Janusz WALCZAK

### OPTYMALIZACYJNA METODA SYNTEZY ELEMENTÓW NIELINIOWYCH II. SYNTEZA ELEMENTÓW DYNAMICZNYCH

<u>Streszczenie</u>. Artykuł stanowi kontynuację pracy [4]. Wykorzystując podaną tam optymalizacyjną metodę syntezy, rozwiązano w postaci zamkniętej kilka problemów syntezy kondensatorów nieliniowych o charakterystykach typu wielomianowego. Zaproponowano również krokowy algorytm syntezy dwójników dynamicznych złożonych z nieliniowych rezystancji, pojemności i indukcyjności.

### OPTIMIZATION METHOD OF SYNTHESIS OF NONLINEAR ELEMENTS II. SYNTHESIS OF DYNAMICAL ELEMENTS

<u>Summary</u>. The paper is a continuation of the research presented in [4]. Using the optimization methods of synthesis from the paper [4], some problems of nonlinear capacitance synthesis (with polynomial characteristics) have been solved in the closed form. A multi-step algorithm of dynamical one-ports synthesis regarding nonlinear resistances, capacitances and inductances has also been proposed.

## ОПМИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ II. СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Резюме. Эта статья становит продолжение результатов работы [4]. Применяя представляемый там оптимизационный метод синтеза решены проблемы синтеза нелинейных конденсаторов C характеристиками типа полиномов. Предложен шаговый алгоритм синтеза динамических **ДВУХПОЛЮСНИКОВ, ИНДУКТИВНОСТЕЙ.** 

#### **1. WPROWADZENIE**

Zaproponowana w pracy [4] metoda syntezy dwójników nieliniowych opiera się na minimalizacji funkcjonału jakości wyjściowego sygnału różnicowego dwóch dwójników. Pierwszy z tych dwójników opisany był zadanym operatorem nieliniowym  $\mathcal{N}$ , natomiast drugi - operatorem aproksymacyjnym  $\mathcal{N}_A$ , wyznaczanym w trakcie syntezy. Minimalizacja średniokwadratowego funkcjonału jakości sygnału różnicowego tych dwójników, względem parametrów {a<sub>k</sub>} operatora  $\mathcal{N}_A$ , umożliwiła [4] syntezę tego operatora, opisanego wzorem:

$$_{k}i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{k}u^{k}(t)$$
 , (1)

w postaci struktury drabinkowej.

Uogólnieniu wyników pracy [4], dotyczącej syntezy elementów bezinercyjnych, prowadzącemu do syntezy nieliniowych pojemności i indukcyjności oraz pewnych bardziej złożonych struktur zawierających nieliniowe rezystancje, pojemności i indukcyjności poświęcony jest niniejszy artykuł. Rozpatrywane poniżej zagadnienia dotyczą wyłącznie układów z wymuszeniami okresowymi i niesinusoidalnymi, tym niemniej sposób uogólnienia tych zagadnień na inne (występujące w teorii obwodów) klasy sygnałów przeprowadzić można w podobny sposób. Przedstawione rezultaty stanowić mogą podstawę dalszych badań mających na celu dobór nieliniowych kompensatorów w obwodach jedno- i wielofazowych z przebiegami niesinusoidalnymi.

## 2. OMÓWIENIE ROZPATRYWANYCH OPERATORÓW NIELINIOWYCH

Rozpatrywane w pracy nieliniowe pojemności i indukcyjności (rys. 1) opisują wzory:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k u^k(t) , c_k \in \mathbb{R}$$
, (2)

gdzie:

q - ładunek kondensatora,

u - napięcie na zaciskach kondensatora,

$$\dot{a}_{L}(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{k} \Psi^{k}(t) , b_{k} \in \mathbb{R}$$

(3)

### gdzie:

ψ - strumień skojarzony z uzwojeniem induktora,

l<sub>L</sub> - prąd induktora.

Elementy opisane równaniami (2), (3) ilustrują struktury drabinkowe (rys. 1a, 1b).

Ładunek całkowity układu z rys. la jest równy sumie ładunków kondensatorów nieliniowych tworzących strukturę drabinkową, proporcjonalnych ze współczynnikami wagi  $c_k$  do kolejnych potęg napięcia u. Prąd całkowity induktora nieliniowego (rys. 1b) jest równy sumie przyczynków pochodzących od elementów struktury drabinkowej, prądy tych elementów są proporcjonalne ze współczynnikami wagi  $b_k$  do kolejnych potęg strumienia skojarzonego równocześnie ze wszystkimi elementami struktury.

Należy podkreślić, że realizacja fizyczna (techniczna) nieliniowych pojemności i indukcyjności stanowi złożony problem inżynierii materiałowej związany w szczególności z kształtowaniem zadanych parametrów materiałowych dielektryków i magnetyków. W pracy problem ten nie jest rozpatrywany. Modele przedstawione na rys. I są jednak bardzo przydatne w procesie syntezy, co zostanie pokazane w dalszej części artykułu.



ь)

a)



Rys.1. Ilustracyjna struktura elementów nieliniowych. Fig.1. Illustrative structure of nonlinear L, C elements Prądy kondensatora i induktora nieliniowego określają wzory:

$$i_{c}(t) = \sum_{k=1}^{n} kc_{k} u^{k-1}(t) \frac{du}{dt}$$

$$i_{L}(t) = \sum_{k=1}^{n} b \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} u(t) dt$$
(5)

Operatory określone wzorami (1), (4), (5) stanowią szczególne przypadki tzw. uogólnionych operatorów superpozycji (Nemyckiego) [2], a określenie ich dziedziny i przeciwdziedziny stanowi złożony problem. Jeżeli operatory F określone wzorami (1), (4), (5) spełniają warunki Caratheadory'ego [3], to odwzorowują one przestrzenie Orlicza (wzory (1), (5)) [3] lub przestrzenie Orlicza-Soboleva (wzór (4)) [1] w siebie. W przestrzeniach tych nie zawsze istnieje średniokwadratowy funkcjonał jakości prądu, dlatego też w pracy przyjęto dodatkowe założenia odnośnie do sygnałów stanowiących dziedzinę operatorów F (wzory (1), (4), (5)), gwarantujące:

1. Ciągłość operacji F.

 Działanie operacji F pomiędzy przestrzeniami funkcji całkowalnych w p-tej (p∈N) potędze.

Wykorzystując warunki konieczne i wystarczające [2], [3] spełnienia postulatów 1, 2, można wykazać, że są one spełnione, gdy dziedzinę operatorów F stanowi podzbiór przestrzeni  $L_T^p$  złożony z funkcji (sygnałów napięciowych) o ograniczonym wahaniu na przedziałe [0,T]. Założenie to obowiązywać będzie w dalszej części pracy i dotyczy ono również pracy [4], gdzie zostało tylko zasygnalizowane, by nie zaciemniać zawartych tam rozważań.

# 3. SYNTEZA ELEMENTÓW POJEMNOŚCIOWYCH

Podobnie jak w [4] rozdz.3, zadanie syntezy kondensatora nieliniowego polega na minimalizacji funkcjonału:

$$\min_{\{c_k\}} \left\| x^{i} - \sum_{k=1}^{n} k c_k u^{k-1}(t) \frac{du}{dt}(t) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}}^{2} , \qquad (6)$$

gdzie:

xi - zadany prąd dwójnika opisanego operatorem N i zasilanego napięciem u,

względem zbioru parametrów  $\{c_k\}$ . Współrzędne punktu stacjonarnego funkcjonału (6) określa rozwiązanie układu równań liniowych:

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{kl} c_{l} = X_{k}, \quad k \in \{1, ..., n\} \quad ,$$
(7)

gdzie:

$$Y_{kl} = Y_{Lk} = k I \frac{1}{T} \int_{0}^{L} u^{k+l-2}(t) \left(\frac{du}{dt}\right)^{2} dt \quad t \quad ,$$
 (8)

$$X_{k} = k \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x^{i}(t) u^{k-1}(t) \left(\frac{du}{dt}\right) dt \quad , k, l \in \{1, ..., n\},$$
(9)

względem zmiennych c<sub>k</sub>. Z analizy warunków istnienia minimum funkcjonału (6) (por.[4]) wynika, że jeśli:

$$\bigwedge_{k \in \{l_{n-n}\}} \int_{0}^{T} i(t) u^{k-1}(t) \left(\frac{du}{dt}\right) dt \neq 0$$
(10)

oraz det $[Y_{kl}] \neq 0$ , a wartości własne macierzy  $[Y_{kl}]$  są dodatnie, to problem (6) posiada minimum w punkcie określonym przez rozwiązanie układu równań (7).

Uzupełnienie problemu (6) o ograniczenie równościowe dotyczące mocy czynnej  $P_N$  pobieranej przez kondensator nieliniowy:

$$P_{N} = \sum_{k=1}^{n} kc_{k} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} u^{k}(t) \left(\frac{du}{dt}\right) dt$$
(11)

prowadzi do nowego problemu optymalizacyjnego, którego rozwiązanie określa układ równań (por.[4] (24), (25)):

$$\sum_{k=1}^{n} Y_{kl}c_{l} = X_{k} , k \in \{1,...,n\}$$

$$P_{N} = \sum_{k=1}^{n} c_{k}A_{k} ,$$
(12)
(13)

gdzie:

P<sub>N</sub> - zadana moc czynna kondensatora,

$$Y_{kl}, X_{k} - określają wzory (8), (9),$$

$$X_{k} = X_{k} - \lambda A_{k}, \qquad (14)$$

$$A_{k} = k \frac{1}{T} \int_{0}^{T} u^{k}(t) \left(\frac{du}{dt}\right) dt , \qquad (15)$$

 $\lambda$  - mnonik Lagrange'a.

Jeżeli układ równań (12), (13) posiada rozwiązanie względem zmiennych ( $c_1,...,c_n,\lambda$ ), a wartości własne macierzy [Y<sub>kl</sub>] są ściśle dodatnie, to możliwa jest synteza kondensatora nieliniowego zgodnie z kryterium (6), przy czym kondensator ten pobiera (wydaje) zadaną moc czynną  $P_N$ .

Możliwa jest modyfikacja problemu (6) polegająca na zastąpieniu go ciągiem zadań minimalizacji:

$$\min_{\substack{(c_k)\\ c_k}} \| x^{i^{(k-1)}} - kc_k u^{k-1}(t) \left( \frac{du}{dt} \right)(t) \|^2, \quad k = 1, 2, ..., n,$$
(16)

gdzie:

$${}_{x}i^{(k-1)} = \begin{cases} {}_{x}i , dla \ k = 1 \\ {}_{x}i - \sum_{i=1}^{k-1}ic_{i} \ u^{i+1}(t)\left(\frac{du}{dt}\right), dla \ k > 1, \end{cases}$$
(17)

Zadania (16) rozwiązuje się kolejno (k=1,2,..,nm) aż do momentu, gdy wartość skuteczna prądu różnicowego r<sup>i(k)</sup>:

$$_{y}i^{(k)} =_{k} i^{(k-1)} - k c_{k}u^{k-1} \frac{du}{dt}$$
 (18)

jest dowolnie mała.

Można wykazać, że rozwiązania problemów (16) określa wzór:

$$c_{k} = \frac{\int_{0}^{1} x^{i^{(k-1)}(t) u^{k-1}(t) u'(t) dt}}{k \int_{0}^{1} u^{2k-2}(t)(u'(t))^{2} dt} , k = 1, 2, ..., n$$
(19)

a problemy te posiadają zawsze rozwiązanie, jeśli tylko mianownik wyrażenia (19) jest różny od zera. Z nierówności Höldera wynika następujące oszacowanie współczynników c<sub>k</sub> (19):

$$\left|c_{k}\right| \leq \frac{1}{k} \left|2 \frac{\int_{0}^{t} \left(x^{i^{(k-1)}}(t)\right)^{2} dt}{\int_{0}^{T} \left(u^{2k-2}(t)\right) dt} = \frac{\left\|x^{i^{(k-1)}}\right\|_{L^{2}_{T}}}{k\left(\left\|u\right\|_{L^{2k-2}_{T}}\right)^{2k}}, \quad k = 1, 2, ..., n$$

$$(20)$$

Z podobnych rozważań jak w ([4], wzór (10)) wynika, że współczynniki  $c_k$  (opisujące charakterystykę nieliniowego kondensatora (2)) dążą do zera szybciej niż  $k^{-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

### 4. SYNTEZA ELEMENTÓW INDUKCYJNYCH

Wykorzystując funkcję  $\Psi(t)$ , stanowiącą funkcję pierwotną napięcia u(t) zasilającego induktor nieliniowy, można zauważyć, że wzory określające charakterystyki nieliniowych rezystorów i induktorów (1), (3) są podobne. Wynika stąd, że utożsamiając współczynniki  $b_k=a_k, k=1,2,...,n$  i stosując funkcję  $\Psi(t)$  w syntezie nieliniowych induktorów wykorzystać można odpowiednie wzory zamieszczone w pracy [4], słuszne dla rezystorów nieliniowych.

### 5. SYNTEZA STRUKTUR ZŁOŻONYCH

Opisane powyżej oraz w pracy [4] problemy syntezy nieliniowych rezystorów, induktorów i kondensatorów, które polegają na krokowym doborze elementów struktur drabinkowych (wzór (19) oraz wzór (19) [4]), można wykorzystać przy realizacji struktur złożonych przedstawionych na rys.2.

Realizację układu przedstawionego na rys.2 można przeprowadzić zgodnie z algorytmem pokazanym na rys.3.

W pierwszym kroku obliczeń (k=1) zostają wyznaczone pierwsze przybliżenia liniowe  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  nieliniowych rezystancji, indukcyjności, pojemności, zgodnie ze wzorem (19) lub (19) [4]. Następnie wyznacza się wartości skuteczne prądów różnicowych  $r^{i^{(1)}}$  zgodnie ze wzorem (18), (18) [4], dla dobranych przybliżeń liniowych. Wybór jednego z trzech możliwych elementów nieliniowych (tzn. pierwszych liniowych przybliżeń tych elementów, opiera się na

kryterium najmniejszej wartości skutecznej prądu różnicowego. Tak dobrany element stanowi składnik struktury układu z rys.2. Następnie sprawdza się, czy wartość skuteczna prądu różnicowego jest mniejsza od zadanej dokładności obliczeń (aproksymacji) ε. Jeżeli warunek powyższy nie jest spełniony, przechodzi się do doboru kolejnych stopni k=2,3,.. wielomianów aproksymacyjnych. W przypadku gdy prąd różnicowy (rozumiany jako różnica pomiędzy zadanym prądem <sub>x</sub>i a prądem układu z rys.2 po k-tej iteracji) jest mniejszy od zadanej dokładności obliczeń ε, proces iteracyjny zostaje zakończony.



Rys.2. Model dwójnika nieliniowego

Fig.2. Model of nonlinear onr-port

Przedstawiony algorytm umożliwia syntezę układów stanowiących równoległe połączenie nieliniowych rezystancji, pojemności i indukcyjności. Charakterystyki elementów nieliniowych opisane są wielomianami, których nie wszystkie współczynniki są różne od zera, przez co struktura projektowanego układu (rys.2) może ulec uproszczeniu.



Rys.3. Algorytm doboru dwójnika Fig.3. Algorithm of one-port design

# 6. ZAKOŃCZENIE

Opisane w artykule oraz w pracy [4] metody syntezy nieliniowych rezystorów, kondensatorów i induktorów umożliwiają dobór prostych dwójników dynamicznych nieliniowych i stanowić mogą jedynie wstęp do szeroko rozumianej syntezy układów nieliniowych. Podkreślić należy istotną przewagę metod czasowych syntezy rozpatrywanych dwójników nad metodami częstotliwościowymi (efektywnymi dla układów liniowych), co uwidoczniło się w uzyskaniu wyników (rozwiązań problemów syntezy) w postaci zamkniętej.

Oprócz niewątpliwych korzyści prezentowane metody i wyniki posiadają jednak wiele wad: - umożliwiają dobór stosunkowo prostych struktur nieliniowych dwójników dynamicznych,

- zaprojektowane układy działają poprawnie dla zadanego (ustalonego) napięcia zasilającego,
- dobór struktur złożonych (rys.2) jest uwarunkowany stabilnością asymptotyczną projektowanych układów, która stanowi warunek konieczny ich realizowalności,
- dodatkowym ograniczeniem na projektowane układy może być ich wrażliwość na zmiany współczynników ak, bk, ck oraz napięcia zasilającego.

Przedstawione wady stanowią dodatkowe ograniczenia prezentowanej metody syntezy. Analiza tych ograniczeń połączona z możliwością przynajmniej częściowej ich eliminacji przeprowadzona zostanie w dalszych pracach.

#### **LITERATURA**

- 1. Adams R.A.: Sobolev Spaces, Academic Press, New York 1975.
- Krasnosielskij M.A.: Integralnyje operatory w prostranstwach summirujemych funkcji. Nauka, Moskwa 1966.
- 3. Krasnosielskij M.A.: Wypukłyje funkcji i prostranstwa Orlicza, GIFML, Moskwa 1958.
- Walczak J.: Optymalizacyjna metoda syntezy elementów nieliniowych. I. Synteza elementów bezinercyjnych. ZN Pol.Sl. Elektryka, z. 141, Gliwice 1994.

Recenzent: Prof.dr hab. inz. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 25 kwietnia 1994 r.

### Abstract

In this paper a synthesis method of resistive nonlinear elements (proposed in [4]), has been extended to dynamical systems without memory. Elements of this systems are described by polynomial characteristics. A problem of nonlinear capacitance synthesis (eg.6) has been formalized, analyzed and solved. The problem is dependent on minimization of square norm of the difference of two currents, with regard to parameters of designed capacitance. The first of the currents is a given current  $x_i$  of the one port. The other one is a current of designed, capacitive one port. Then this problem has been solved with additional limitations of active power (eg.11) received by the capacitive one port. A multi-step method of nonlinear capacitance synthesis (eg. 16) has been presented too. An analytical form of obtained results in an application to design nonlinear capacitances (eg. 19) is presented. The obtained results for nonlinear capacitances has been generalized on synthesis of nonlinear inductors. The results enable synthesis of dynamical one ports consisting of nonlinear resistances, capacitances and inductances of a simple structure (Fig.2). A multi-step algorithm of synthesis of this structure of dynamical one ports has been described (Fig.3). In the conclusions restrictions of applied synthesis method and method of the paper [4], are presented. These restrictions concern realizability of designed structures of dynamical one ports.