2	177.7	177.5
1392.80	34	513.3	454.9	302.1	261.1
1490.61	20	511.0	430.1	233.4	175.4
1597.87	59	499.6	384.0	173.2	142.3
1690.91	33	451.3	347.0	213.1	144.3
1802.50	77	555.8	346.5	222.0	150.0
1902.46	30	542.3	457.6	280.9	231.4

B) TEORETYCZNY SFERYCZNY:  $G = C + [1.5 * \sigma / A - 0.5 * (H/A) * 3] + C_0$   
 \*\*\*\*\*

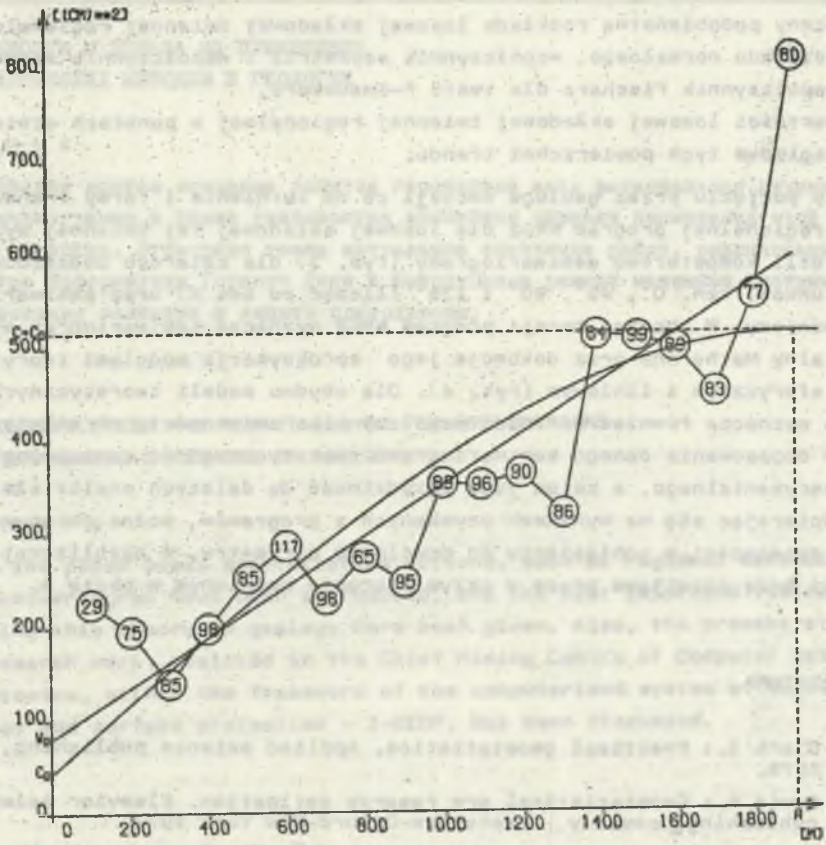
	Z0	Z1	Z2	Z3
STREFA WPŁYWU:	1905.	1701.	748.9	0.00007 00
EFEKT SAMORODKOW:	42.73	120.2	162.1	102.0
ZMIENNA SKŁADOWA WARIANCJI:	472.5	266.2	64.78	0.00007 00
MIARA DOPASOWANIA: (%)	43.34	53.61	5.326	0.00007 00

C) TEORETYCZNY LINIOWY:  $G = U_0 + M * H$   
 \*\*\*\*\*

	Z0	Z1	Z2	Z3
EFEKT SAMORODKOW:	70.77	177.5	199.5	107.0
NACHYLENIE WARIOGRAMU:	0.2726	0.1377	0.2083E-01	0.00007 00
MIARA DOPASOWANIA: (%)	55.73	49.26	4.315	0.00007 00

Rys. 3. Semiwariogramy zmiennej regionalnej  
 Fig. 3. Semi-variograms of the regional variable





ND = 84      XS = 136.9      HL = 100.0

STATYSTYKA TRENDU

NT = 0	ST = 26.38
MT = †	VT = 19.26
ET = 0.0000E 00	G1 = -0.8660
FT = 0.0000E 00	G2 = 0.1160

SEMIWARIOGRAM

SFERYCZNY	LINIOWY
A = 1905.	WO = 79.77
CO = 42.78	W = 0.2726
C = 472.8	EL = 55.78
ES = 43.84	

Rys. 4. Aproksymacja semiwariogramu eksperymentalnego modelemi sferycznymi

Fig. 4. Approximation of experimental semi-variogram by means of spherical models

- c) oceny podobieństwa rozkładu losowej składowej zmiennej regionalnej do rozkładu normalnego, współczynnik asymetrii i współczynnik ekscesu,
- d) współczynnik Fischera dla testu F-Snedecora,
- e) wartości losowej składowej zmiennej regionalnej w punktach stwierdzeń względem tych powierzchni trendu.

Po podjęciu przez geologa decyzji co do istnienia i formy trendu zmiennej regionalnej program KRG2 dla losowej składowej tej zmiennej wyznacza i kreśli komputerowo semiwariogramy (rys. 3) dla czterech podstawowych kierunków, tzn.  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  i  $135^\circ$  (licząc od osi X) oraz semiwariogram uśredniony. W obecnej wersji program KRG2 wyznacza semiwariogram eksperymentalny Matherona oraz dokonuje jego aproksymacji modelami teoretycznymi: sferycznym i liniowym (rys. 4). Dla obydwu modeli teoretycznych program wyznacza również wartości współczynnika zmienności, określające stopień dopasowania danego semiwariogramu teoretycznego do semiwariogramu eksperymentalnego, a zatem jego przydatność do dalszych analiz złoża.

Opierając się na wynikach uzyskanych z programów, można dokonywać analiz zmienności w odniesieniu do dowolnego parametru. W najbliższej przyszłości będą rozwijane prace w całym zakresie omówionym w pktcie 3.

#### LITERATURA

- [1] Clark I.: Practical geostatistics. Applied science publishing, London 1979.
- [2] David M.: Geostatistical ore reserve estimation. Elsevier scientific publishing company, Amsterdam-Oxford-New York 1977.
- [3] Hassa A.: Skomputeryzowany system gospodarki złożem i ochrony powierzchni. Przegląd Górniczy 1986, nr 2; Katowice.
- [4] Dournel A.G., Huijbregts Ch.J.: Mining geostatistics. Academic press, London-New York-San Francisco 1978.
- [5] Mucha J.: Metodyka określania gęstości opróbowania na podstawie geostatystycznego modelu zmienności, na przykładzie rud Zn-Pb. Przegląd Górniczy 1981, nr 3; Katowice.
- [6] Mucha J.: Optymalizacja rozpoznania eksploatacyjnego i oceny parametrów złozowych; gospodarka surowcami mineralnymi, 1985.
- [7] Spyra B., Dzedzej Cz.: Komputerowe sporządzanie map strukturalnych złóż z uskokami. Dokumentacja wewnętrzna COIG; Katowice 1986.
- [8] Szidarovsky F., Gershon M.: Multi-objective design of optimal drill-hole sites in the mining industry. Proceedings of the APCOM symposium; London 1984.

Recenzent: Dr hab. inż. Józef Bendkowski

**ВОЗМОЖНОСТИ И ПОЛЬЗА ИЗ ПРИМЕНЕНИЯ  
ГЕОСТАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ГЕОЛОГИИ****Р е з ю м е**

В статье даются основные понятия геостатистики как: региональная переменная и субвариограмма а также указываются важнейшие отрасли применения этой теории в геологии. Оговорено также актуальное состояние работ, реализованных в Центре Информатики Горного Дела в Катовицах в рамках машинной системы хозяйствования залежами и защиты поверхности.

**THE POSSIBILITIES AND ADVANTAGES OF THE APPLICATIONS  
OF GEOSTATISTICAL METHODS IN GEOLOGY****S u m m a r y**

In the paper basic geostatistics notions, such as regional variable and semivariogram have been introduced, and the most important fields of applying this theory in geology have been given. Also, the present state of research work, realized in the Chief Mining Centre of Computer Science in Katowice, within the framework of the computerized system of deposit economy and surface protection - I-GZOP, has been discussed.