ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994

Seria: ELEKTRYKA z.141 Nr kol.1249

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

ZASTOSOWANIE WIELOWYMIAROWEJ ALGEBRY BOOLE'A I TEORII KRAT W ANALIZIE DOWOLNYCH DIODOWYCH SIECI OSOBLIWYCH

Streszczenie: Pokazano opis sieci zawierających dwójniki osobliwe (nullator, norator i idealną diodę) za pomocą dwuwymiarowej algebry Boole'a. Wprowadzono transformację odwzorowującą zbiór liczb rzeczywistych w zbiór czteroelementowy. Diodowe dwójniki osobliwe opisano za pomocą formuł boolowskich. Przedstawiono twierdzenia umożliwiające szukanie dwójnika zastępczego równoważnego danej diodowej sieci osobliwej szeregowo-równoległej. Wprowadzono pojęcia elementarnych i nieelementarnych diodowych sieci osobliwych oraz ich opisu za pomocą alternatywnego zestawu formuł boolowskich. Wykazano, że zbiór elementarnych diodowych sieci osobliwych jako szesnastoelementowa algebra Boole'a tworzy kratę rozpiętą na wartościach parametrów opisujących je formuł boolowskich. Parametry te scharakteryzowano przez pojęcia wartości własnych, kresów górnych i kresów dolnych. Podano twierdzenia umożliwiające porównywanie dowolnych diodowych sieci osobliwych na podstawie własności opisujących je alternatywnych zestawów formuł boolowskich, wynikających z ich przynależności do kraty. Pokazano sposoby redukcji rzędu zestawu formuł boolowskich oraz poszukiwanie na ich podstawie diodowych osobliwych sieci równoważnych. W pracy podano także przykłady obliczeń ilustrujące zastosowanie zestawów formuł boolowskich do poszukiwania osobliwych diodowych sieci równoważnych oraz redukcji ich rzędu.

APPLICATION OF MULTIDIMENSIONAL BOOLEAN ALGEBRA AND THEORY OF LATTICES IN DIODE SINGULAR NETWORKS ANALYSIS

Summary. Description of networks comprising singular one-port (nullator, norator and ideal diode) using two-dimensional Boolean algebra, has been presented. Transformation projecting real numbers set into four-element set, has been developed. Singular diodeone-ports have been described using Boolean formulas. The theorems enabling searchinga substitute one-port equivalent to the given singular in series/parallel diode network, have been presented. The notions of elementary and non-elementary diode singular networks and their description by means of alternative set of Boolean formulas, have been developed. It is proved that the set of elementary diode singular networks, as sixteen-element Boolean algebra, forms a lattice spread upon the values of parameters of Boolean formulas describing them. Those parameters have been characterized by notions of specific values, upper limits and lower limits. The theorems enabling comparison of optional diode singularnetworks, basing on the properties of the alternative sets of Boolean formulas describing them, resulted from their attachment to the lattice, have been given. The methods of order reduction of Boolean formulas set as well as searching equivalent diode singular networks based on them, have been demonstrated. In this paper, examples of calculations illustrating an application of Boolean formulas sets for searching equivalent diode singularnetworks as well as reduction of their order, have been given.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОРАЗМЕРНОЙ БУЛЕВОЙ ААГЕБРЫ И ТЕОРИИ РЕШТОК К АНАЛИЗУ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДИОДНЫХ ОСОБЕННЫХ ЦЕПЕЙ

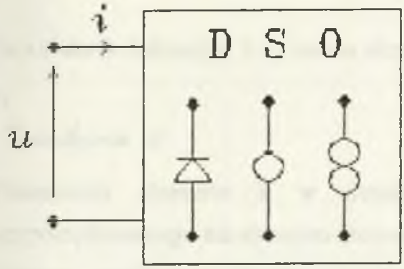
Резюме. Показывается описание цепей, содержаших особенные элементы (нуллатор, норатор и идеальный диод) при помоши двухмерной булевой алгебры. Введена трансформация, отображаюшая множество дэйствительных чисэл в виде четырехэлементного множества. Диодные особенные двухполюсники описываются при помоши булэвых формул. Прэдставлены теоремы даюшие возможность подбора замешаюшего двухполюсника зквивалентного даной диодной особенной последователно-параллельной цели. Введены понятия элементарных и нееелементарных диодных особенных целей а также их описания при помоши альтернативного множества булевых формул. Доказывается, что множество элементарных особенных диодных цепей, как шестнадцатиэлементная булевая алгебра, создает решетку, которая расстягивается на значениях параметров изобразаюших их булевых формул. Эти параметры описаны с помошью понятий собственного значения, верхнего предела и нижнево предела. Представлены теоремы даюшие возможность сравненя произвольных диодных особенных цепей на основэ свойств изображаюших их алтернативных множеств булевых формул, которые следуют из их принадлежности к решетке. Показаны методы уменшения ряда множества булевых формул, а также поиск на их основе эквивалентных диодных особенных цепей. В статье представлены также примеры вычизлений иллюстрируюшие множества булевых формул к поиску эквивалентных особенных диодных цепей, а также уменшению их ряда.

1. WPROWADZENIE

Przez diodowe sieci osobliwe (DSO)rozumiane będą obwody zawierające takie idealne dwójniki, jak nullator, norator, idealną diodę oraz oczywiście przerwę i zwarcie (rys.1).

Niechaj na dwójniku widzianym między pewnymi zaciskami ab tej sieci występują wartości chwilowe prądu i oraz napięcia u, przy czym $i,u \in R$ (R zbiór liczb rzeczywistych). W każdej chwili dwójnik ten opisuje para liczb (i, u), której wartości przebiegają zbiór D będący podzbiorem przestrzeni R^2, czyli:

$$\wedge t : (i,u) \in D \subset R^2 \tag{1}$$



Rys. 1.

Zbiór D jest pewnym obszarem na płaszczyźnie i-u zwanym obszarem pracy, czyli zbiorem wszystkich możliwych punktów pracy. Dla dwójników DSO obszary pracy mają kształt złożony z jednego lub więcej prostokątów uogólnionych, ortogonalnych względem osi układu współrzędnych i-u, o granicach położonych tylko w zerze lub w nieskończoności. Zatem ich zmienne zaciskowe mogą przyjmować wartości dowolne (R), dowolne nieujemne (R^{-}), dowolne niedodatnie (R^{-}) lub tylko zerowe (0). Dwójniki o obszarach pracy złożonych z pojedynczych prostokątów uogólnionych nazywane będą elementarnym zbiorem diodowych sieci osobliwych (EDSO).

2. ELEMENTARNY ZBIÓR DIODOWYCH SIECI OSOBLIWYCH W UJĘCIU ALGEBRY BOOLE'A

Aby sieci złożone z elementarnych diodowych dwójników osobliwych opisać za pomocą algebry Boole'a, należy wprowadzić transformację odwzorowującą przestrzeń liczb rzeczywistych R reprezentowaną przez podzbiory R, R^{+}, R^{-} i 0 w dwuwymiarową przestrzeń B^2, przy czym:

$$B^2 = \{ x = x_1 x_2 : x_i \in B\{0,1\} \} \tag{2}$$

Transformacja ta oznaczona symbolem *M* ma postać:

Definicja 1

$$\underset{x \in R}{Mx} = \tilde{x} = \begin{cases} 11, & \text{gdy } x \text{ jest dowolne } (\in R) \\ 10, & \text{gdy } x \geq 0 \ (\in R^{+}) \\ 01, & \text{gdy } x \leq 0 \ (\in R^{-}) \\ 00, & \text{gdy } x \text{ jest rowne tylko } 0 \end{cases} \tag{3}$$

Stąd można też określić transformację M^{-1}, odwrotną do *M*, przekształcającą zbiór B^2 w R, o postaci:

Definicja 2

$$\underset{\tilde{x}\in D^2}{M^{-1}\tilde{x}} = x \in \begin{cases} 0 \text{ gdy } \tilde{x} = 00 \\ R^{+} \text{gdy } \tilde{x} = 01 \\ R^{-} \text{gdy } \tilde{x} = 10 \\ R \text{ gdy } \tilde{x} = 11 \end{cases} \tag{4}$$

Twierdzenie 1

Tak utworzony zbiór X = {00, 01, 10, 11} jest zbiorem czteroelementowej algebry Boole'a określonej jako system $\langle X, +, \ , 00, 11\rangle$, gdyż spełnia on jej aksjomaty:

$$\bigwedge a, b, c \in \tilde{X}$$

1^{*}	$a + b \in \tilde{X}$	1^{**}	$a \circ b \in \tilde{X}$
2^{*}	$a + b = b + a$	2^{**}	$a \circ b = b \circ a$
3^{*}	$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$	3^{**}	$a + b \circ c = (a + b) \circ (a + c)$
4^{*}	$a + 00 = a$	4^{**}	$a \circ 11 = a$

oraz:

$$\bigwedge a \in \tilde{X} \quad \bigvee \bar{a} \in \tilde{X} \quad \text{takie, że}$$

5^{*}	$a + \bar{a} = 11$	5^{**}	$a \circ \bar{a} = 00$

Prawdziwość tego twierdzenia wynika z odpowiedniej równoważności operacji boolowskich na elementach zbioru $\tilde{X}$ oraz operacji zbiorowych na podzbiorach $0,\ R^{-},\ R^{+}$ i R.

Każdy element przestrzeni B^2 stanowi parę uporządkowaną złożoną z dwu składników elementarnych wyróżnionych jako starszy H i mlodzsy L, co dla zbioru $\tilde{X}$ można określić jako:

$$\tilde{x} = x_H x_L \quad \text{dla} \quad \tilde{x} \in \tilde{X} \tag{5}$$

Wśród szesnastu operacji jednoargumentowych dla dwuwymiarowej algebry Boole'a wyróżnić należy operację transpozycji, wykonującą zamianę miejscami składników pary elementarnej, jaką jest argument tej operacji, czyli:

Definicja 3

$\bigwedge (\tilde{x}_1 = x_{1H} x_{1L},\ \tilde{x}_2 = x_{2H} x_{2L}) \in \tilde{X}$ zachodzi:

$$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_1^T \equiv (x_{2H} = x_{1L}) \text{ i } (x_{2L} = x_{1H}) \tag{6}$$

Na podstawie definicji 1, 2 i 3 można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 2

Transpozycji elementu $\tilde{x}$ w dziedzinie boolowskiej odpowiada zmiana znaku przyporządkowanego mu elementu zbiorowego w dziedzinie liczb rzeczywistych i odwrotnie. Zmienne zaciskowe dowolnego elementarnego diodowego dwójnika osobliwego przetransformowane do dziedziny B^2 powiązane są funkcją boolowską reprezentowaną przez odpowiednią formułę boolowską F, zawierającą pewne stałe parametry jednoznacznie ją określające. Spełnienie tej formuły decyduje jednoznacznie o własnościach opisywanego przez nią dwójnika , co można wyrazić jako:

$$F_1(\tilde{i},\ \tilde{u}) = 00, \quad \text{gdy} \quad (i,u) \in D \tag{7}$$

Definicja 4

Fomułę boolowską wiążącą *M*-transformację prądu i napięcia na zaciskach dwójnika osobliwego ze zbioru EDSO przyjmuje się o postaci:

$$(A \odot \tilde{i}) + (B \odot \tilde{u}) = 00 \tag{8}$$

w której:

$\tilde{i}$, $\tilde{u}$ - transformacje M prądu i napięcia,

$\odot$ - boolowskie działanie równoważności zdefiniowane jako:

$$\bigwedge a,b \in \tilde{X} : \ a \odot b = \bar{a} \circ \bar{b} + a \circ b \tag{9}$$

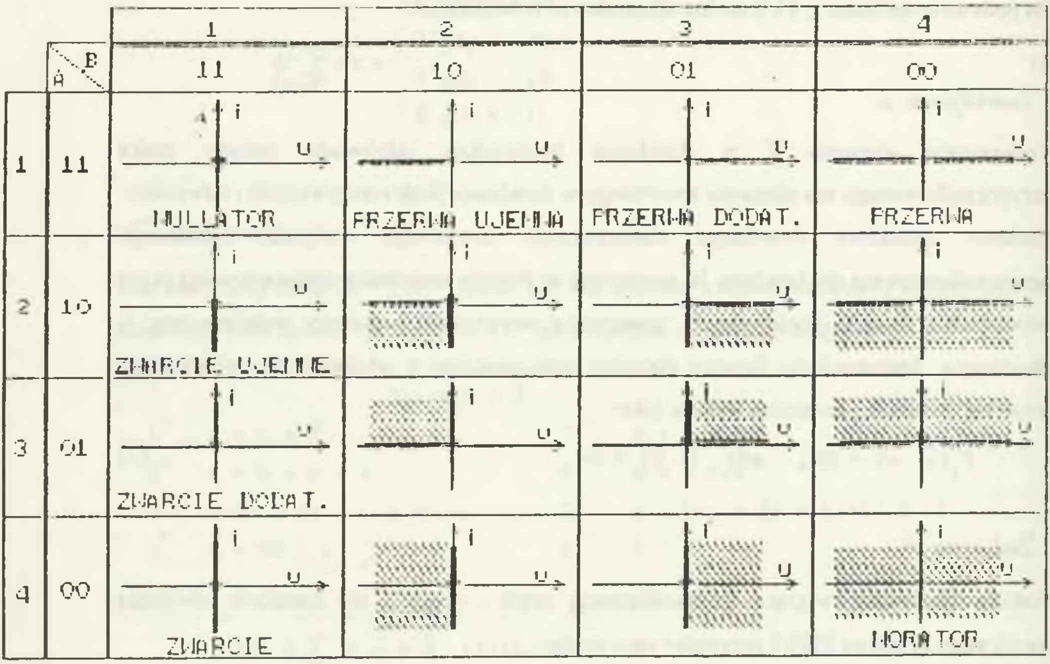
$A = A_H A_L$, $B = B_H B_L$ - parametry boolowskie z dziedziny $\{0,1\}^2$.

Spełnienie formuły (8) dla określonych wartości transformacji *M* prądu i napięcia wymaga, aby parametry A i B przyjęły określone wartości ze zbioru $\tilde{X}$, a zatem określają one jednoznacznie dwójnik osobliwy opisany tą formułą.

W tablicy 1 przedstawione są obszary pracy dwójników ze zbioru EDSO i odpowiadające im wartości parametrów A, B ze zabioru $\tilde{X}$.

Tablica 1

ELEMENTY OSOBLIWE ZBIORU EDSO



Istotnym wnioskiem wynikającym z tak zdefiniowanej formuły (8) jest:

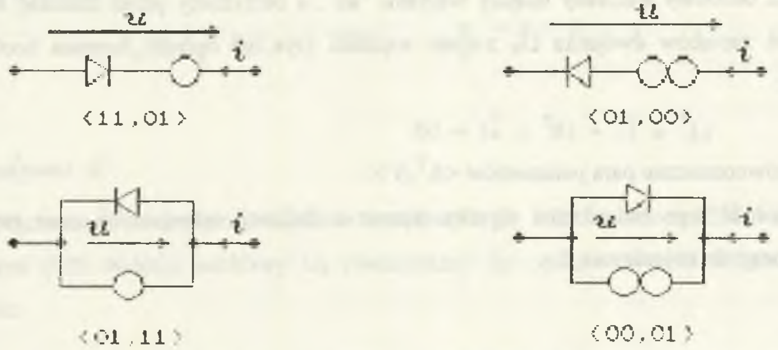
Twierdzenie 3

Dla każdego dwójnika osobliwego ze zbioru EDSO opisywanego formułą (8) charakteryzujące go poprzez te formuły parametry stałe A i B, uważane dalej za parę <A,B>, określone są jako:

$$A = \bar{\tilde{1}}, \qquad B = \bar{\tilde{u}} \tag{10}$$

Prawdziwość twierdzenia 3 wynika z kształtu formuły (8) i własności działania równoważności.

Na rys.2 przedstawione są najprostsze dwójniki ze zbioru EDSO odpowiadające czterem obszarom pracy z tablicy 1.



Rys. 2.

Dla każdego dwójnika ze zbioru EDSO jeden z jego zacisków wyróżniany jest jako zacisk odniesienia. Wartości chwilowe prądu i napięcia dwójnika osobliwego skierowane zgodnie ze strzałkami wskazującymi zacisk odniesienia, uważane są za wartości dodatnie (rys.3a)

Rys. 3.

Niechaj dwójnik osobliwy D_0 ostrzałkowany tak jak na rys.3a opisuje formuła boolowska typu (8).

Twierdzenie 4

Dwójnik osobliwy widziany między węzłami "ab", a otrzymany przez zamianę miejscami połączeń zacisków dwójnika D_0 z tymi węzłami (rys.3b) opisuje formuła boolowska o postaci:

$$(A^T \odot \tilde{i}) + (B^T \odot \tilde{u}) = 00 \tag{11}$$

lub co równoznaczne para parametrów $<A^T,B^T>$.

Prawdziwość tego twierdzenia wynika wprost z definicji transpozycji oraz twierdzenia odwrotnego do twierdzenia 2.

3. ŁĄCZENIE DIODOWYCH DWÓJNIKÓW OSOBLIWYCH

Przez łączenie elementów osobliwych ze zbioru EDSO rozumiane będzie poszukiwanie elementu osobliwego o dwu zaciskach równoważnego n elementom osobliwym połączonym w określony sposób względem tych zacisków. Aby tego dokonać, należy wprowadzić określenie:

Definicja 5

Dwa dwójniki osobliwe D_1 i D_2 opisane formułami boolowskimi:

$$\begin{aligned}(A_1 \odot \tilde{i}_1) + (B_1 \odot \tilde{u}_1) = 00\\ (A_2 \odot \tilde{i}_2) + (B_2 \odot \tilde{u}_2) = 00\end{aligned} \tag{12}$$

są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 = A_2 \quad i \quad B_1 = B_2 \tag{13}$$

co jest równoznaczne, z tym że:

$$A_{1H} = A_{2H}, \quad B_{1H} = B_{2H}, \quad A_{1L} = A_{2L}, \quad B_{1L} = B_{2L} \tag{14}$$

Podstawowych połączeń szeregowego i równoległego dotyczą następujące twierdzenia, które zostaną podane bez dowodów:

Twierdzenie 5

Przy połączeniu szeregowym dwójników osobliwych D_1 i D_2 ze zbioru EDSO opisanych formułami (12) dwójnik osobliwy D_0 równoważny im opisuje formuła:

$$(A_0 \odot \tilde{I}_0) + (B_0 \odot \tilde{u}_0) = 00 \tag{15}$$

w której zachodzi:

$$A_0 = A_1 + A_2 \quad \text{oraz} \quad B_0 = B_1 \circ B_2 \tag{16}$$

Twierdzenie 6

Przy połączeniu równoległym dwójników osobliwych D_1 i D_2 ze zbioru EDSO opisanych formułami (12) dwójnik osobliwy D_0 równoważny im opisuje formuła (15), dla której zachodzi:

$$A_0 = A_1 \circ A_2 \quad \text{oraz} \quad B_0 = B_1 + B_2 \tag{17}$$

Twierdzenia te w oczywisty sposób można rozszerzyć na n dwójników osobliwych ze zbioru EDSO. Na podstawie twierdzeń 4,5 i 6 można także wnioskować, że:

Twierdzenie 7

Szeregowe lub równoległe połączenie dwójnika osobliwego ze zbioru EDSO z nim samym, ale o odwróconej kolejności zacisków jest równoważne jednemu z czterech dwójników, a mianowicie: nullatorowi, noratorowi, przerwie lub zwarciu.

Ogólnie dla dwuzaciskowej sieci szeregowo-równoległej złożonej z dwójników osobliwych $D_1 \ldots D_n$, ze zbioru EDSO można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 8

Dwójnikiem równoważnym do dwuzaciskowej sieci szeregowo-równoległej złożonej z *n* dwójników osobliwych ze zbioru EDSO jest dwójnik osobliwy, który opisuje formuła boolowska typu (8) o parametrach <A,B> będących funkcjami boolowskimi nie zawierającymi negacji, parametrów $A_1 \ldots A_n$ i $B_1 \ldots B_n$ opisujących dwójniki składowe. Oznacza to, że:

$$[f(A_1 \ldots A_n) \odot \tilde{I}\,] + [g(B_1 \ldots B_n) \odot \tilde{u}\,] = 00 \tag{18}$$

Dowód twierdzenia 8 wynika z twierdzeń 4,5 i 6, gdyż na ich podstawie parametry <A,B> powstają przez działania transpozycji, alternatywy i koniunkcji na parametrach dwójników składowych. Nie zawierają one negacji,gdyż nie znana jest jej realizacja obwodowa w klasie dwójników osobliwych należących do zbioru EDSO.

Z twierdzeń dotyczących połączeń wynika wniosek:

Twierdzenie 9

Każdy dwójnik osobliwy o obszarach pracy przedstawionych w tablicy 1 można otrzymać przez odpowiednie połączenia dwójników przedstawionych na rys.2.

A także:

Twierdzenie 10

Każda elementarna diodowa sieć osobliwa zawierać może jedynie gałęzie złożone z dwójników przedstawionych na rys.2 lub ich połączeń szeregowo-równoległych.

Dwójniki te stanowią zatem zbiór elementów podstawowych w klasie EDSO pozwalający w łatwy sposób je opisywać i analizować, a zarazem stanowią minimalny zbiór generujący wystarczający do realizacji dowolnej takiej sieci

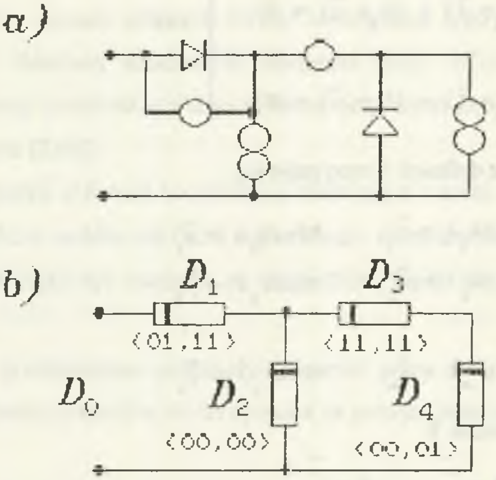
4. PRZYKŁAD ANALIZY ELEMENTARNEJ DIODOWEJ SIECI OSOBLIWEJ

Na rys.4a pokazany jest układ złożony z nullatorów, noratorów i idealnych diod. Odpowiadającą mu elementarną diodową sieć osobliwą przedstawia rys.4b.

Parametry $\langle A_0,B_0\rangle$ równoważnego dwójnika zastępczego do tej sieci mają wartości:

$$A_0 = [(A_3 + A_4) \circ A_2] + A_1 = 01$$
$$B_0 = (B_3 \circ B_4 + B_2) \circ B_1 = 01$$

Zatem, jak wynika z tablicy 1, obszarem jego pracy jest pierwsza ćwiartka układu współrzędnych na płaszczyźnie i - u.



Rys.4.

5. DOWOLNE NIEELEMENTARNE DIODOWE SIECI OSOBLIWE

Niechaj dla dwójnika DSO z rys.1 wartości prądu i oraz napięcia u należą do jednego ze zbiorów X,Y = { R, R^+, R^-, 0} oraz niechaj przynależności tych połączonych w pary będzie więcej niż jedna (w ogólności *n*), co można zapisać jako:

$$(i \in X_1),\quad u \in Y_1) \quad \text{lub} \quad (i \in X_2,\quad u \in Y_2) \quad \text{lub} \quad (i \in X_n,\quad u \in Y_n) \tag{19}$$

Twierdzenie 11

Każdy diodowy dwójnik osobliwy D o zmiennych zaciskowych określonych własnościami (19) opisuje alternatywnie *n* formuł boolowskich typu (8) wiążących *M*-transformacje prądu i napięcia dla każdej z tych własności, co można zapisać jako:

$$\left.\begin{array}{l}(A_1\circ \tilde{i}) + (B_1\circ \tilde{u}) = 00 \\ (A_2\circ \tilde{i}) + (B_2\circ \tilde{u}) = 00 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (A_n\circ \tilde{i}) + (B_n\circ \tilde{u}) = 00\end{array}\right| (+) \tag{20}$$

Dla dowodu na podstawie definicji 1 otrzymuje się:

$$\begin{array}{ll} M(i\in X_1) = \tilde{x}_1, & M(u\in Y_1) = \tilde{y}_1 \\ M(i\in X_2) = \tilde{x}_2, & M(u\in Y_2) = \tilde{y}_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ M(i\in X_n) = \tilde{x}_n, & M(u\in Y_n) = \tilde{y}_n \end{array}$$

stąd na podstawie twierdzenia 3:

$$\begin{array}{ll} A_1 = \bar{\tilde{x}}_1, & B_1 = \bar{\tilde{y}}_1 \\ A_2 = \bar{\tilde{x}}_2, & B_2 = \bar{\tilde{y}}_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_n = \bar{\tilde{x}}_n, & B_n = \bar{\tilde{y}}_n \end{array}$$

Tak otrzymane pary parametrów $<A_k, B_k>$ mogą opisywać (na podstawie definicji 4) dwójnik D poprzez n formuł boolowskich typu (8), co daje zależności (20) i twierdzeniu 11. prawdziwość

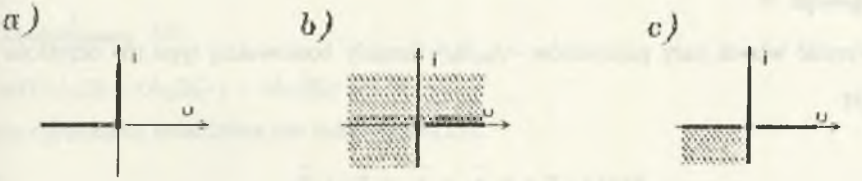
Relację (20) można nazwać alternatywnym zestawem formuł boolowskich lub krótko zestawem formuł boolowskich opisującym dwójnik D, a występujące w nich parametry A_k i B_k alternatywnym zestawem par parametrów boolowskich, lub krótko zestawem parametrów opisujących diodowy dwójnik osobliwy D, które można zapisać w postaci: $\{<A_1,B_1>\vee<A_2,B_2>\vee\ldots\vee<A_n,B_n>\}$. Każda para parametrów z tak określonego zestawu pokazuje jednoznacznie poprzez zależności (19) obszar D_k na płaszczyźnie i-u, który jest jednym z obszarów o kształtach przedstawionych w tablicy 1, będących obszarami pracy elementarnych diodowych sieci osobliwych (EDSO). Z alternatywnych współzależności relacji (19), a tym samym formuł (20) wynika suma zbiorowa reprezentowanych przez nie obszarów D_1 do D_n, zatem prawdziwe jest sformułowanie:

Twierdzenie 12

Dwójnik osobliwy opisany zestawem formuł boolowskich typu (20) posiada obszar pracy D_0 będący sumą zbiorową składowych obszarów pracy D_1 do D_n, opisanych przez poszczególne formuły boolowskie z tego zestawu, przy czym D_1 do D_n są obszarami pracy dwójników ze zbioru EDSO.

Tak określony zestaw n formuł boolowskich określający z kolei dwójnik D generuje zbiór diodowych dwójników osobliwych DDO rzędu n-tego, co można zapisać jako $\{DDO\}^n$, przy czym zbiór EDSO może być uważany za zbiór DDO rzędu pierwszego, czyli $\{EDSO\} \equiv \{DDO\}^1$.

Na rysunku 5 przedstawiono przykłady obszarów pracy dwójników nie należących do zbioru EDSO, a zatem nie możliwych do opisania za pomocą jednej formuły boolowskiej.



Fa : {(11,10)∪(01,11)}

Fb1: {(01,00)∪(10,10)}
Fb2: {(01,00)∪(00,10)}
Fb3: {(01,01)∪(00,10)}

Fc1: {(10,1o)∪(01,11)∪(11,01)}
Fc2: {(10,10)∪(00,11)∪(11,00)}

Rys. 5.

Przytoczone przykłady ujawniają możliwość opisu tego samego dwójnika kilkoma różnymi zestawami formuł, dodatkowo o różnej ich liczbie w zestawie, co wynika z własności sumy zbiorowej składowych obszarów pracy każdego z nich. Rozstrzygnięcie problemu równoważności zestawów formuł boolowskich, a tym samym opisywanych przez nie dwójników, także przy różnych ich ilościach w zestawie, możliwe jest poprzez przedstawienie zbioru EDSO jako zbioru częściowo uporządkowanego, czyli kraty.

6. ELEMENTY EDSO JAKO ZBIÓR TWORZĄCY KRATĘ

Przynależność wartości prądu i napięcia na zaciskach dwójnika typu EDSO do zbiorów R, R^+, R^- lub 0 wyznacza na płaszczyźnie i-u będącej przestrzenią pracy tego dwójnika dziewięć elementarnych obszarów (cztery półproste, cztery ćwierćpłaszczyzny oraz punkt 0-0) o granicach położonych w zerze lub w nieskończoności, a będących składowymi obszarów pracy dwójników przedstawionych w tablicy 1. Wynika stąd, że obszary pracy tych dwójników zawierają się całkowicie w niektórych z nich. Własność ta pozwala utworzyć w tym zbiorze relację częściowo porządkującą opierając się na własnościach parametrów $<A_k,B_k>$ opisujących je formuł boolowskich. W tym celu należy wprowadzić pojęcie wartości własnej Val pary $<A_k,B_k>$ oraz kresu dolnego inf i kresu górnego sup dwu par $<A_k,B_k>$ i $<A_l,B_l>$.

Definicja 6

Wartość własna pary parametrów $<A_k,B_k>$ formuły boolowskiej typu (8) określona jest relacją:

$$\mathrm{Val}<A_k,B_k> = \bar{A}_{kH} + \bar{A}_{kL} + \bar{B}_{kH} + \bar{B}_{kL} \tag{21}$$

w której "+" oznacza operację sumownia liczb naturalnych.

Definicja 7

Kres górny dwu par parametrów $<A_1,B_1>$ oraz $<A_2,B_2>$ określony jest relacją:

$$\sup\{<A_1,B_1>,<A_2,B_2>\} \equiv <A_1,B_1> \cup <A_2,B_2> \equiv <A_1 \vee A_2,\ B_1 \vee B_2> \tag{22}$$

Definicja 8

Kres dolny dwu par parametrów $<A_1,B_1>$ oraz $<A_2,B_2>$ określony jest relacją:

$$\inf\{<A_1,B_1>,<A_2,B_2>\} \equiv <A_1,B_1> \cap <A_2,B_2> \equiv <A_1 \wedge A_2,\ B_1 \wedge B_2> \tag{23}$$

Na podstawie definicji 1, 4, 6, 7 i 8 można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 13

Jeżeli dla parametrów $<A_1,B_1>$ oraz $<A_2,B_2>$ opisujących dwa nierównoważne sobie dwójniki D_1 i D_2 typu EDSO zachodzi:

$$\sup\{<A_1,B_1>,<A_2,B_2>\} = <A_2,B_2> \tag{24}$$

to oznacza, że obszar pracy dwójnika D_1 zawiera się całkowicie w obszarze pracy dwójnika D_2 oraz jednocześnie zachodzi:

$$\mathrm{Val}<A_2,B_2> = \mathrm{Val}<A_1,B_1> \tag{25}$$

Dla dwójników tych zachodzi także twierdzenie dualne mówiące, że:

Twierdzenie 14

$\inf\{<A_1,B_1>,<A_2,B_2>\} = <A_1,B_1>$

przy czym nadal prawdziwa jest nierówność (25).

Z twierdzeń 13 i 14 wynikają wnioski:

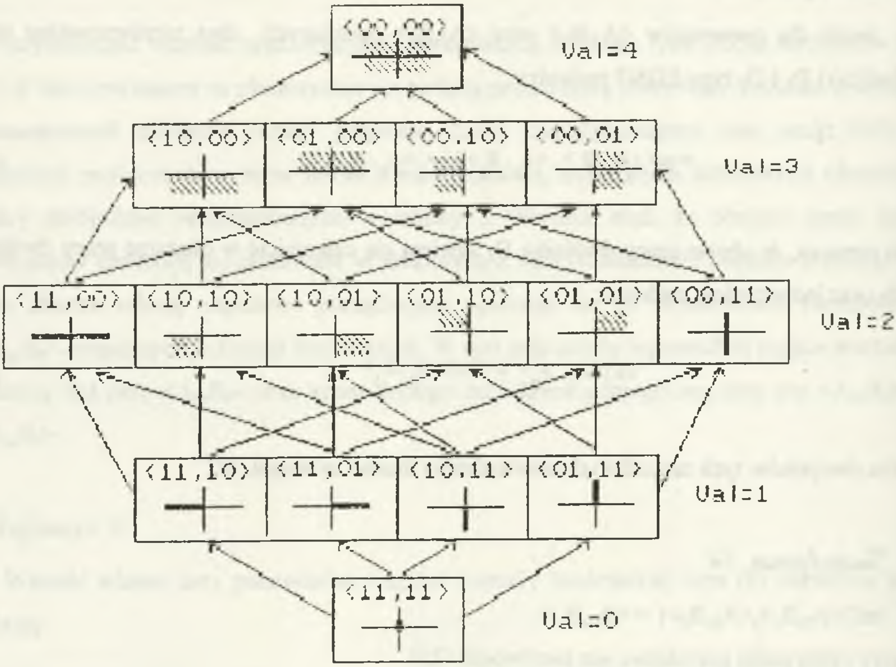
Twierdzenie 15

Jeżeli dla dwóch nierównoważnych sobie dwójników D_1 i D_2 typu EDSO zachodzi:

$\mathrm{Val}<A_1,B_1> = \mathrm{Val}<A_2,B_2>$

to obszary pracy tych dwójników nie zawierają się w sobie całkowicie.

Oczywiste też jest, że nie wszystkie obszary pracy dwójników o różnych wartościach własnych opisujących je parametrów muszą się zawierać w sobie. Zachodzi to w przypadku, gdy relacje (24) i (25) nie są jednocześnie spełnione. Przedstawione twierdzenia pozwalają ułożyć dwójniki ze zbioru EDSO w diagram przedstawiony na rys.6, ukazujący wzajemne zawieranie się ich obszarów pracy w sobie zgodnie z łączącymi je liniami skierowanymi. Na poszczególnych poziomach diagramu znajdują się dwójniki o jednakowych wartościach własnych ich parametrów.



Rys. 6.

W przedstawionej postaci tworzą one zbiór częściowo uporządkowany zwany kratą, wraz z wynikającymi z tego faktu własnościami. Zbiór ten tworzy kratę także dlatego, że parametry $<A_k,B_k>$ opisujące dwójniki EDSO tworzą szesnastoelementową algebrę Boole'a w przestrzeni $\{0,1\}^4$, a jednocześnie na bazie każdej algebry boolowskiej można zbudować kratę [5].

7. WŁASNOŚCI ZESTAWÓW FORMUŁ BOOLOWSKICH OPISUJĄCYCH DOWOLNE DIODOWE DWÓJNIKI OSOBLIWE

Aby porównywać własności zestawów formuł boolowskich, a tym samym własności opisywanych przez nie DDO należy sprawdzić, czy niektóre formuły składowe danego zestawu nie opisują obszarów pracy zawartych całkowicie w sobie, a tym samym jedna z nich może być pominięta, lub czy nie opisują sumy zbiorowej będącej innym obszarem elementarnym, a tym samym mogą być zastąpione inną formułą boolowską.

Twierdzenie 16

Jeżeli w zestawie n formuł boolowskich opisujących dwójnik D_0 dwie z nich F_k i F_l, dla których zachodzi Val F_k > Val F_l, spełniają twierdzenie 13, to formułę F_l można pominąć redukując rząd zestawu o jeden.

Z przytoczonych twierdzeń i własności diagramu na rys.6 jako kraty wynikają wnioski:

Twierdzenie 17

Jeżeli jedną z *n* formuł zestawu opisującego dwójnik D_0 jest formuła o parametrach <00,00>, to dwójnik ten jest zawsze równy noratorowi niezależnie od wartości parametrów pozostałych formuł składowych tego zestawu.

Twierdzenie 18

Jeżeli jedną z n formuł zestawu (dla $n > 1$) opisującego dwójnik D_0 jest formuła o parametrach <11,11>, to może być ona pominięta, a rząd zestawu zmniejszony o jedność. Są one konsekwencją tego, że norator jest kresem górnym, a nullator kresem dolnym całego zboru dwójników EDSO.

W przypadku gdy formuły składowe zestawu mają te same wartości własne, zastosowanie może mieć następująca zasada:

Twierdzenie 19

Jeżeli w zestawie n formuł boolowskich opisujących dwójnik D_0 dwie z nich F_k i F_l, dla których zachodzi Val F_k = Val F_l, spełniają $A_k = A_l$, lub $B_k = B_l$, wtedy można je zastąpić formułą F_Z, dla której $\langle A_Z,B_Z\rangle = \langle A_k,B_k\rangle \cap \langle A_l,B_l\rangle$ oraz oczywiście Val F_Z > Val F_l = Val F_2, redukując rząd zestawu o jeden.

Twierdzenie to jest spełnione, gdyż w tym przypadku suma zbiorowa obszarów pracy opisanych formułami F_k i F_l jest dokładnie równa obszarowi pracy opisanemu formułą F_Z. Korzystając z twierdzeń 16, 17, 18 i 19 można dokonywać redukcji rzędu zestawu formuł boolowskich opisujących dany DDO aż do najmniejszej możliwej wartości. Z ograniczenia liczby różnych obszarów pracy w zbiorze EDSO wynika ograniczoność wartości rzędu zestawu formuł od góry, co oznacza istnienie takiej liczby, powyżej której zestaw zawsze będzie redukowalny. Jak wynika z diagramu na rys.6, istotne dla rzędu zestawu formuł są (ze względu na twierdzenia 17 i 18) elementy o wartościach własnych 1, 2 i 3, których jest 14. Dla Val=1, każdy obszar zawiera się w sześciu innych o Val=2 i 3, co razem daje 7 elementów. Podobnie jest dla Val=3. Natomiast dla Val=2 każdy z obszarów zawiera się w dwóch, lub w nim są zawarte dwa, co razem daje liczbę pięciu elementów. Wynika stąd, że zestaw trzech formuł w najkorzystniejszym przypadku ma 15 związanych z nimi obszarów, co przekracza o jeden liczbę wszystkich możliwych. Nie ma więc takiego czwartego, który po dołączeniu do zestawu nie zawierałby się w pozostałych lub one w nim. Można zatem sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 20

Najwyższy możliwy nieredukowalny rząd zestawu formuł boolowskich opisujących dowolny diodowy dwójnik osobliwy jest co najwyżej równy 3.

Obszary pracy dwójników przedstawione na rys.5 są kolejno przykładami obszarów o najniższych nieredukowalnych rzędach 1, 2 i 3.

Aby stwierdzić, czy dane dwa zestawy formuł boolowskich opisują ten sam obszar pracy, należy sprawdzić, czy obszary opisywane przez formuły wchodzące w skład obu zestawów opisują obszary zawierające się w sobie, przy czym zawieranie się to może oczywiście zachodzić jedynie dla formuł o różnych wartościach własnych. W tym celu przydatna okazuje się reguła:

Twierdzenie 21

Jeżeli dwa zestawy formuł boolowskich tego samego najniższego nieredukowalnego rzędu zawierają formuły, które łączone w pary zawierające po jednej formule z każdego zestawu spełniają twierdzenie 13, to formuły te opisują ten sam obszar pracy.

Definicja 9

Zestawy formuł boolowskich spełniających twierdzenie 21 nazywane będą zestawami równoważnymi.

9. ŁĄCZENIE NIEELEMENTARNYCH DDO

Aby badać sieci zbudowane z dowolnych diodowych dwójników osobliwych, należy wprowadzić określenie dwójników równoważnych.

Definicja 10

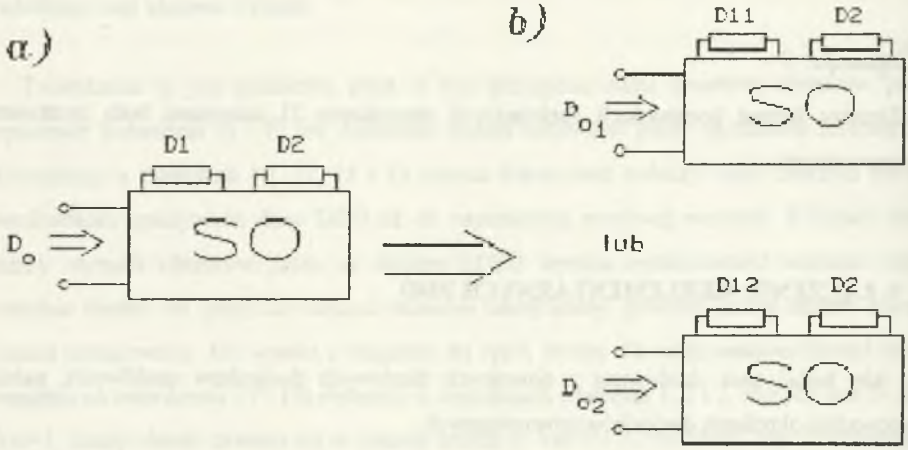
Dwa dowolne diodowe dwójniki osobliwe są sobie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ich obszary są identyczne.

Z twierdzenia 21 i określeń 9 i 10 wynika zatem, że dwójniki równoważne opisują identyczne lub równoważne zestawy formuł boolowskich.

Twierdzenie 22

Obszar pracy dwójnika osobliwego D_0 równoważnego pewnemu połączeniu dwu diodowych dwójników osobliwych $D_1^{(k)}$ rzędu k oraz $D_2^{(j)}$ rzędu j jest równy sumie zbiorowej l obszarów pracy wynikłych z połączeń poszczególnych k dwójników składowych $D_{11}^{(k)}$ do $D_{1k}^{(k)}$ dwójnika pierwszego z każdym z j dwójników składowych $D_{21}^{(j)}$ do $D_{2j}^{(j)}$ obszarów dwójnika drugiego, przy czym l=kj.

Dla dowodu zakłada się k=2, j=1. Stąd D_1 opisuje zestaw parametrów $\{<A_{11},B_{11}> \vee <A_{12},B_{12}>\}$ oraz D_2:$<A_2,B_2>$. Jakiekolwiek połączenie dwójników osobliwych musi być wykonane także za pomocą sieci osobliwej co najmniej rzędu pierwszego (EDSO), gdyż nawet najprostsze połączenie wymaga przerw i zwarć. Ogólnie przedstawiono to na rys.7, przy czym $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$. Jeżeli dowolny punkt pracy p_1 o współrzędnych (i_1,u_1) znajdzie się w obszarze pracy dwójnika D_1, oznacza to, że: $p_1 \in D_1 \Leftrightarrow p_1 \in D_{11}$ lub $p_1 \in D_{12}$.



Rys. 7.

Zatem po przetworzeniu go przez pozostałą część układu przechodzi on na zaciski wejściowe dwójnika D_O z obszaru D_{11} jako punkt pracy obszaru D_{01} lub z obszaru D_{12} jako punkt pracy obszaru D_{02}, co schematycznie przedstawiono na rys.7b. Zbiorowo odpowiada to sumie obszarów pracy $D_{01} \cup D_{02}$. Powyższe rozumowanie można uogólnić na dowolne wartości k, j.

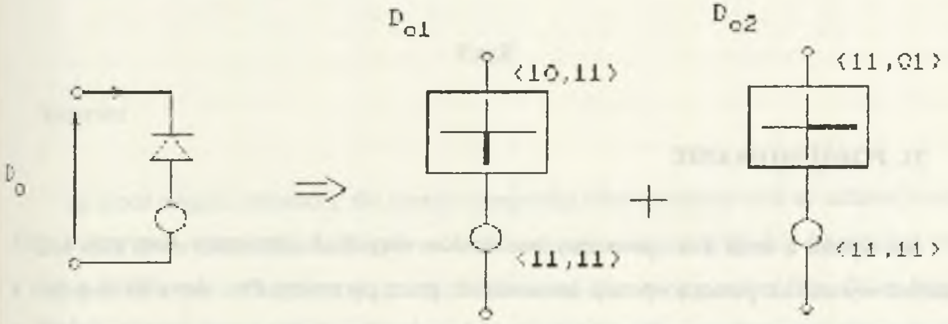
Podane twierdzenie pozwala rozszerzyć metody analizy EDSO podane w punkcie 3 na diodowe sieci osobliwe dowolnego rzędu. W analizie złożonych osobliwych sieci diodowych zawierających dwójniki wyższych rzędów może być przydatne bardziej ogólne twierdzenie wynikające z poprzedniego.

Twierdzenie 23

Każdą diodową sieć osobliwą zawierającą k dwójników o rzędach określonych liczbami r_1 do r_k można przedstawić jako równoważny jej zestaw $n = r_1, r_2..r_k$ sieci osobliwych rzędu pierwszego (EDSO) o tej samej strukturze topologicznej, przy czym suma zbiorowa obszarów pracy odpowiednich dwójników wszystkich tych sieci jest równa obszarowi pracy sieci zadanej.

10. PRZYKŁADY ANALIZY NIEELEMENTARNYCH DSO

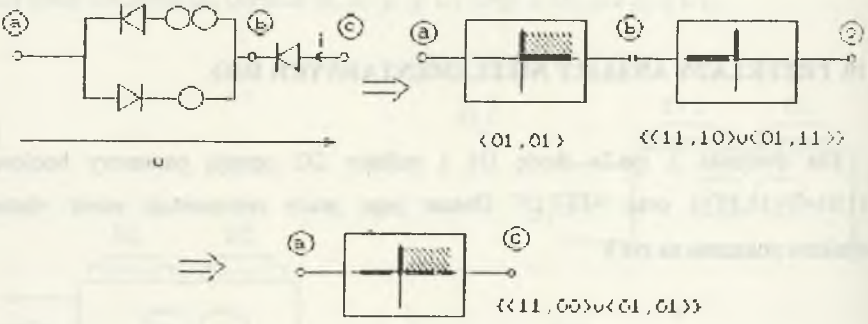
Dla dwójnika z rys.2a diodę D1 i nullator D2 opisują parametry boolowskie {<11,01>V<10,11>} oraz <11,11>. Obszar jego pracy reprezentuje suma obszarów dwójników pokazane na rys.8.



Rys.8.

Opisują je parametry boolowskie dla D_{01}:<11,11> i dla D_{02}:<11,01>, stąd cały dwójnik D_0 opisuje zestaw parametrów {<11,11>,<11,01>} redukowalny do <11,01>. Podobnie można wykazać prawdziwość modeli z diodą dla wszystkich dwójników ze zbioru EDSO.

Przykładem diodowego dwójnika osobliwego rzędu drugiego jest układ z rys.9.



Rys.9.

11. PODSUMOWANIE

Jak wynika z teorii krat, parametry boolowskie wszystkich elementów diagramu z rys.6 można wyrazić za pomocą operacji boolowskich przez parametry dwu dowolnych z nich o wartościach własnych różnych od 0 i 4, nie będących jednocześnie swoją negacją. Jednak ze względu na to, co powiedziano w dowodzie twierdzenia 8, przyjmuje się za zbiór podstawowy zgodnie z twierdzeniami 9 i 10 dwójniki z rys.2. Dwójniki te złożone są z elementów modelujących w sposób idealny pewne rzeczywiste elementy, takie jak dioda, przy czym stanowi ona tu diodowy dwójnik osobliwy rzędu drugiego, zastosowany do modeli DDO rzędu pierwszego, co wykazano w przykładach w punkcie poprzednim. Nie istnieje także połączenie modelujące sumę zbiorową obszarów pracy dwójników osobliwych, zatem niemożliwe jest utworzenie dwójnika osobliwego rzędu wyższego nieredukowalnego z dowolnych dwójników rzędów niższych. Musi zatem istnieć przynajmniej jeden model idealnego elementu rzędu wyższego, którą to rolę dla przypadku rzędu 2 pełni idealna dioda.

LITERATURA

1. Topór-Kamiński L.: Pojawianie się elementów osobliwych w idealnych układach aktywnych. Z.N. Pol. Śl. Elektryka 113, 1991.

2. Topór-Kamiński L.: Analiza bezinercyjnych sieci osobliwych metodą formuł boolowskich. Z.N. Pol. Śl. Elektryka 115, 1991.

3. Topór-Kamiński L.: Syntezaa bezinercyjnych sieci osobliwych metodą formuł boolowskich. Z.N. Pol. Śl. Elektryka 115, 1991.

4. Topór-Kamiński L.: Rozszerzenie pojęcia dwójnika rezystancyjnego na uogólnione dwójniki osobliwe. Z.N. Pol. Śl. Elektryka 126, 1992.

5. Birkhoff G., T.C. Bartee: Współczesna algebra stosowana. PWN, Warszawa 1983.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 15 czerwca 1994 r.

Abstract

As diode singular networks, the circuits comprising ideal one-ports such as nullator, norator and ideal diode are understood. Such network seen as a one-port (Fig.1) is described at every moment by a pair of numbers (i,u) which values can alter taking values from D set being a subset of R^2 space, called working domain. Diode singular one-ports with their working domains consisting of single generalized rectangles are called elementary set of diode singular network. To describe networks consisting of above mentioned one-ports using Boolean algebra, transformation (3) projecting the space of real numbers R into two-dimensional B^2 space, has been performed. Ordered pairs, on which some operations (definition 3 and theorem 2) are performed form elements of that space. Current and voltage on the terminals of singular one-port belonging to elementary set of diode singular networks are interdependent by means of Boolean formula of (8) type. The formula requires that parameters A and B take defined values from D^2 set. In Table 1 working domains and values of parameters A and B for all one-ports of elementary set of diode singular network are presented. The properties of above mentioned one-ports are described by theorems 3 and 4 as well as in Fig.2 and 3. Equivalence of diode singular one-ports is defined by definition 5. Searching for one-ports equivalent to those arranged in series/parallel network is performed using theorems 5, 6, 7 and 8. Basing on them as well as on theorems 9 and 10, the one-ports from Table 1 are defined as a set of basic elements in elementary set of diode singular network class. In Fig.4, an example of elementary

network class. In Fig.4, an example of elementary singular network for defined parameters A_o and B_o, has been given. For diode singular one-port, for which voltage and current values are defined by equations (19), theorem 11 enabling its description by means of alternative set of Boolean formulas (20), has been presented. Thus defined set of *n* Boolean formulas generates the set of diode singular one-ports of n-th order with its exemplary working domains presented in Fig.5. By means of definitions 6, 7 and 8 and theorems 13, 14 and 15 it is proved that the elementary set of diode singular networks forms a lattice spread upon the values of the parameters of Bolean formulas describing them and their properties resulted from that fact have been specified. They have been described by means of such values as: specific values *Val*, lower limit *inf* and upper limit *sup*. In order to compare the properties of Boolean formulas, i.e. the properties of diode singular one-ports described by them, theorems 15, 16, 17 and 18 basing on properties of the lattice, have been presented. Using such theorems, order reduction of Boolean formulas set describing the given one-port up to its possible lowest value, can be performed. It is proved in theorem 19 that the highest possible irreducible order of Boolean formulas set describing optional diode singular one-port is at most equal to. Equivalence of optional diode singular one-ports and the way of searching them is defined by definitions 9 and 10 and theorems 21 and 22 which are illustrated in Fig.7. In section 10, examples of analysis of non-elementary diode singular networks of Fig.8 and 9, has been given. It is stated in conclusions that, as it arises from lattice theory, Boolean parameters for all elements of diagram of Fig.6 can be expressed by means of Boolean operations, by the parameters of two of them having values different from 0 and 4, not being their mutual negation at the same time. However, considering the substance of theorem 8 proof, the one-ports from Fig.2 are assumed as a basic set according to theorems 9 and 10. Those one-ports are composed of the elements modelling in ideal way some real elements, such as diode. Here, it is a diode singular one-port of second order applied for diode singular one-port models of first order which has been presented in the examples in section 10. There is no link modelling collective sum of singular one-ports domains, therefore there is impossible to form singular irreducible one-port of higher order from an one-ports of lower orders. There exists , therefore, at least one model of ideal element of higher order. In the case of second order it is an ideal diode model.