

Zofia CICHOWSKA

PRZEMIANY ENERGETYCZNE W KONDENSATORZE I CEWCE - ASPEKT DYDAKTYCZNY W ELEKTROTECHNICE TEORETYCZNEJ

Streszczenie. W początkowym etapie wykładu elektrotechniki teoretycznej celowe jest rozważenie stanu nieustalonego w prostym obwodzie RC i RL przy wymuszeniu stałym. Szczególną uwagę zwrócono na przebiegi mocy chwilowej i energii cewki i kondensatora. Przeanalizowano również obwód szeregowy LC przy wymuszeniu sinusoidalnym w stanie ustalonym.

ENERGY TRANSFORMATIONS IN CAPACITOR AND INDUCTOR - DIDACTIC ASPECT IN THE CIRCUIT THEORY

Summary It seems quite reasonable to consider transients in simple RL and RC networks with DC voltage source at the very beginning of lectures on the circuit theory. The instantaneous power and energy of the inductor and capacitor has been considered with special attention. Analysis of serial LC branch supplied from sinusoidal voltage source has been also carried out.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОНДЕНСАТОРЕ И КАТУШКЕ - ДИДАКТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

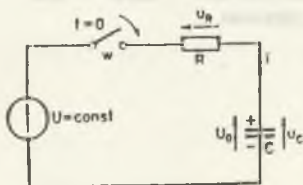
Резюме. В начале лекций по теоретической электротехнике целесообразным является рассматривать переходный процесс в простой цепи RC и RL с постоянным воздействием. Особое внимание обращено на характеристики мгновенной мощности и энергии катушки и конденсатора. Анализируется также последовательная цепь LC с синусоидальным воздействием в установившемся режиме.

1. WSTĘP

Opis obwodu elektrycznego przy dowolnych przebiegach czasowych prądów i napięć jest wprowadzany we wczesnym etapie wykładu z elektrotechniki teoretycznej I na I lub II semestrze studiów. Przygotowanie z matematyki jest wtedy jeszcze niewystarczające i to przysparza wiele kłopotów zarówno studentom, jak i wykładowcom. Wprowadzenie kondensatora i cewki tylko jako elementów, które realizują zależności $u_L = L \frac{di}{dt}$ oraz $i = C \frac{du_C}{dt}$ z poprzedzającym je niewielkim wstępem o zjawiskach zachodzących w polu magnetycznym i elektrycznym, jest niewystarczające.

Bazując na długoletnich własnych doświadczeniach dydaktycznych uważam, że dobrym wyjściem jest rozważenie stanu nieustalonego w prostych obwodach RC i RL przy wymuszeniu stałym z niezerowymi warunkami początkowymi. Analizę można przeprowadzać przy użyciu prostego aparatu matematycznego, który pozwala jednak wyeksponować wielkości związane ze zmianami stanu energetycznego cewki i kondensatora przy różnych warunkach początkowych. W większości podręczników jako wynik analizy podaje się tylko przebiegi prądu i napięcia, czyli u_C , i lub i , u_L , natomiast dla pełnego zrozumienia zjawisk energetycznych cewki i kondensatora celowe jest przeanalizowanie i przedstawienie graficznie kompletu przebiegów u , i , p , W - czyli napięcia, prądu, mocy chwilowej i energii cewki i kondensatora. Zestawienie wykresów czasowych wymienionych czterech wielkości przy różnych warunkach początkowych pozwala wyeksponować zależność przemian energetycznych w kondensatorze i cewce od zmieniających się warunków początkowych.

2. PRZEMIANY ENERGETYCZNE W PROSTYM OBWODZIE RC



Rys.1.

Na rys.1 przedstawiono obwód RC, w którym w chwili $t = 0$ zostaje zamknięty wyłącznik, a kondensator dla $t < 0$ był naładowany do napięcia $u_C(0) = U_0$. Dla $t > 0$ równanie opisujące obwód ma postać

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U,$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U, \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $u_c(0) = U_0$.

Rozwiązanie równania (1) z dokładnością do stałej całkowania ma postać

$$u_c = U + k_2 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (2)$$

Rozwiązanie to musi spełniać warunek początkowy, co każdorazowo pozwoli wyznaczyć stałą całkowania k_2 i uzyskać rozwiązanie dokładne.

Rozważmy najpierw obwód przy $u_c(0) = 0$, a następnie przy różnych wartościach i różnej biegunowości napięcia początkowego.

a) Dla $t = 0$, $u_c(0) = 0$, więc na podstawie wzoru (2) $k_2 = -U$. Rozwiązanie dokładne dla u_c i pozostałe przebiegi, przy oznaczeniu $T = RC$, przy zerowym warunku początkowym mają postać:

$$u_c = U \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{T}}, \quad p_c = u_c i = \frac{U^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{2t}{T}} \right),$$

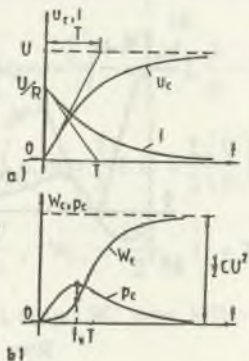
$$W_c = \int_0^t p_c dt = \frac{1}{2} C u_c^2 = \frac{CU^2}{2} \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T}} + e^{-\frac{2t}{T}} \right).$$

Z warunku $\frac{dp_c}{dt} = 0$ można wyznaczyć czas $t_x = T \ln 2 = 0,693T$, po którym występuje

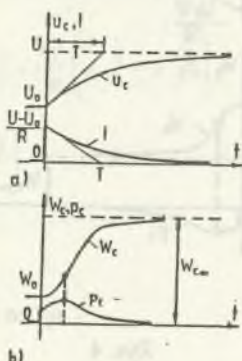
maksimum mocy chwilowej kondensatora, a równocześnie punkt przegięcia przebiegu energii kondensatora.

Dla $t = t_x$, $u_c(t_x) = \frac{U}{2}$, $i(t_x) = \frac{U}{2R}$, $p_c(t_x) = \frac{U^2}{4R}$, $W_c(t_x) = \frac{1}{4} W_{C\infty}$ gdzie

$W_{C\infty} = \frac{1}{2} CU^2$. Przebiegi u_c , i , p_c , W_c przy $u_c(0) = 0$ zestawiono na rys.2.



Rys. 2.



Rys. 3.

b) Dla $t = 0$, $u_c(0) = U_0$, czyli $W_0 = \frac{1}{2}CU_0^2$. Na podstawie wzoru (2) $k_2 = U_0 - U$.

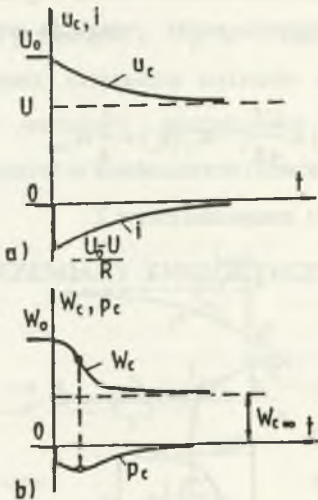
Przebiegi przy niezerowym warunku początkowym o biegunowości podanej na rys.1 mają postać:

$$u_c = U - (U - U_0)e^{-\frac{t}{T}}, \quad i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U - U_0}{R} e^{-\frac{t}{T}},$$

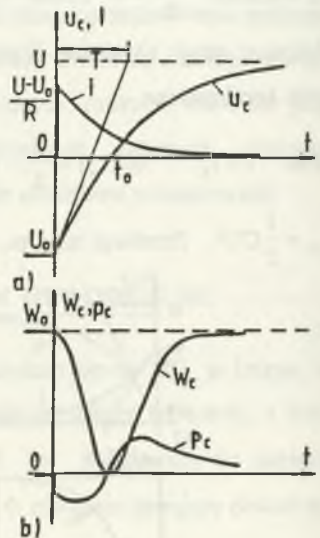
$$p_c = u_c i = \frac{U - U_0}{R} \left[U e^{-\frac{t}{T}} - (U - U_0) e^{-\frac{2t}{T}} \right],$$

$$W_c = W_0 + \int_0^t p_c dt = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}C \left[U^2 - 2U(U - U_0) e^{-\frac{t}{T}} + (U - U_0)^2 e^{-\frac{2t}{T}} \right].$$

Na rys. 3,4,5 zestawiono przebiegi u_c , i , p_c , W_c dla następujących przypadków: 1) $U_0 > 0$, $U_0 < U$ - rys.3 ($U_0 = 0,5U$), 2) $U_0 > 0$, $U_0 > U$ - rys.4 ($U_0 = 1,5U$), 3) $U_0 < 0$ - rys.5 ($U_0 = -U$, $u_c(t_0) = 0$, $t_0 = T \ln \frac{U - U_0}{U}$). Przypadki 2 i 3 pozwalają obserwować proces oddawania energii przez kondensator ($p_c < 0$).



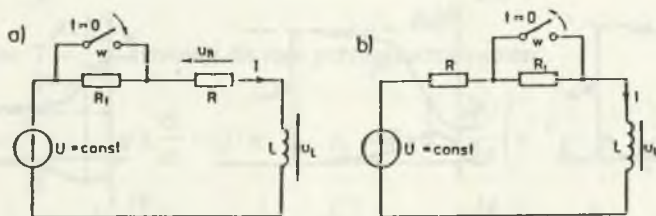
Rys. 4.



Rys. 5.

3. PRZEMIANY ENERGETYCZNE W PROSTYM OBWODZIE RL

Na rys.6a przedstawiono obwód RL, w którym w chwili, $t = 0$ zostaje zamknięty wyłącznik w , co pozwala zrealizować narastanie prądu w cewce przy zerowym lub niezerowym warunku początkowym. Na rys. 6b w chwili $t = 0$ zostaje otwarty wyłącznik w . W układzie tym następuje zmniejszanie się wartości prądu.



Rys. 6.

a) Dla czasów $t > 0$, dla układu z rys.6a, przy $R_1 = \infty$, obowiązuje równanie:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U, \quad (3)$$

z warunkiem początkowym $i(0) = 0$.

Rozwiązanie równania (3) z dokładnością do stałej całkowania ma postać:

$$i = \frac{U}{R} + k_2 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (4)$$

Dla $t = 0$, $i(0) = 0$, więc na podstawie wzoru (4) $k_2 = -\frac{U}{R}$. Przy zerowym warunku

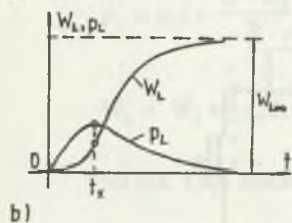
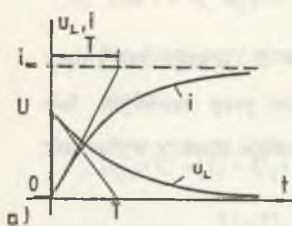
początkowym, przy oznaczeniu $T = \frac{L}{R}$, przebiegi mają postać:

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad u_L = L \frac{di}{dt} = U e^{-\frac{t}{T}}, \quad p_c = u_L i = \frac{U^2}{R} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{2t}{T}} \right),$$

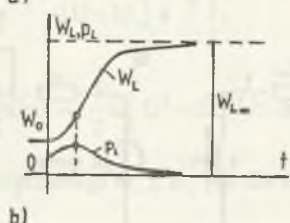
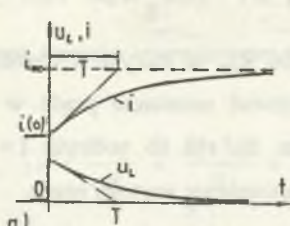
$$W_L = \int_0^t p_L dt = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{L}{2} \left(\frac{U}{R} \right)^2 \left(1 - 2e^{-\frac{t}{T}} + e^{-\frac{2t}{T}} \right),$$

$$i_\infty = \frac{U}{R}, \quad W_{L\infty} = \frac{Li_\infty^2}{2}, \quad t_x = T \ln 2.$$

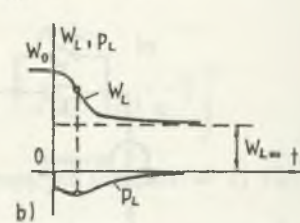
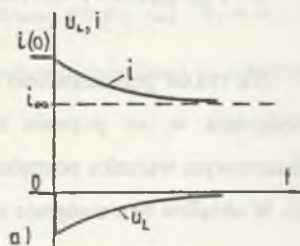
Przebiegi i , u_L , p_L , W_L przy $i(0) = 0$ przedstawiono na rys.7.



Rys. 7.



Rys. 8.



Rys. 9.

- b) Dla czasów $t > 0$, dla układu z rys. 6a przy $R_1 < \infty$, przyjmując dla prostoty $R_1 = R$, otrzymuje się równanie wyjściowe identyczne z poprzednim

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U,$$

z warunkiem początkowym $i(0) = \frac{U}{2R}$, czyli $W_0 = \frac{L[i(0)]^2}{2}$.

Na podstawie równania (7) $k_2 = -\frac{U}{2R}$. Przy niezerowym warunku początkowym przebiegi w obwodzie z rys. 6a mają postać:

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{T}} \right), \quad u_L = \frac{U}{2} e^{-\frac{t}{T}}, \quad p_L = u_L i = \frac{U^2}{2R} \left(e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{2t}{T}} \right),$$

$$W_L = W_0 + \int_0^t p_L dt = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{L(U)^2}{2(R)^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{2t}{T}} \right), \quad i_\infty = \frac{U}{R}, \quad W_{L\infty} = \frac{Li_\infty^2}{2}.$$

Przebiegi te przedstawione są na rys. 8.

- c) Dla układu z rys. 6b dla $t > 0$, przyjmując $R_1 = R$, obowiązuje następujące równanie:

$$L \frac{di}{dt} + 2Ri = U, \quad (5)$$

z warunkiem początkowym $i(0) = \frac{U}{R}$, czyli $W_0 = \frac{L[i(0)]^2}{2}$.

Rozwiązanie z dokładnością do stałej całkowania ma teraz postać:

$$i = \frac{U}{2R} + k_2 e^{-\frac{2R}{L}t} \quad (6)$$

Dla $t = 0$, $i(0) = \frac{U}{R}$, więc ze wzoru (6) otrzymuje się $k_2 = \frac{U}{2R}$.

Przy oznaczeniu $T' = \frac{L}{2R}$ przebiegi dla tego przypadku mają postać:

$$i = \frac{U}{2R} \left(1 + e^{-\frac{t}{T'}} \right), \quad u_L = L \frac{di}{dt} = -U e^{-\frac{t}{T'}}, \quad p_L = u_L i = -\frac{U^2}{2R} \left(e^{-\frac{t}{T'}} + e^{-\frac{2t}{T'}} \right),$$

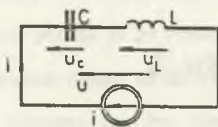
$$W_L = W_0 + \int_0^t p_L dt = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{2R} \right)^2 \left(1 + 2e^{-\frac{t}{T'}} + e^{-\frac{2t}{T'}} \right), \quad i_{\infty} = \frac{U}{2R}, \quad W_{L\infty} = \frac{1}{2} Li_{\infty}^2.$$

Przebiegi te przedstawiono na rys.9.

Przebiegi prądu i napięcia mogą być obserwowane na oscylografie w laboratorium zjawiskowym na modelu fizycznym, natomiast obserwacja przebiegów mocy chwilowej i energii jest możliwa w laboratorium komputerowym. Symulacja komputerowa jest więc dobrym uzupełnieniem analizy przemian energetycznych cewki i kondensatora na przykładzie badania stanów nieustalonych w prostym obwodzie RL i RC przy wymuszeniu stałym.

4. PRZEMIANY ENERGETYCZNE W OBWODZIE LC PRZY WYMUSZENIU SINUSOIDALNYM W STANIE USTALONYM

Do rozważań przyjęto obwód szeregowy (rys.10) przy wymuszeniu prądowym $i = |I_m| \sin(\omega t + \alpha)$.



Rys. 10.

Napięcia w obwodzie:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L |I_m| \cos(\omega t + \alpha),$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = -\frac{1}{\omega C} |I_m| \cos(\omega t + \alpha),$$

$$u = u_L + u_C = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) |I_m| \cos(\omega t + \alpha).$$

Moce chwilowe:

$$p_L = u_L i = \omega L |I|^2 \sin(2\omega t + 2\alpha), \quad |I| = \frac{|I_m|}{\sqrt{2}}, \quad p_C = u_C i = -\frac{1}{\omega C} |I|^2 \sin(2\omega t + 2\alpha),$$

$$p = u i = p_L + p_C = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) |I|^2 \sin(2\omega t + 2\alpha).$$

Energia poszczególnych elementów:

$$W_L = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2\omega} \omega L |I|^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\alpha)], \quad W_{Lmx} = \frac{1}{2\omega} \omega L |I_m|^2,$$

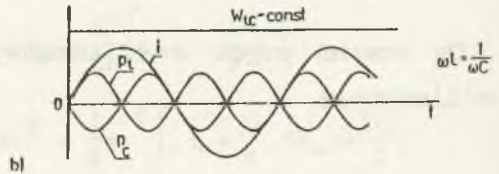
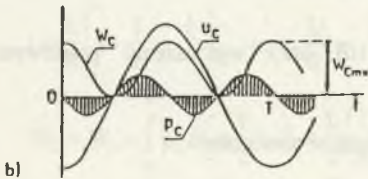
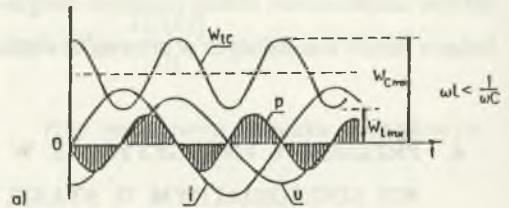
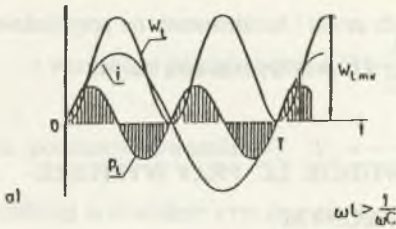
$$W_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{1}{\omega C} |I|^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)], \quad W_{Cmx} = \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{1}{\omega C} |I_m|^2.$$

Energia całkowita układu

$$W_{LC} = W_L + W_C = \frac{W_{Lmx} + W_{Cmx}}{2} - \frac{1}{2\omega} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) |I|^2 \cos(2\omega t + 2\alpha).$$

Na rys. 11 a i b pokazano wybrane przebiegi dla $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, na rys.12a dla $\omega L < \frac{1}{\omega C}$,

na rys.12b dla $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.



Rys.11.

Rys.12.

O chwilowym charakterze elementów L i C pod względem energetycznym (odbiornik czy wydajnik energii) świadczy znak mocy chwilowej elementu. Właśnie dlatego we wszystkich rozważanych przypadkach dwie wielkości elementu moc chwilowa i energia były zestawiane razem. Pozwala to konfrontować ujemny znak mocy chwilowej ze zmniejszaniem się energii elementu i dodatni znak mocy chwilowej ze wzrostem energii elementu.

LITERATURA

1. Bolkowski S.: Elektrotechnika teoretyczna. Teoria obwodów elektrycznych t.1. WNT, Warszawa 1982.
2. Cichowska Z.: Topologiczna analiza obwodów elektrycznych liniowych. Wykład monograficzny. Skrypt uczelniany Pol.Śl. wyd.III, Gliwice 1993.
3. Cichowska Z., Pasko M., Litwinowicz E.: Przykłady i zadania z elektrotechniki teoretycznej cz.I. Obwody rezystancyjne i obwody z kondensatorami. Skrypt uczelniany Pol.Śl. wyd.I, Gliwice 1993.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Adam Macura

Wpłynęło do Redakcji 25 marca 1994 r.

Abstract

Consideration of transients for constant excitations in simple RL and RC networks with nonzero initial conditions, at the very beginning of lectures on the circuit theory is suggested. The analysis of such circuits requires simple mathematical background. Apart from evaluation of current and voltage response of the capacitor and the inductor in RC and RL network, respectively, the analysis of instantaneous power and energy of the element for various initial conditions seems to be reasonable. The sign of the power and energy of the element defines instantaneous nature of the element from the energetic point of view and assigns a direction of energy changes for the element. It is the reason why instantaneous energy and power waveforms are confronted in all considered cases.