



P. 3347/95

**MODELOWANIE 3-FAZOWYCH  
MASZYN INDUKCYJNYCH  
PRZY UWZGLĘDNIENIU  
WYŻSZYCH HARMONICZNYCH  
PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU**

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI  
Roman MIKSIEWICZ

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**

**ZESZYTY NAUKOWE**

Nr 1272



P. 3347/95

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI, Roman MIKSIEWICZ

**MODELOWANIE 3-FAZOWYCH  
MASZYN INDUKCYJNYCH  
PRZY UWZGLĘDNIENIU  
WYŻSZYCH HARMONICZNYCH  
PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU**

GLIWICE 1995

## OPINIODAWCY

Dr hab. inż. Piotr Wach – Profesor Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu

Dr hab. inż. Jan Zawilak – Profesor Politechniki Wrocławskiej

## KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU – Doc. dr inż. Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Lesko

## REDAKCJA

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

## REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

## PROJEKT OKŁADKI

Joanna Serdyńska

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072-4688

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

---

Nakład 330+53 egz. Ark. wyd. 12,5. Ark. druk. 13,125. Papier offset. kl. III 70x100, 80g  
Podpisano i oddano do druku 28.02.1995 r. Druk ukończono w marcu 1995 r.  
Zam. 15/95 Cena zł 5,00

---

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, Gliwice, ul. Pszczyńska 44

P. 109/95

# SPIS TREŚCI

	str.
Wykaz oznaczeń .....	9
Wstęp .....	13
<hr/>	
1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmoniczných przestrzenných przepływu .....	17
1.1. Równania maszyny klatkowej we współrzędnych fazowych.....	17
1.2. Równania maszyny klatkowej we współrzędnych $\alpha\beta$ .....	30
1.3. Schematy rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne .....	37
1.4. Struktura macierzy indukcyjności stojan-wirnik we współrzędnych $\alpha\beta$ .....	47
1.5. Wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan a redukcja liczby współrzędnych wirnika.....	67
1.6. Dominujące harmoniczne przestrzenne przepływu stojana i wirnika .....	71
1.7. Zasady redukcji schematu rozkładu maszyny .....	81
1.8. Procedura formułowania układu równań różniczkowych maszyny przy uwzględnieniu wyższych harmoniczných przestrzenných przepływu .....	90
<hr/>	
2. Pasożytnicze momenty przemienne (synchroniczne) i asynchroniczne .....	98
2.1. Tory generowania pasożytniczych momentów przemienneých i asynchronicznych .....	98

2.2. Pasożytnicze momenty przemienne (synchroniczne) I rzędu - mechanizm powstawania, wyszukiwanie składowych dominujących, podstawowe własności w stanie ustalonym .....	107
2.3. Wpływ prądów reakcji wtórnej związanych ze współrzędną zerową stojana na pasożytnicze momenty przemienne I rzędu .....	127
<hr/>	
3. Komputerowa analiza dynamiki maszyn indukcyjnych .....	135
3.1. Klasyfikacja modeli poliharmonicznych .....	135
3.2. Formułowanie uproszczonych modeli poliharmonicznych o zminimalizowanej liczbie współrzędnych i współczynników .....	144
3.3. Ogólna struktura układu równań różniczkowych do obliczeń numerycznych .....	157
3.4. Badanie formalnej poprawności modelu matematycznego oraz programu komputerowego .....	161
3.5. Charakterystyczne własności dynamiczne modeli poliharmonicznych .....	181
3.6. O możliwościach stosowania modeli minimalnoharmonicznych .....	194
<hr/>	
Literatura .....	205
<hr/>	

# CONTENTS

	pp.
List of symbols .....	9
Introduction .....	13
<hr/>	
1. Mathematical model of squirrel-cage machine including higher	
MFF space harmonics .....	17
1.1. Equations of squirrel-cage machine in phase coordinates .....	17
1.2. Equations of squirrel-cage machine in $\alpha\beta$ coordinates .....	30
1.3. Diagrams of decomposition of induction machine into elementary machines .....	37
1.4. Structure of inductance matrix in $\alpha\beta$ coordinates .....	47
1.5. Rotor coordinates and fitting of rotor-stator inductance matrix .....	67
1.6. Predominant MFF space harmonics of stator and rotor .....	71
1.7. Reduction of diagram of decomposition .....	81
1.8. Procedure for formulating system of differential equations of machine .....	90
<hr/>	
2. Parasitic pulsating (synchronous) and asynchronous torques .....	98
2.1. Paths for generating pulsating and asynchronous parasitic torques .....	98
2.2. Parasitic pulsating (synchronous) torques of I order - principle of generation, selection of predominant components, basic properties at steady-state .....	107
2.3. Effect of currents of secondary stator reaction related to zero coordinate on parasitic pulsating torques of I order .....	127

3. Computer analysis of dynamic of induction machine .....	135
3.1. Classification of poliharmonic models .....	135
3.2. Formulating simplified poliharmonic model including minimal number of coordinates and coefficients .....	144
3.3. General form of system of differential equations for numerical computation.....	157
3.4. Testing of formal correctness of mathematical model and computer program .....	161
3.5. Individual dynamic properties of poliharmonic models .....	181
3.6. Most possibilities of minimal harmonic models .....	194
References .....	205

# ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
Список обозначений .....	9
Введение .....	13
<hr/>	
1. Математическая модель асинхронного короткозамкнутого электродвигателя учитывающая высшие пространственные гармоники магнитодвижущей силы .....	17
1.1. Уравнения короткозамкнутой машины в системе фазовых координат .....	17
1.2. Уравнения короткозамкнутой машины в системе координат $\alpha\beta$ .....	30
1.3. Схемы разложения асинхронной машины на элементарные машины .....	37
1.4. Структура матрицы индуктивностей в системе координат $\alpha\beta$ .....	47
1.5. Заполнение матрицы индуктивностей ротор-статор а редукция числа координат ротора .....	67
1.6. Доминирующие пространственные гармоники магнитодвижущей силы статора и ротора .....	71
1.7. Редукция схемы разложения машины .....	81
1.8. Процедура формулировки системы дифференциальных уравнений машины учитывающая высшие пространственные гармоники магнитодвижущей силы.....	90
<hr/>	
2. Паразитные переменные (синхронные) и асинхронные моменты .....	98
2.1. Цепи генерирования паразитных переменных и асинхронных моментов .....	98
2.2. Паразитные переменные (синхронные) моменты $I_{го}$ порядка - механизм возникновения, поиск доминирующих составляющих, основные свойства в установившемся состоянии .....	107



2.3. Влияние токов вторичной реакции статора, связанных с нулевой составляющей, на паразитные переменные моменты $I$ го порядка .....	127
<hr/>	
3. Компьютерный анализ переходных процессов	
асинхронных машин .....	135
3.1. Классификация полигармонических моделей .....	135
3.2. Формулировка упрощенных полигармонических моделей с минимальным числом составляющих и коэффициентов .....	144
3.3. Общая структура системы дифференциальных уравнений для численных расчётов .....	157
3.4. Испытание формальной корректности математической модели и компьютерной программы .....	161
3.5. Характерные динамические свойства полигармонических моделей .....	181
3.6. О возможности применения упрощенных минимальногармонических моделей (с несколькими гармониками) .....	194
<hr/>	
Литература .....	205
<hr/>	

## WYKAZ OZNACZEŃ

- $b_o$  - szerokość szczyrbiny żłobka,  
 $b_{sq}$  - skos żłobków wirnika,  
 $d$  - średnica wewnętrzna stojana,  
 $\dot{i}_s$  - wektor przestrzenny prądu stojana,  
 $[i_s]$  - wektor prądu stojana we współrzędnych fazowych,  
 $i_{si}$  - wartość chwilowa prądu  $i$ -tej fazy stojana,  
 $i_{s\alpha}, i_{s\beta}, i_{s0}$  - współrzędna  $\alpha$ , współrzędna  $\beta$  i współrzędna zerowa prądu stojana,  
 $[i_s^{\alpha\beta}]$  - wektor prądu stojana we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $i_{rj}$  - wartość chwilowa  $i$ -tego prądu oczkowego wirnika,  
 $i_{ra1}, i_{ra2}, \dots$  - współrzędne  $\alpha$  prądu wirnika,  
 $i_{r\beta1}, i_{r\beta2}, \dots$  - współrzędne  $\beta$  prądu wirnika,  
 $i_{r0}$  - współrzędna zerowa prądu wirnika,  
 $i_{rop}$  - dodatkowa współrzędna zerowa prądu wirnika, gdy  $Q_r$  - liczba parzysty,  
 $[i_r^{\alpha\beta}]$  - wektor prądu wirnika we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $J$  - moment bezwładności,  
 $[K_s]$  - macierz transformacji  $\alpha\beta$  dla wirnika,  
 $k_{wsv}, k_{wrv}$  - współczynnik uzwojenia stojana (wirnika) dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $k_{dsv}, k_{drv}$  - współczynnik grupy uzwojenia stojana (wirnika) dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $k_{psv}, k_{prv}$  - współczynnik skrótu uzwojenia stojana (wirnika) dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $k_{sqv}$  - współczynnik skosu dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $l_c$  - długość zastępcza rdzenia maszyny,  
 $L_{mv}$  - indukcyjność magnesująca dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $L_{sv}, L_{rv}$  - indukcyjność główna stojana (wirnika) dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $L_{srv}$  - indukcyjność wzajemna stojan-wirnik dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $L_{\sigma s}, L_{\sigma r}$  - indukcyjność rozproszenia stojana (wirnika),  
 $L_{\sigma o}$  - indukcyjność rozproszenia pojedynczego oczka klatki wirnika,  
 $L_{\sigma pr}$  - indukcyjność rozproszenia pręta klatki wirnika,

- $[L_{\sigma s}], [L_{\sigma r}]$  - macierz indukcyjności rozproszenia stojana (wornika) we współrzędnych fazowych,  
 $[L_{\sigma s}^{\alpha\beta}], [L_{\sigma r}^{\alpha\beta}]$  - macierz indukcyjności rozproszenia stojana (wornika) we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $[M_{ss}], [M_{rr}], [M_{sr}], [M_{rs}]$  - macierze indukcyjności głównych stojan-stojan, wornik-wornik, stojan-wornik, wornik-stojan,  
 $[M_{ss}^{\alpha\beta}], [M_{rr}^{\alpha\beta}], [M_{sr}^{\alpha\beta}], [M_{rs}^{\alpha\beta}]$  - macierze indukcyjności głównych maszyny we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $[M_{ssv}^{\alpha\beta}], [M_{rrv}^{\alpha\beta}], [M_{srv}^{\alpha\beta}], [M_{rsv}^{\alpha\beta}]$  - macierze indukcyjności głównych maszyny dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $N_s$  - liczba zwojów (połączonych szeregowo) stojana,  
 $N_r$  - liczba zwojów (połączonych szeregowo) wornika,  
 $0$  - indeks dla składowej zerowej,  
 $0p$  - indeks dla składowej zerowej gdy liczba faz układu jest parzysta,  
 $p$  - liczba par biegunów,  
 $Q_s, Q_r$  - liczba żłobków stojana (wornika),  
 $r$  - indeks dla wielkości i parametrów związanych z wornikiem,  
 $R_s$  - rezystancja fazowa uzwojenia stojana,  
 $R_o$  - rezystancja pojedynczego oczka wornika,  
 $R_{pr}$  - rezystancja pręta klatki wornika,  
 $[R_s], [R_r]$  - macierz rezystancji stojana (wornika) we współrzędnych fazowych,  
 $[R_s^{\alpha\beta}], [R_r^{\alpha\beta}]$  - macierz rezystancji stojana (wornika) we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $\{R_1\}, \{R_2\}, \dots$  podzbiory harmonicznych przestrzennych wornika związane z kolejnymi wierszami schematu rozkładu,  
 $s_v$  - poślizg dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,  
 $t$  - czas,  
 $t_s, t_r$  - podziałka żłobkowa stojana (wornika),  
 $T_e$  - moment elektromagnetyczny,  
 $T_{ev}$  - moment elektromagnetyczny  $v$ -tej maszyny elementarnej,  
 $T_m$  - moment mechaniczny na wale silnika,  
 $T_s$  - okres charakterystyki kątowej pasożytniczego momentu synchronicznego,  
 $T_{e(v,\rho)}$  - pasożytniczy moment związany z parą harmonicznych przestrzennych  $(v,\rho)$ ,  
 $T_{e(v,\rho)s}$  - pasożytniczy moment synchroniczny związany z parą harmonicznych przestrzennych  $(v,\rho)$ ,  
 $T'_{e(v,\rho)}$  - składowa momentu pasożytniczego związanego z parą harmonicznych przestrzennych  $(v,\rho)$  ( $v$  - maszyna wzbudzająca,  $\rho$  - maszyna synchroniczna),

- $T''_{\alpha(\rho, \nu)}$  - składowa momentu pasożytniczego związanego z parą harmonicznymi przestrzennymi ( $\nu, \rho$ ) ( $\rho$  - maszyna wzbudzająca,  $\nu$  - maszyna synchroniczna),  
 $T_I$  - moment rozruchowy,  
 $T_I\{\mathcal{Q}(0)\}$  - moment rozruchowy w funkcji początkowego kąta położenia wirnika,  
 $T_{Ias}$  - asynchroniczny moment rozruchowy,  
 $T_{\alpha(\nu)}$  - pasożytniczy moment asynchroniczny związany z  $\nu$ -tą harmoniczną przestrzenną,  
 $T_{\alpha(\rho)}$  - moment asynchroniczny główny związany z  $\rho$ -tą harmoniczną,  
 $[u_r]$  - wektor napięcia wirnika we współrzędnych fazowych,  
 $[u_r^{\alpha\beta}]$  - wektor napięcia wirnika we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $u_{ri}$  - wartość chwilowa napięcia i-tej fazy wirnika,  
 $[u_s]$  - wektor napięcia stojana we współrzędnych fazowych,  
 $[u_s^{\alpha\beta}]$  - wektor napięcia stojana we współrzędnych  $\alpha\beta$ ,  
 $u_{si}$  - wartość chwilowa napięcia i-tej fazy stojana,  
 $u_{s\alpha}, u_{s\beta}, u_{s0}$  - współrzędna  $\alpha$ , współrzędna  $\beta$  i współrzędna zerowa napięcia stojana,  
 $U_{sf}$  - napięcie fazowe 3-fazowej sieci symetrycznej (wartość skuteczna),  
 $Y_{Q_s}, Y_{Q_r}$  - rozpiętość zezwoju (poskok) stojana (wirnika) wyrażona w żłobkach,  
 $\alpha_r$  - kątowa podziałka żłobkowa wirnika,  
 $\delta_{cf}$  - grubość zastępcza szczeliny uwzględniająca uzłobkowanie i namagnesowanie rdzenia,  
 $\varphi$  - kąt przesunięcia fazowego napięcia względem prądu,  
 $\Lambda$  - permeancja dla strumienia podstawowej harmonicznnej przestrzennej,  
 $\mu_o$  - względna przenikalność magnetyczna próżni,  
 $\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \rho, \lambda$  - rzędy harmonicznnych przestrzennych,  
 $\nu_m$  - rząd najwyższej uwzględnianej harmonicznnej przestrzennej,  
 $\mathcal{Q}$  - kąt obrotu wirnika,  
 $\mathcal{Q}_o$  - kąt obrotu wirnika w chwili zaistnienia stanu ustalonego,  
 $\mathcal{Q}(0)$  - kąt obrotu wirnika w chwili  $t=0$ ,  
 $\omega_o$  - pulsacja sieci,  
 $\omega_p$  - pulsacja momentów przemiennych pochodzących od pasożytniczych momentów synchronicznych,  
 $\Omega_m$  - prędkość kątowa wirnika,  
 $\Omega_{ms}$  - prędkość synchroniczna pasożytniczego momentu synchronicznego.

## WSTĘP

Przez długi okres rozwoju maszyn elektrycznych - praktycznie aż do czasu pojawienia się komputerów - analiza własności dynamicznych maszyny indukcyjnej była oparta przede wszystkim na modelu uwzględniającym główną harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego, czyli na tzw. modelu monoharmonicznym i wyniki tejsze analizy ukształtowały i ugruntowały szereg przekonań o możliwych zachowaniach i własnościach dynamicznych maszyny.

Nowy okres w badaniu i modelowaniu maszyn elektrycznych rozpoczął się wraz z rozwojem techniki komputerowej, która otworzyła drogę do numerycznej analizy złożonych poliharmonicznych modeli maszyn elektrycznych, a więc modeli uwzględniających wyższe harmoniczne przestrzenne pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny. Te nowe możliwości spowodowały znaczący wzrost zainteresowania powyższą tematyką, czego wyrazem jest stale wzrastająca, począwszy od lat sześćdziesiątych, liczba artykułów w krajowych i zagranicznych czasopismach naukowych oraz referatów prezentowanych na konferencjach międzynarodowych. Pomimo stosunkowo obszernej i bogatej literatury, stosowanie przy formułowaniu równań i przy ich upraszczaniu (najczęściej na drodze transformacji współrzędnych) zaawansowanych metod matematycznych, złożoność opracowywanych na ich podstawie programów komputerowych przy braku przejrzystej strategii posługiwania się nimi, a do tego - brak uniwersalności programów (odnoszących się najczęściej do określonej liczby żłobków), niejasne wnioski wynikające z wprowadzenia modeli poliharmonicznych w miejsce modelu monoharmonicznego, a nade wszystko - brak jednoznacznie i przejrzyste sformułowanego kryterium i określenia zakresu stosowalności modeli poliharmonicznych - są przyczynami, dla których modele te nie uległy rozpowszechnieniu w przemysłowych i akademickich środowiskach naukowo-badawczych i praktycznie nie są znane poza wąskim kręgiem naukowców

o specjalności maszyny elektryczne, zajmujących się teorią, analizą i modelowaniem maszyn elektrycznych. W szczególności - modele poliharmoniczne nie są wykorzystywane w praktyce projektowo-konstrukcyjnej maszyn elektrycznych, ani też w teorii napędów - przy analizie i projektowaniu układów elektromechanicznych zawierających maszyny indukcyjne. Stąd też i niniejsza monografia, której najistotniejszym zamierzeniem jest przybliżenie zagadnień modelowania maszyn indukcyjnych (z uwzględnieniem wyższych harmoniczných przestrzenných przepływu uzwojeń) badaczom, projektantom oraz użytkownikom maszyn elektrycznych oraz układów napędowych. Książka sumuje w zwartej formie osiągnięcia naukowców zagranicznych i krajowych, jak też - w znacznym stopniu - dorobek własny autorów. W monografii wykorzystano model matematyczny maszyny indukcyjnej we współrzędnych 2-osioowych  $\alpha\beta$  przedstawiony w pracach [9,10,11], a następnie rozwinięty w pracy [19]. W sposób usystematyzowany zapoznaje z zagadnieniami dotyczącymi struktury matematycznej modeli poliharmonicznych, analizą jakościową równań różniczkowych oraz upraszczaniem ich postaci przez redukcję liczby współrzędnych i współczynników, koncepcją wypełnień macierzy i wynikającymi z niej mnemotechnicznymi procedurami formułowania układów równań, techniką opracowywania programów komputerowych, sprawdzania ich poprawności oraz strategią użytkowania. Analizuje i systematyzuje własności dynamiczne maszyn wynikające z poliharmoniczności przepływu uzwojeń i podaje przykłady praktycznych zastosowań modeli.

Monografia ta wiąże się bezpośrednio z książką "Momenty pasożytnicze w indukcyjnych silnikach klatkowych" (PTETiS Warszawa-Gliwice, Monografie Sekcji Maszyn Elektrycznych Komitetu Elektrotechniki PAN) poświęconą analizie stanów ustalonych maszyn indukcyjnych w obecności wyższych harmoniczných przestrzenných pola magnetycznego - i może być uważana za jej drugą część. Chcąc jednak umożliwić niezależne korzystanie z niniejszej monografii - bez potrzeby sięgania po część pierwszą - powtórzono w niej podrozdziały omawiające postać

matematyczną modelu poliharmonicznego oraz podstawowe informacje o jego własnościach w stanach statycznych niezbędne przy interpretacji rozwiązań w stanach dynamicznych. Dzięki temu stanowi pełną i logicznie zamkniętą całość nie wymagającą znajomości części pierwszej.

Autorzy serdecznie dziękują recenzentom dr hab. inż. Piotrowi Wachowi - profesorowi Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu oraz dr hab. inż. Janowi Zawilakowi - profesorowi Politechniki Wrocławskiej, za wnikliwe recenzje oraz liczne uwagi przekazywane w dyskusjach. Niektóre z tych uwag mają charakter inspirujący, ukierunkowujący dalsze prace badawcze.

# 1. MODEL MATEMATYCZNY INDUKCYJNEJ MASZyny KLATKOWEJ PRZY UWZGLĘDNIENIU WYŻSZYCH HARMONICZNYCH PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU

## 1.1. RÓWNANIA MASZyny KLATKOWEJ WE WSPÓLRZĘDNYCH FAZOWYCH

Załóżmy, że obwód magnetyczny analizowanej 3-fazowej symetrycznej maszyny indukcyjnej o całkowitej liczbie żłobków na biegun i fazę jest liniowy, szczelina powietrzna - gładka (nieuźłobkowana), natomiast uzwojenia - tak, jak to jest w rzeczywistości - są rozłożone wzdłuż obwodu maszyny niesinusoidalnie. Przy tych założeniach model uwzględnia wyższe harmoniczne przestrzenne przepływów magnetycznych poszczególnych uzwojeń stojana i klatki wirnika, natomiast pomija harmoniczne przestrzenne przewodnościowe (permeancyjne) oraz harmoniczne przestrzenne nasyceniowe. Załóżmy dodatkowo, że gęstość prądu jest stała wzdłuż wysokości żłobków, a więc, że w prętach klatki wirnika nie zachodzi zjawisko wypierania prądów. Tak scharakteryzowany model opisuje we współrzędnych fazowych (naturalnych):

♦ *układ 3 równań napięciowo-prądowych stojana:*

$$[u_s] = [R_s][i_s] + [L_{os}] \frac{d}{dt}[i_s] + [M_{ss}] \frac{d}{dt}[i_s] + \frac{d}{dt}([M_{sr}(\vartheta)][i_r]) \quad (1.1)$$

gdzie:

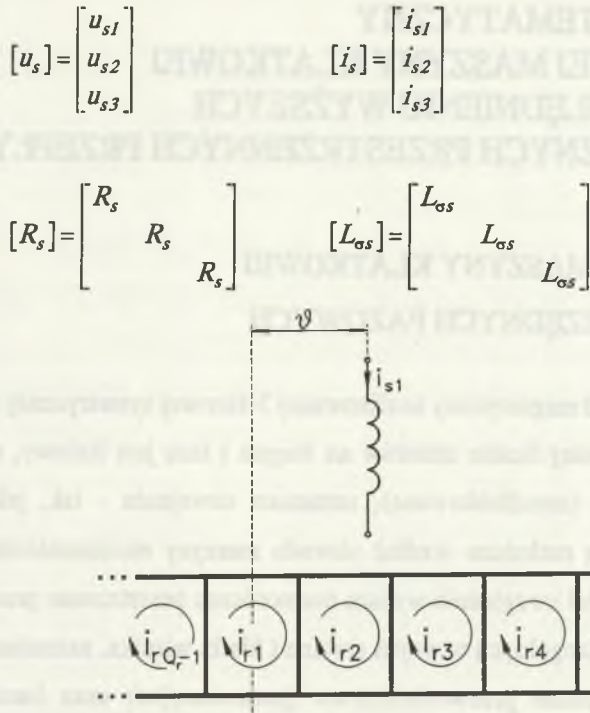
$[R_s]$  - macierz rezystancji uzwojeń fazowych stojana,

$[L_{os}]$  - macierz indukcyjności rozproszeń uzwojeń fazowych stojana,

$[M_{ss}]$  - macierz indukcyjności głównych stojan-stojan,

$[M_{sr}(\vartheta)]$  - macierz indukcyjności stojan-wirnik,





Rys. 1.1. Fragment rozwiniętego obwodu klatki wirnika  
Fig. 1.1. Part of developed circuit of squirrel-cage

- ♦ układ  $Q_r$  równań napięciowo-prądowych wirnika (współzrędnymi prądowymi wirnika są prądy oczkowe klatki zaznaczone na rys. 1.1):

$$[u_r] = [R_r][i_r] + [L_{\sigma r}] \frac{d}{dt}[i_r] + [M_{rr}] \frac{d}{dt}[i_r] + \frac{d}{dt}([M_{rs}(\vartheta)][i_s]) \quad (1.2)$$

gdzie:

$[R_r]$  - macierz rezystancji uzwojeń wirnika,

$[L_{\sigma r}]$  - macierz indukcyjności rozproszeń stojana,

$[M_{rs}(\vartheta)]$  - macierz indukcyjności wirnik-stojan ( $[M_{rs}(\vartheta)] = [M_{sr}(\vartheta)]^T$ ).

$R_{pr}, L_{\sigma pr}$  - rezystancja i indukcyjność rozproszenia pręta klatki wirnika,

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
 przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$R_p, L_{\sigma p}$  - rezystancja i indukcyjność rozproszenia wycinka pierścienia  
 zawierającego zawarte go pomiędzy sąsiednimi prętami klatki wirnika,

$$[u_r] = \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ \dots \\ u_{rQ_r} \end{bmatrix} \quad [i_r] = \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ \dots \\ i_{rQ_r} \end{bmatrix}$$

$$[R_r] = \begin{bmatrix} R_o & -R_{pr} & 0 & \dots & 0 & -R_{pr} \\ -R_{pr} & R_o & -R_{pr} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -R_{pr} & R_o & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -R_{pr} & 0 & 0 & \dots & -R_{pr} & R_o \end{bmatrix}$$

$$[L_{\sigma r}] = \begin{bmatrix} L_{\sigma o} & -L_{\sigma pr} & 0 & \dots & 0 & -L_{\sigma pr} \\ -L_{\sigma pr} & L_{\sigma o} & -L_{\sigma pr} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -L_{\sigma pr} & L_{\sigma o} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -L_{\sigma pr} & 0 & 0 & \dots & -L_{\sigma pr} & L_{\sigma o} \end{bmatrix}$$

$$R_o = 2R_{pr} + 2R_p$$

$$L_{\sigma o} = 2L_{\sigma pr} + 2L_{\sigma p}$$

♦ równanie stanu mechanicznego :

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = T_e - T_m \quad (1.3)$$

gdzie:

$$T_e = [i_s]^T \frac{\partial}{\partial \vartheta} [M_x(\vartheta)] [i_r], \quad \vartheta = \int_0^t \Omega_m dt + \vartheta(0)$$

$T_e$  - moment elektromagnetyczny silnika,

$J$  - moment bezwładności,

$T_m$  - mechaniczny moment obciążenia na wale maszyny,

$\vartheta$  - kąt obrotu wirnika,

$\vartheta(0)$  - początkowy kąt obrotu wirnika zawarty pomiędzy osią pierwszego uzwojenia fazowego stojana a osią pierwszego oczka klatki wirnika w chwili  $t=0$  (rys. 1.1).

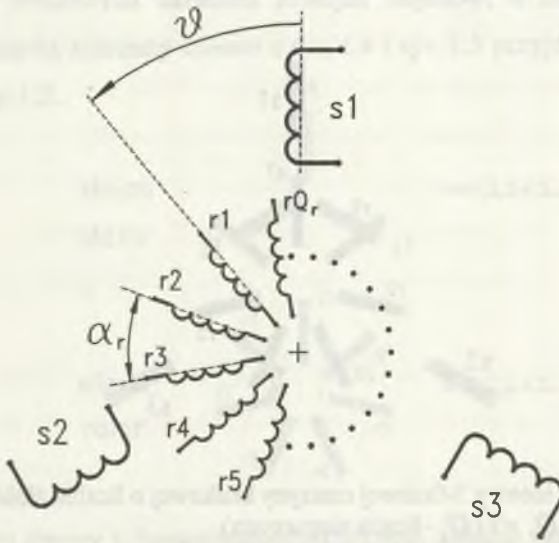
Na rys. 1.2 przedstawiono schemat ideowy maszyny odpowiadający równaniom (1.1)+(1.3).

Klatkowe uzwojenie wirnika o  $Q_r$  żłobkach jest reprezentowane przez  $Q_r$  uzwojeń fazowych, odpowiadających  $Q_r$  oczkom klatki, formowanym przez sąsiednie pręty i łączące je fragmenty wycinków pierścieni (rys. 1.1). Z powodu dużej liczby uzwojeń fazowych w wirniku, równej liczbie żłobków, oznaczanie uzwojeń na schematach ideowych tak, jak na rys. 1.2 jest bardzo kłopotliwe i dlatego w dalszej części pracy uzwojenia będą reprezentowane za pomocą uproszczonego znaku graficznego  $\blacksquare$ . Zgodnie z tą umową, schemat ideowy maszyny z rys. 1.2 może być przedstawiony w uproszczonej graficznie formie tak, jak na rys. 1.3.

Analizowanie i przekształcanie schematów ideowych w przypadku ogólnym, a więc przy założeniu, że wirnik posiada dowolną liczbę żłobków  $Q_r$  przesuniętych wzajemnie o kąt  $2\pi/Q_r$ , stwarza szereg trudności formalnych. Wygodniej jest rozważyć pewne szczególne przypadki liczb żłobków wirnika, a następnie uzyskane rezultaty uogólnić. Ze względu na prostotę i przejrzystość schematów

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

dobrze jest, aby przykładowo przyjęte do rozważań liczby żłobków wirnika były niezbyt duże.



Rys. 1.2. Schemat ideowy 3-fazowej maszyny klatkowej  
Fig. 1.2. Schematic representation of 3-phase squirrel-cage machine



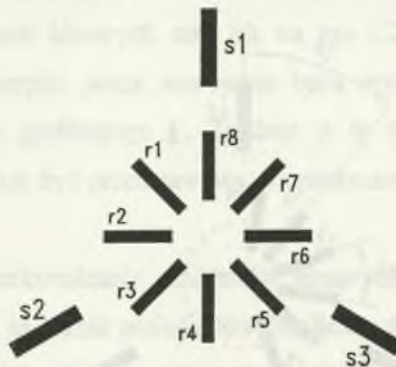
Rys. 1.3. Schemat ideowy 3-fazowej maszyny klatkowej  
(umowna reprezentacja uzwojeń fazowych)  
Fig. 1.3. Schematic representation of 3-phase squirrel-cage machine  
(simplified representation of phase windings)

Przyjmijmy więc do dalszej szczegółowej analizy dwa przypadki: wirnik o nieparzystej liczbie żłobków  $Q_r=7$  oraz wirnik o parzystej liczbie żłobków  $Q_r=8$ . Schematy ideowe maszyn z takimi wirnikami przedstawiono odpowiednio na rys. 1.4 i rys. 1.5 .



Rys. 1.4. Schemat ideowy 3-fazowej maszyny klatkowej o liczbie żłobków wirnika  $Q_r=7$  ( $Q_r$  - liczba nieparzysta).

Fig. 1.4. Schematic representation of 3-phase squirrel-cage machine with the number of rotor slots  $Q_r=7$  ( $Q_r$  - odd number).

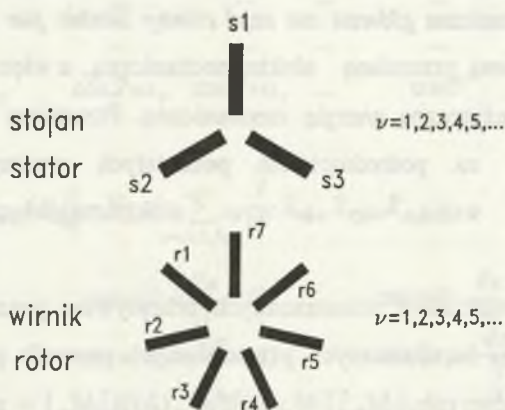


Rys. 1.5. Schemat ideowy 3-fazowej maszyny klatkowej o liczbie żłobków wirnika  $Q_r=8$  ( $Q_r$  - liczba parzysta)

Fig. 1.5. Schematic representation of 3-phase squirrel-cage machine with the number of rotor slots  $Q_r=8$  ( $Q_r$  - even number)

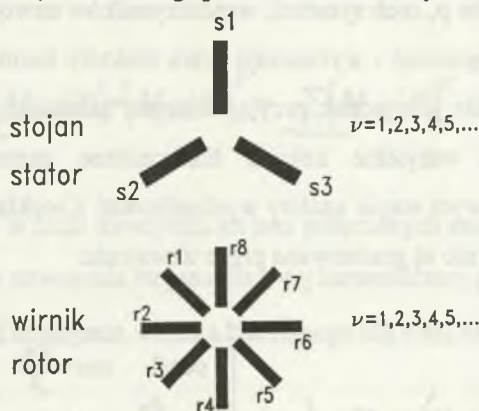
1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

Przy sporządzaniu schematów ideowych maszyn dogodnie jest przyjąć ponadto dodatkowo jeszcze jedną umowę, a mianowicie, że uzwojenia wirników będą rysowane pod 3-fazowymi układami uzwojeń stojanów, a nie w ich obrębie. Zgodnie z tą umową schematy ideowe z rys. 1.4 i rys. 1.5 przyjmują postać, jak na rys. 1.6 i rys. 1.7.



Rys. 1.6. Schemat ideowy 3-fazowej maszyny klatkowej o liczbie żłobków wirnika  $Q_r=7$  (umowne położenie uzwojeń wirnika względem stojana)

Fig. 1.6. Schematic representation of 3-phase squirrel-cage machine with the number of rotor slots  $Q_r=7$  (rotor windings placed conventionally under stator windings)



Rys. 1.7. Schemat ideowy 3-fazowej maszyny klatkowej o liczbie żłobków wirnika  $Q_r=8$  (umowne położenie uzwojeń wirnika względem stojana)

Fig. 1.7. Schematic representation of 3-phase squirrel-cage machine with the number of rotor slots  $Q_r=8$  (rotor windings placed conventionally under stator windings)

Przy rozwiązywaniu równań (1.1) ÷ (1.3), dogodnie jest zastosować w odniesieniu do rozkładów przestrzennych przepływów magnetycznych poszczególnych uzwojeń analizę harmoniczną Fouriera. *Za harmoniczną przestrzenną o rzędzie  $\nu=1$  przyjmuje się harmoniczną o okresie równym pełnemu obwodowi maszyny. Harmoniczna główna ma rząd równy liczbie par biegunów  $\nu=p$  i jest związana z główną przemianą elektromechaniczną, a więc z przemianą energii elektrycznej w użyteczną energię mechaniczną. Przemiany elektromechaniczne, dokonujące się za pośrednictwem pozostałych wyższych harmonicznych przestrzennych, wiążą się z tzw. elektromagnetycznymi momentami pasożytniczymi.*

Rozwinięcie rozkładów przestrzennych przepływów poszczególnych uzwojeń w szereg Fouriera harmonicznych przestrzennych pozwala przedstawić macierze indukcyjności głównych:  $[M_{ss}]$ ,  $[M_{sr}(\vartheta)]$ ,  $[M_{rs}(\vartheta)]$  i  $[M_{rr}]$  w postaci sum macierzy związanych z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi przepływów. *Taki model maszyny uwzględniający wyższe harmoniczne przestrzenne nazywamy modelem poliharmonicznym maszyny.* Uzwojenia - w zależności od budowy (liczby par biegunów  $p$ , cech symetrii, współczynników uzwojeń oraz wzajemnego galwanicznego połączenia) - wytwarzają tylko niektóre harmoniczne przestrzenne przepływu. Dogodnie jest jednak przyjąć wstępne założenie, że każde uzwojenie fazowe wytwarza wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne ( $\nu=1,2,3..$ ), a dopiero na końcowym etapie analizy wyeliminować z rozkładu przestrzennego te harmoniczne, które nie są generowane przez uzwojenia:

$$[M_{ss}] = \sum_{\nu=1,2,3..} [M_{ss\nu}] = N_s^2 \Lambda \sum_{\nu=1,2,3..} \frac{1}{\nu^2} k_{ws\nu}^2 \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \nu \frac{2\pi}{3} & \cos \nu \frac{4\pi}{3} \\ \cos \nu \frac{4\pi}{3} & \cos 0 & \cos \nu \frac{2\pi}{3} \\ \cos \nu \frac{2\pi}{3} & \cos \nu \frac{4\pi}{3} & \cos 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$$[M_{rr}] = \sum_{v=1,2,3,\dots} [M_{rv}] = \Lambda \sum_{v=1,2,3,\dots} \frac{1}{v^2} k_{rv}^2 \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos v\alpha_r & \cos 2v\alpha_r & \dots & \cos(Q_r - 1)v\alpha_r \\ \cos(Q_r - 1)v\alpha_r & \cos 0 & \cos v\alpha_r & \dots & \cos(Q_r - 2)v\alpha_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos v\alpha_r & \cos 2v\alpha_r & \cos 3v\alpha_r & \dots & \cos 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$[M_{rs}(\vartheta)] = \sum_{v=1,2,3,\dots} [M_{rv}(\vartheta)] = N_s \Lambda \sum_{v=1,2,3,\dots} \frac{1}{v^2} k_{wsv} k_{rv} k_{sqv} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos v(0 + \vartheta) & \cos v(0 - \frac{2\pi}{3} + \vartheta) & \cos v(0 - \frac{4\pi}{3} + \vartheta) \\ \cos v(\alpha_r + \vartheta) & \cos v(\alpha_r - \frac{2\pi}{3} + \vartheta) & \cos v(\alpha_r - \frac{4\pi}{3} + \vartheta) \\ \cos v(2\alpha_r + \vartheta) & \cos v(2\alpha_r - \frac{2\pi}{3} + \vartheta) & \cos v(2\alpha_r - \frac{4\pi}{3} + \vartheta) \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos v[(Q_r - 1)\alpha_r + \vartheta] & \cos v[(Q_r - 1)\alpha_r - \frac{2\pi}{3} + \vartheta] & \cos v[(Q_r - 1)\alpha_r - \frac{4\pi}{3} + \vartheta] \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$[M_{sr}(\vartheta)] = \sum_{v=1,2,3,\dots} [M_{sv}(\vartheta)] = [M_{sr}(\vartheta)]^T = \sum_{v=1,2,3,\dots} [M_{rv}(\vartheta)]^T \quad (1.7)$$

gdzie:

$N_s$  - liczba zwojów w fazie uzwojenia stojana połączonych szeregowo,

$k_{wsv}$  - współczynnik uzwojenia stojana dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,

$k_{rv}$  - współczynnik uzwojenia wirnika klatkowego dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,

$k_{sqv}$  - współczynnik skosu żłobków wirnika dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej,

$Q_r$  - liczba żłobków wirnika,



$\Lambda$  - przewodność magnetyczna (permeancja) dla strumienia głównego pierwszej harmonicznej przestrzennej.

Przewodność magnetyczną dla strumienia głównego pierwszej harmonicznej przestrzennej (harmonicznej podstawowej) określa wzór:

$$\Lambda = \frac{2\mu_o d l_c}{\pi \delta_{ef}} \quad (1.8)$$

gdzie:

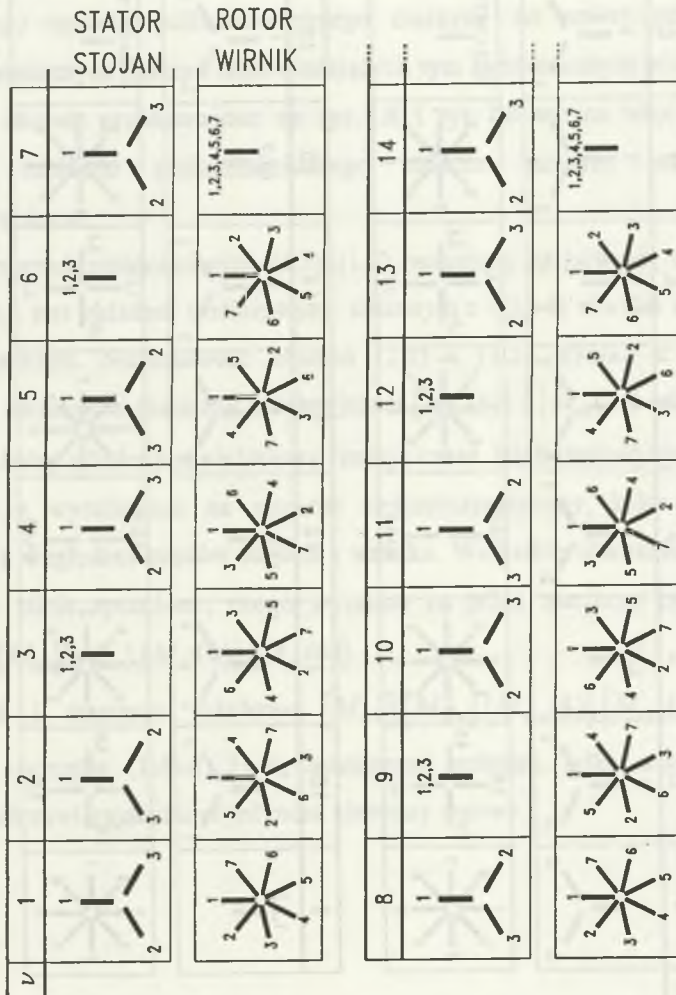
- $d$  - średnica wewnętrzna stojana,
- $l_c$  - długość zastępcza rdzenia maszyny,
- $\delta_{ef}$  - zastępcza grubość szczeliny uwzględniająca uzłobkowanie i namagnesowanie rdzenia.

We wzorach (1.5) i (1.6) nie występuje liczba zwojów wirnika  $N_r$ , albowiem dla uzwojenia klatkowego jest ona równa 1.

Wprowadzając szeregi macierzowe (1.4)+(1.7) do (1.1)+(1.3), przykładowe schematy ideowe maszyn z rys. 1.6 i rys. 1.7 można przekształcić do postaci przedstawionej na rys. 1.8 i rys. 1.9.

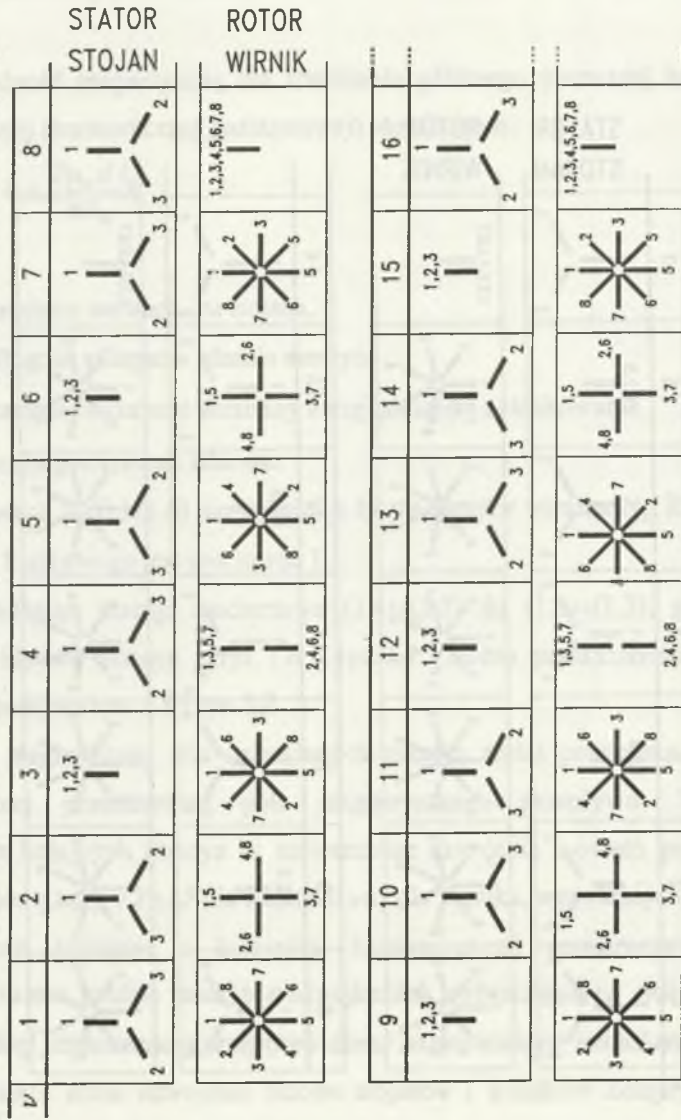
Obwód magnetyczny obu rozważanych maszyn został powielony dla każdej harmonicznej przestrzennej pola magnetycznego przepływu. W stojanach i wirnikach kolejnych maszyn są umieszczone uzwojenia o osiach przesuniętych odpowiednio o kąty  $\nu 2\pi / 3$  dla stojana i  $\nu \alpha_r$  dla wirnika, wytwarzające przepływy magnetyczne związane z kolejnymi harmonicznymi przestrzennymi. Takie *wyidealizowane modele maszyn o uzwojeniach wytwarzających tylko po jednej harmonicznej przestrzennej przepływu noszą nazwę maszyn monoharmonicznych*. Odpowiadające sobie uzwojenia fazowe stojanów i wirników kolejnych maszyn monoharmonicznych (uzwojenia fazowe o tych samych numerach) są połączone w szereg, a wszystkie wirniki - umieszczone na wspólnym wale.

Orders of space harmonics (numbers of monoharmonic machines)  
 Rzędy harmonicznych przestrzennych (numery maszyn monoharmonicznych)



Rys. 1.8. Poliharmoniczny model 3-fazowej maszyny klatkowej o  $Q_r = 7$  po rozłożeniu na maszyny monoharmoniczne  
 Fig. 1.8. Poliharmonic model of 3-phase squirrel-cage motor with  $Q_r = 7$  after decomposition into monoharmonic machines

Orders of space harmonics (numbers of monoharmonic machines)  
 Rzędy harmonicznych przestrzennych (numery maszyn monoharmonicznych)



Rys. 1.9. Poliharmoniczny model 3-fazowej maszyny klatkowej o  $Q_r = 8$  po rozłożeniu na maszyny monoharmoniczne

Fig. 1.9. Poliharmonic model of 3-phase squirrel-cage motor with  $Q_r = 8$  after decomposition into monoharmonic machines

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

---

Tak więc formalna operacja matematyczna, polegająca na rozwinięciu przepływów magnetycznych w szeregi harmonicznych przestrzennych Fouriera i na przedstawieniu macierzy indukcyjności głównych jako sum macierzy związanych z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi, pozwala na przekształcenie rozważanego modelu poliharmonicznego maszyny do nowej postaci ciągu monoharmonicznych maszyn odpowiadających tym harmonicznym przestrzennym. Schematy ideowe przedstawione na rys. 1.8 i rys. 1.9 można więc uważać za schematy rozkładu poliharmonicznego modelu maszyny na maszyny monoharmoniczne.

Układ równań różniczkowych (1.1)÷(1.3), opisujący zachowanie się maszyny indukcyjnej, jest układem nieliniowym złożonym z  $(Q_r+4)$  równań o zmiennych współczynnikach. Nieliniowość równań (1.1) i (1.2) wynika z nieliniowej zależności elementów macierzy indukcyjności  $[M_{sr}(\vartheta)]$  i  $[M_{rs}(\vartheta)]$  od kąta obrotu wirnika  $\vartheta$ , który z kolei jest nieliniową funkcją czasu. Nieliniowość równania (1.3) wiąże się z wyrażeniem na moment elektromagnetyczny, które jest formą dwuliniową względem prądów stojana i wirnika. Wszystkie równania są ze sobą wzajemnie silnie sprzężone, czego wyrazem są pełne macierze indukcyjności głównych  $[M_{ss}], [M_{rr}], [M_{sr}(\vartheta)], [M_{rs}(\vartheta)]$ .

Również i macierze składowe  $[M_{ssv}], [M_{rv}], [M_{srv}(\vartheta)], [M_{rsv}(\vartheta)]$ , będące wyrazami szeregów (1.4)÷(1.7), są macierzami pełnymi, tylko w szczególnych przypadkach zawierającymi pojedyncze elementy zerowe.

## 1.2. RÓWNANIA MASZYNY KLATKOWEJ

### WE WSPÓŁRZĘDNYCH $\alpha\beta$

Model matematyczny maszyny, uwzględniający wyższe harmoniczne przestrzenne (model poliharmoniczny), na który składają się równania (1.1)-(1.3) i wzory (1.4)-(1.7)), można znacznie uprościć poprzez wprowadzenie nowego układu współrzędnych - układu współrzędnych  $\alpha\beta$  (zwanego również 2-osiowym układem współrzędnych), w którym większość elementów macierzy  $[M_{sv}]$ ,  $[M_{rv}]$ ,  $[M_{sv}(g)]$ ,  $[M_{rv}(g)]$  przyjmuje wartość zerową.

Nowe współrzędne  $\alpha\beta$  prądów stojana wprowadza się opierając się na relacji:

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s0} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \\ \sin 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

W przypadku gdy liczba zębów wirnika  $Q_r$  jest liczbą nieparzystą, współrzędne  $\alpha\beta$  prądów wirnika wprowadza się na podstawie relacji:

$$\begin{bmatrix} i_{r\alpha_1} \\ i_{r\beta_1} \\ i_{r\alpha_2} \\ i_{r\beta_2} \\ \dots \\ i_{r0} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{Q_r}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \alpha_r & \cos 2\alpha_r & \dots & \cos(Q_r - 1)\alpha_r \\ \sin 0 & \sin \alpha_r & \sin 2\alpha_r & \dots & \sin(Q_r - 1)\alpha_r \\ \cos 0 & \cos 2\alpha_r & \cos 4\alpha_r & \dots & \cos 2(Q_r - 1)\alpha_r \\ \sin 0 & \sin 2\alpha_r & \sin 4\alpha_r & \dots & \sin 2(Q_r - 1)\alpha_r \\ \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots \\ \frac{\ddot{i}}{\sqrt{2}} & \frac{\ddot{i}}{\sqrt{2}} & \frac{\ddot{i}}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{\ddot{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \\ i_{r4} \\ \dots \\ i_{rQ_r} \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

zaś wtenczas, gdy liczba zębów wirnika  $Q_r$  jest liczbą parzystą - opierając się na relacji:

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
 przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$$\begin{bmatrix} i_{r\alpha_1} \\ i_{r\beta_1} \\ i_{r\alpha_2} \\ i_{r\beta_2} \\ \dots \\ i_{r0p} \\ i_{r0} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{Q_r}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \alpha_r & \cos 2\alpha_r & \dots & \cos(Q_r - 1)\alpha_r \\ \sin 0 & \sin \alpha_r & \sin 2\alpha_r & \dots & \sin(Q_r - 1)\alpha_r \\ \cos 0 & \cos 2\alpha_r & \cos 4\alpha_r & \dots & \cos 2(Q_r - 1)\alpha_r \\ \sin 0 & \sin 2\alpha_r & \sin 4\alpha_r & \dots & \sin 2(Q_r - 1)\alpha_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \\ i_{r4} \\ \dots \\ i_{rQ_r-1} \\ i_{rQ_r} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Z kolejnymi parami wierszy relacji (1.9), (1.10) i (1.11) są związane różne pary współrzędnych  $\alpha\beta$  oznaczone przez:  $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \alpha_3\beta_3, \dots$ . Ostatni wiersz wyznacza współrzędną zerową 0. W przypadku gdy liczba żłobków wirnika  $Q_r$  jest liczbą parzystą, w wirniku klatkowym występuje dodatkowo jeszcze jedna współrzędna zerowa  $0p$ , którą określa przedostatni wiersz relacji (1.11).

W formie skróconej relacje (1.9) oraz (1.10) lub (1.11) można zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} i_s^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = [K_s][i_s] \quad (1.12)$$

3×3

$$\begin{bmatrix} i_r^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = [K_r][i_r].$$

$Q_r \times Q_r$

W analogiczny sposób wyznacza się współrzędne  $\alpha\beta$  napięć stojana i wirnika:

$$\begin{bmatrix} u_s^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = [K_s][u_s] \quad (1.13)$$

3×3

$$\begin{bmatrix} u_r^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = [K_r][u_r].$$

$Q_r \times Q_r$

Macierze transformacji  $[K_s]$  i  $[K_r]$  są macierzami ortogonalnymi unormowanymi, dla których zachodzi:

$$[K_s]^{-1} = [K_s]^T \quad [K_r]^{-1} = [K_r]^T. \quad (1.14)$$

Z relacji (1.14) bezpośrednio wynika niezmienniczość mocy chwilowej w układzie współrzędnych  $\alpha\beta$ , tak dla uzwojenia stojana:

$$\begin{aligned} p_s(t) &= [u_s]^T [i_s] = ([K_s]^{-1} [u_s^{\alpha\beta}])^T [K_s]^{-1} [i_s^{\alpha\beta}] = \\ &= [u_s^{\alpha\beta}]^T ([K_s]^{-1})^T [K_s]^{-1} [i_s^{\alpha\beta}] = [u_s^{\alpha\beta}]^T [i_s^{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (1.15)$$

jak i dla uzwojenia wirnika:

$$p_r(t) = [u_r]^T [i_r] = [u_r^{\alpha\beta}]^T [i_r^{\alpha\beta}]. \quad (1.16)$$

W wyniku transformacji układu równań (1.1) i (1.2) z fazowego układu współrzędnych do układu współrzędnych  $\alpha\beta$  otrzymuje się:

$$\begin{aligned} [u_s^{\alpha\beta}] &= [R_s^{\alpha\beta}] [i_s^{\alpha\beta}] + [L_{\sigma s}^{\alpha\beta}] \frac{d}{dt} [i_s^{\alpha\beta}] + [M_{ss}^{\alpha\beta}] \frac{d}{dt} [i_s^{\alpha\beta}] + \frac{d}{dt} ([M_{sr}^{\alpha\beta}(\vartheta)] [i_r^{\alpha\beta}]) \\ [u_r^{\alpha\beta}] &= [R_r^{\alpha\beta}] [i_r^{\alpha\beta}] + [L_{\sigma r}^{\alpha\beta}] \frac{d}{dt} [i_r^{\alpha\beta}] + \frac{d}{dt} ([M_{rs}^{\alpha\beta}(\vartheta)] [i_s^{\alpha\beta}]) + [M_{rr}^{\alpha\beta}] \frac{d}{dt} [i_r^{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Poszczególne macierze przybierają we współrzędnych  $\alpha\beta$  postać:

$$[R_s^{\alpha\beta}] = [K_s] [R_s] [K_s]^T = [R_s] \quad (1.18)$$

$$[L_{\sigma s}^{\alpha\beta}] = [K_s] [L_{\sigma s}] [K_s]^T = [L_{\sigma s}] \quad (1.19)$$

$$[R_r^{\alpha\beta}] = [K_r] [R_r] [K_r]^T = \quad (1.20)$$

$$= \begin{bmatrix} R_o - 2R_{pr} \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_o - 2R_{pr} \cos \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_o - 2R_{pr} \cos 2\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_o - 2R_{pr} \cos 2\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & R_o - 2R_{pr} \end{bmatrix}$$

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$$[L_{\sigma r}^{\text{op}}] = [K_r][L_{\sigma r}][K_r]^T = \quad (1.21)$$

$$= \begin{bmatrix} L_{\sigma 0} - 2L_{\sigma pr} \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_{\sigma 0} - 2L_{\sigma pr} \cos \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L_{\sigma 0} - 2L_{\sigma pr} \cos 2\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{\sigma 0} - 2L_{\sigma pr} \cos 2\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & L_{\sigma 0} - 2L_{\sigma pr} \end{bmatrix}$$

$$[M_{ss}^{\text{op}}] = \sum_{v=1,2,3,-} [K_s][M_{sv}][K_s]^T = \begin{bmatrix} \sum_{v=1,2,4,5,-} L_{sv} & & & & \\ & \sum_{v=1,2,4,5,-} L_{sv} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 2 \sum_{v=3,6,9,-} L_{sv} & \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

gdzie:

$$L_{sv} = \frac{3}{2} \frac{I}{v^2} N_s^2 k_{wsv}^2 \Lambda$$

$$[M_{rr}^{\text{op}}] = \sum_{v=1,2,3,-} [K_r][M_{rv}][K_r]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{v=1, Q_r-1, Q_r+1,-} L_{rv} & & & & & \\ & \sum_{v=1, Q_r-1, Q_r+1,-} L_{rv} & & & & \\ & & \sum_{v=2, Q_r-2, Q_r+2,-} L_{rv} & & & \\ & & & \sum_{v=2, Q_r-2, Q_r+2,-} L_{rv} & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 2 \sum_{v=Q_r, 2Q_r,-} L_{rv} \end{bmatrix}$$

(1.23)



gdzie:

$$L_{rv} = \frac{Q_r}{2} \frac{I}{v^2} k_{wr v}^2 \Lambda$$

Tak więc we współrzędnych  $\alpha\beta$  macierze rezystancji i indukcyjności rozproszenia stojana przechodzą same w siebie (wzór (1.18) i (1.19)), zaś macierze rezystancji i indukcyjności rozproszenia wirnika (wzór (1.20) i (1.21)) oraz macierze indukcyjności głównych stojana i wirnika (wzór (1.22) i (1.23)) ulegają diagonalizacji. Należy również zwrócić uwagę na to, że elementy leżące na przekątnej głównej macierzy indukcyjności głównych wirnika są opisane przez szeregi współczynników indukcyjności dla wyższych harmonicznych przestrzennych o znacznie zmniejszonej liczbie wyrazów w stosunku do sumy (1.5).

Również istotnemu uproszczeniu ulega macierz indukcyjności głównych wirnik-stojan, przekształcając się do ogólnej postaci:

$$[M_{rs}^{\alpha\beta}(\vartheta)] = \sum_{v=1,2,3,\dots} [K_s] [M_{rsv}(\vartheta)] [K_r] = \sum_{v=1,2,3,\dots} [M_{rsv}^{\alpha\beta}(\vartheta)] \quad (1.24)$$

gdzie:

$$[M_{rsv}^{\alpha\beta}(\vartheta)] = L_{rsv} \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ \hline \dots & \dots & | & \dots \\ \hline \cos v\vartheta & \pm \sin v\vartheta & | & 0 \\ \pm \sin v\vartheta & \pm \cos v\vartheta & | & 0 \\ \hline \dots & \dots & | & \dots \\ \hline 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$Q_r \times 3$

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$$L_{rsv} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{Q_r}{2}} N_s k_{wsv} k_{wrv} k_{sqv} \Lambda \frac{1}{v^2}$$

Położenie 4-elementowej podmacierzy z elementami niezerowymi zależy od liczby żłobków wirnika  $Q_r$  oraz rzędu harmonicznej przestrzennej  $v$ . Dla niektórych harmonicznych przestrzennych następuje przesunięcie pełnej podmacierzy w prawo lub w dół, a wówczas - w wyniku formalnego "obcięcia" - w macierzy  $[M_{rsv}^{\alpha\beta}(\vartheta)]$  pojawia się tylko jej fragment, np.:

$$[M_{rsv}^{\alpha\beta}(\vartheta)] = L_{rsv} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cos v\vartheta \\ 0 & 0 & \pm \sin v\vartheta \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

$$L_{srv} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{Q_r}{2}} N_s k_{wsv} k_{wrv} k_{sqv} \Lambda \frac{1}{v^2}$$

lub:

$$[M_{rsv}^{\alpha\beta}(\vartheta)] = L_{rsv} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos v\vartheta & \pm \sin v\vartheta & 0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$L_{srv} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{Q_r} N_s k_{wsv} k_{wrv} k_{sqv} \Lambda \frac{1}{v^2}$$

lub też:

$$[M_{rs\nu}^{\alpha\beta}(\vartheta)] = L_{rs\nu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cos \nu\vartheta \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

$$L_{rs\nu} = \sqrt{3} \sqrt{Q_r} N_s k_{ws\nu} k_{wr\nu} k_{sq\nu} \Lambda \frac{1}{\nu^2}$$

Problem położenia pełnej 4-elementowej podmacierzy oraz jej różnych możliwych przypadków szczególnych w obrębie macierzy  $[M_{rs\nu}^{\alpha\beta}(\vartheta)]$  (macierzy (1.25)) zostanie dokładnie rozważony w podrozdz.1.4.

Jak wynika z (1.22)+(1.28), zasadniczą korzyścią wynikającą z wprowadzenia układu współrzędnych  $\alpha\beta$  jest bardzo duża liczba elementów zerowych w macierzach indukcyjności wirnik-stojan dla poszczególnych harmonicznych przestrzennych oraz diagonalna postać macierzy indukcyjności stojan-stojan i wirnik-wirnik.

Rozwinięcie macierzy indukcyjności wirnik-stojan  $[M_{rs}^{\alpha\beta}(\vartheta)]$  w szereg (1.24) o elementach (1.25)+(1.28) pozwala ponadto na wyrażenie momentu elektromagnetycznego silnika w postaci sumy momentów związanych z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi, a więc - innymi słowy - jako sumy momentów obrotowych wszystkich kolejnych maszyn monoharmonicznych:

$$T_e = \sum_{\nu=1,2,3,\dots} T_{e\nu} = \sum_{\nu=1,2,3,\dots} [i_s^{\alpha\beta}]^T \frac{\partial}{\partial \vartheta} [M_{rs\nu}^{\alpha\beta}(\vartheta)] [i_r^{\alpha\beta}] \quad (1.29)$$

### 1.3. SCHEMATY ROZKŁADU MASZINY INDUKCYJNEJ NA MASZINY ELEMENTARNE

Układ współrzędnych  $\alpha\beta$  wyróżnia się jeszcze jedną istotną zaletą, a mianowicie pozwala na przyporządkowanie transformowanym równaniom (1.17)+(1.27) prostego schematu ideowego, złożonego wyłącznie z 2- i 1-fazowych maszyn monoharmonicznych, zwanych w dalszej części *maszynami elementarnymi*. Ze względu na to, że budowa macierzy indukcyjności wzajemnych (1.25)+(1.27) oraz składniki sum indukcyjności na przekątnych głównych macierzy wirnik-wirnik (1.23) zależą od liczby żłobków wirnika  $Q_r$ , schemat ten przybiera różną postać dla różnych wartości liczby żłobków wirnika  $Q_r$ . Na rys. 1.8 przedstawiono, we współrzędnych fazowych, schemat ideowy maszyny o liczbie żłobków wirnika  $Q_r=7$  ( $Q_r$  - liczba nieparzysta), zaś na rys. 1.9 schemat ideowy maszyny o liczbie żłobków  $Q_r=8$  ( $Q_r$  - liczba parzysta). Schematy ideowe tych samych maszyn w nowych współrzędnych  $\alpha\beta$  przedstawiają odpowiednio rys. 1.10 i rys. 1.11.

Schemat ideowy maszyny we współrzędnych  $\alpha\beta$  zawiera dwie tablice: tablicę stojaną i tablicę wirnika.

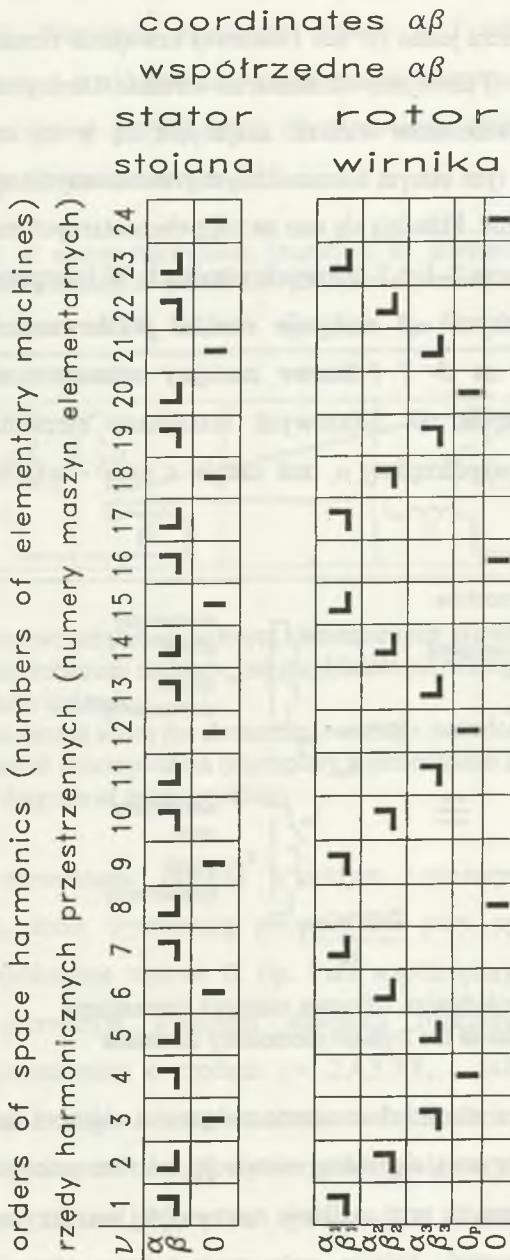
Tablica stojąca składa się z dwóch wierszy. Pierwszy wiersz odpowiada współrzędnym  $\alpha\beta$ , zaś drugi - współrzędnej 0.

Tablica wirnika składa się z wierszy odpowiadających kolejnym parom współrzędnych  $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \alpha_3\beta_3, \dots$  oraz ponadto z dwóch wierszy odpowiadających współrzędnym zerowym  $0_p, 0$ , gdy  $Q_r$  - jest liczbą parzystą lub jednego wiersza odpowiadającego współrzędnej zerowej 0, gdy  $Q_r$  - jest liczbą nieparzystą. Tablice podzielone są na kolumny związane z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi. Uzwojenie elementarne umieszczone w  $v$ -tej kolumnie tablicy wytwarza tylko  $v$ -tą harmoniczną przestrzenną pola magnetycznego, czyli - w interpretacji fizycznej - posiada liczbę par biegunów równą numerowi kolumny, w której się znajduje.

orders of space harmonics (numbers of elementary machines)  
 rzedy harmonicznych przestrzennych (numery maszyn elementarnych)

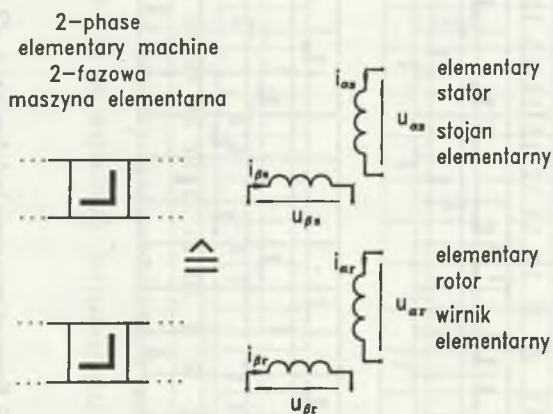
		coordinates $\alpha\beta$																							
		stator												rotor											
		stojana												wirnika											
$\nu$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\alpha$	$\beta$	┘	┘		┘	┘		┘	┘		┘	┘		┘	┘		┘	┘		┘	┘		┘	┘	
0				┘			┘			┘			┘			┘			┘			┘			┘
$\alpha$	$\beta_1$					┘				┘				┘					┘						
$\alpha$	$\beta_2$	┘			┘																				
$\alpha$	$\beta_3$		┘	┘																					
0							┘																		

Rys. 1.10. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny indukcyjnej o  $Q_r = 7$  na maszyny elementarne  
 Fig. 1.10. Diagram of decomposition of 3-phase squirrel-cage machine with  $Q_r = 7$  into elementary machines



Rys. 1.11. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny indukcyjnej o  $Q_r = 8$  na maszyny elementarne  
 Fig. 1.1.1. Diagram of decomposition of 3-phase squirrel-cage machine with  $Q_r = 8$  into elementary machines

Każda kolumna zawiera jedno (2- lub 1-fazowe) uzwojenie elementarne stojana i jedno (2- lub 1-fazowe) uzwojenie elementarne wirnika. Uzwojenia elementarne stojana i uzwojenia elementarne wirnika, znajdujące się w tej samej kolumnie (a więc odpowiadające tym samym harmonicznym przestrzennym) sprzęgają się ze sobą elektromagnetycznie. Składają się one na ciąg elementarnych maszyn o 2- lub 1-fazowych stojanach oraz 2- lub 1-fazowych wirnikach. W interpretacji fizycznej *w układzie współrzędnych  $\alpha\beta$  następuje rozkład poliharmonicznego modelu maszyny indukcyjnej na 2- i 1-fazowe maszyny monoharmoniczne, zwane maszynami elementarnymi*. W 2-fazowych maszynach elementarnych jedno z uzwojeń odpowiada współrzędnej  $\alpha$ , zaś drugie z nich - współrzędnej  $\beta$ , co ilustruje rys. 1.12.

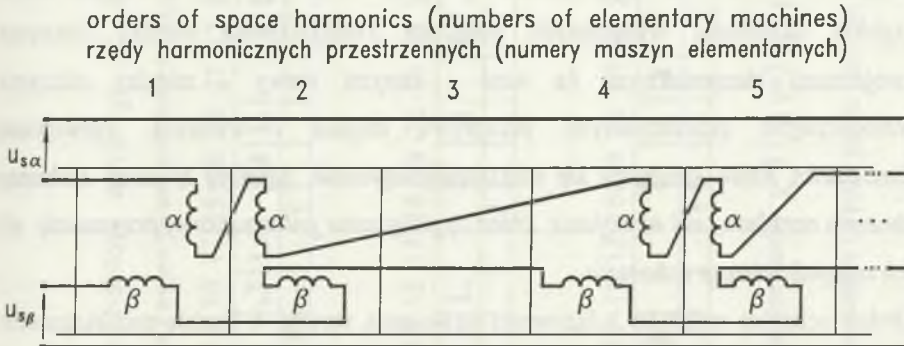


Rys. 1.12. Pojedyncza 2-fazowa maszyna elementarna  
Fig. 1.12. One of the 2-phase elementary machines

Poszczególne stojany i wirniki elementarne związane z różnymi harmonicznymi przestrzennymi charakteryzują się różną orientacją osi faz: prawostronną  $\lrcorner$  lub lewostronną  $\llcorner$ , co oznacza, że przy zasilaniu rzeczywistej maszyny symetrycznym 3-fazowym układem napięć, kołowe pola magnetyczne odpowiadające tym harmonicznym wirują w stanie ustalonym w prawo albo w lewo (współbieżnie lub

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
 przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

przeciwnie). Wszystkie uzwojenia fazowe  $\alpha$  i odpowiednio wszystkie uzwojenia fazowe  $\beta$  znajdujące się w tym samym wierszu są połączone ze sobą galwanicznie w szereg. Przykładowo, dla pierwszego wiersza schematu stojana połączenia te przedstawiono na rys. 1.13.



Rys. 1.13. Szeregowe połączenie uzwojeń elementarnych zawartych w tym samym wierszu schematu rozkładu (na przykładzie pierwszego wiersza schematu rozkładu stojana)

Fig. 1.13. Connection in series for elementary windings included in the same row of diagram of decomposition (exemplary representation for the first row of stator diagram of decomposition)

Uzwojenia elementarne zawarte w każdym z wierszy wskazują na rzędy harmonicznych, które wytwarzają poszczególne pary współrzędnych  $\alpha\beta$  lub pojedyncze współrzędne zerowe  $0, 0p$ . Para współrzędnych  $\alpha\beta$  prądu stojana, związana z pierwszym wierszem schematu rozkładu stojana, wytwarza harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v=1,2,4,5,7,8,\dots$ , zaś współrzędna zerowa stojana związana z drugim wierszem schematu - harmoniczne o rzędach  $v=3,6,9,\dots$ . Para współrzędnych wirnika  $\alpha_1\beta_1$  wytwarza harmoniczne przestrzenne o rzędach:  $1, Q_r - 1, Q_r + 1, 2Q_r - 1, 2Q_r + 1, \dots$ , para  $\alpha_2\beta_2$  - harmoniczne przestrzenne o rzędach:  $2, Q_r - 2, Q_r + 2, 2Q_r - 2, 2Q_r + 2, \dots$ , para  $\alpha_3\beta_3$  - harmoniczne przestrzenne o rzędach:  $3, Q_r - 3, Q_r + 3, 2Q_r - 3, 2Q_r + 3, \dots$ , itd.

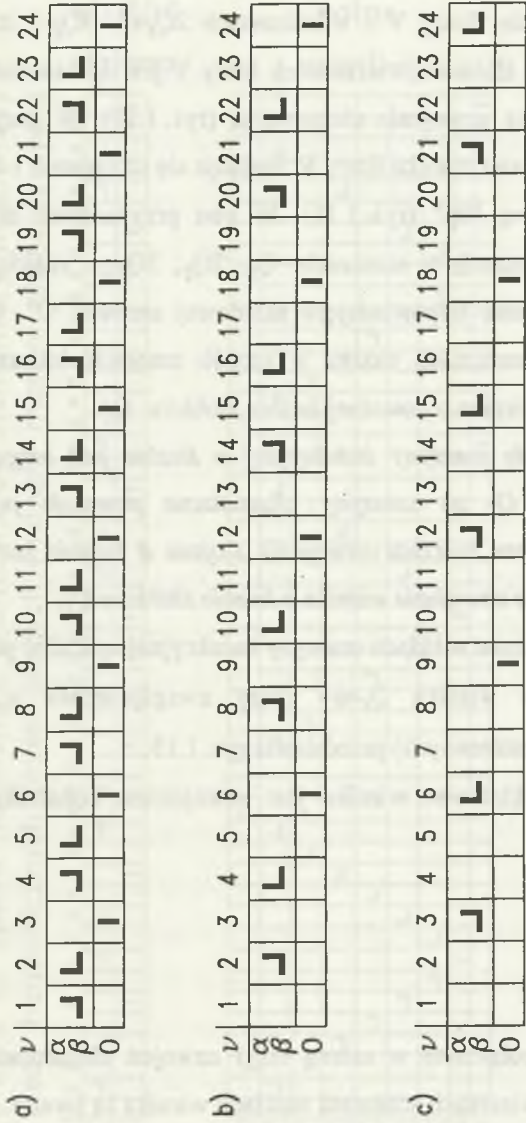


*Schemat ideowy maszyny we współrzędnych  $\alpha\beta$ , przedstawiający rozkład poliharmonicznego modelu maszyny indukcyjnej na 2- i 1-fazowe maszyny monoharmoniczne, nazywamy krótko schematem rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne. Istotną zaletą schematu rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne jest jego prosta i przejrzysta struktura umożliwiająca łatwe i szybkie określenie wzajemnych połączeń i oddziaływań między różnymi uzwojeniami elementarnymi (a więc - innymi słowy - między różnymi harmonicznymi przestrzennymi przepływu stojana i wirnika). Uzwojenia elementarne, które sprzęgają się elektromagnetycznie, zajmują tę samą kolumnę schematu rozkładu, zaś uzwojenia, które są połączone galwanicznie, przynależą do tych samych wierszy schematu.*

Pełny schemat rozkładu 3-fazowego uzwojenia stojana o liczbie par biegunów  $p=1$  na uzwojenia elementarne przy założeniu, że uzwojenia fazowe wytwarzają wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne  $v=1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ , przedstawia rys. 1.14. Elementarne uzwojenia 2-fazowe zajmują kolumny o numerach: 1, 2, 4, 5, 7, 8, ..., zaś elementarne uzwojenie 1-fazowe - kolumny o numerach: 3, 6, 9, 12, 15, ... . Liczba kolumn schematu jest równa rzędowi najwyższej uwzględnianej harmonicznemu przestrzennemu  $v_m$ . Na rys. 1.14 przyjęto  $v_m=24$ . Trójfazowe symetryczne uzwojenie stojana o liczbie par biegunów  $p$  wytwarza w ogólnym przypadku harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v=p, 2p, 3p, 4p, 5p, 6p, \dots$ , tak więc schemat z rys. 1.14a ulega "rozrzedzeniu", albowiem uzwojenia 2-fazowe zajmują wówczas tylko kolumny o numerach:  $p, 2p, 4p, 5p, 7p, 8p, \dots$ , zaś pozostałe kolumny - pozostają puste. Uzwojenia 1-fazowe są umieszczone w kolumnach o numerach:  $3p, 6p, 9p, \dots$ . Schematy rozkładu uzwojenia stojana o liczbie par biegunów  $p=2$  i  $p=3$  na uzwojenia elementarne przedstawia rys. 1.14b i rys. 1.14c.

Analizując przykładowo schematy rozkładu wirnika klatkowego o liczbie żłobków  $Q_r=7$  i  $Q_r=8$  na uzwojenia elementarne (schematy przedstawione na rys. 1.10 i rys. 1.11), łatwo zauważyć, że uzwojenia elementarne wirnika układają

orders of space harmonics (numbers of elementary windings of stator)  
 rzędy harmonicznych przestrzennych (numery uzwojeń elementarnych stojana)



Rys. 1.14. Schematy rozkładu 3-fazowego uzwojenia stojana o liczbie par biegunów:  $p=1$  (a);  $p=2$  (b);  $p=3$  (c) na uzwojenia elementarne

Fig. 1.14. Diagrams of decomposition of 3-phase stator winding with the number of pole-pairs:  $p=1$  (a);  $p=2$  (b);  $p=3$  (c) into elementary windings

się w obrębie tablicy wirnika w cyklicznie powtarzający się kształt litery V o rozpiętości ramion równej  $Q_r-1$  kolumnom. Końce pierwszej z liter V spoczywają w kolumnach o numerach 1 i  $Q_r-1$ , końce drugiej litery V - w kolumnach  $Q_r+1$ ,  $2Q_r-1$ , końce trzeciej litery V - w kolumnach  $2Q_r+1$ ,  $3Q_r-1$  itd. W przypadku nieparzystej liczby żłobków, wierzchołek litery V jest spłaszczony i wyznaczony przez dwa 2-fazowe uzwojenia elementarne (rys. 1.10). W przypadku parzystej liczby żłobków, w wierzchołku litery V znajduje się uzwojenie 1-fazowe związane ze składową zerową "0p" (rys. 1.11). W obu przypadkach między kolejnymi literami V w kolumnach o numerach:  $Q_r$ ,  $2Q_r$ ,  $3Q_r$ ,... znajdują się 1-fazowe uzwojenia elementarne odpowiadające składowej zerowej "0". Opierając się na powyższych spostrzeżeniach można w sposób mnemotechniczny skonstruować schemat rozkładu wirnika o dowolnej liczbie żłobków  $Q_r$ .

*Schemat rozkładu maszyny indukcyjnej o liczbie par biegunów p i liczbie żłobków wirnika  $Q_r$  na maszyny elementarne powstaje poprzez formalne zestawienie schematu rozkładu uzwojenia stojana o liczbie par biegunów p ze schematem rozkładu uzwojenia wirnika o liczbie żłobków  $Q_r$ .*

Przykładowo schemat rozkładu maszyny indukcyjnej o liczbie par biegunów  $p=2$  i liczbie żłobków wirnika  $Q_r=16$  (przy uwzględnieniu  $v_m=48$  kolejnych harmonicznych przestrzennych) przedstawia rys. 1.15.

Uzwojenie klatkowe wirnika jest uzwojeniem konstrukcyjnie zwartym. Z relacji:

$$[u_r] = 0 \quad (1.30)$$

wynika, że:

$$[u_r^{\alpha\beta}] = 0 \quad (1.31)$$

a to oznacza, że połączone w szereg ciągi uzwojeń elementarnych zawartych w poszczególnych wierszach schematu rozkładu wirnika są zwarte.



Jeśli stojan jest zasilany symetrycznym 3-fazowym układem napięć sinusoidalnych (o kolejności zgodnej) o postaci:

$$\begin{aligned}u_{s1} &= \sqrt{2} U_{sf} \cos(\omega_o t + \varphi) \\u_{s2} &= \sqrt{2} U_{sf} \cos(\omega_o t + \frac{2\pi}{3} + \varphi) \\u_{s3} &= \sqrt{2} U_{sf} \cos(\omega_o t + \frac{4\pi}{3} + \varphi)\end{aligned}\tag{1.32}$$

to:

$$\begin{aligned}u_{s\alpha} &= U_s \cos(\omega_o t + \varphi) \\u_{s\beta} &= U_s \sin(\omega_o t + \varphi) \\u_{s0} &= 0\end{aligned}\tag{1.33}$$

gdzie:

$$U_s = \sqrt{3} U_{sf},\tag{1.34}$$

co oznacza, że połączone szeregowo 2-fazowe uzwojenia elementarne stojanów z pierwszego wiersza schematu rozkładu stojana są zasilane odpowiednio napięciami  $u_{s\alpha}$  i  $u_{s\beta}$ , zaś ciąg 1-fazowych uzwojeń elementarnych w drugim wierszu schematu rozkładu stojana - jest zwarty.

Prądy w 1-fazowych uzwojeniach elementarnych stojana mogą powstawać tylko na drodze indukcji elektromagnetycznej. Są one indukowane w stojanie przez prądy (związane z różnymi wierszami schematu rozkładu wirnika) będące reakcją uzwojenia wirnika na prąd stojana płynący przez ciąg 2-fazowych maszyn elementarnych z pierwszego wiersza schematu rozkładu stojana pod wpływem przyłożonego napięcia sieci. To, że prądy te nie powstają w stojanie bezpośrednio pod wpływem przyłożonych napięć, ale są indukowane w uzwojeniach stojana dopiero "wtórnie" przez prądy wirnika, znajduje wyraz w ich nazwie: *prądy reakcji wtórnej stojana*. Są to prądy o pulsacjach obcych - różnych od pulsacji sieci  $\omega_o$ .

## 1.4. STRUKTURA MACIERZY INDUKCYJNOŚCI STOJAN-WIRNIK WE WSPÓŁRZĘDNYCH $\alpha\beta$

W rozdz.1.2 podano ogólną postać macierzy indukcyjności stojan-stojan  $[M_{ss}^{\alpha\beta}]$ , wirnik-wirnik  $[M_{rr}^{\alpha\beta}]$  oraz wirnik-stojan  $[M_{rs}^{\alpha\beta}(\mathcal{G})]$  we współrzędnych  $\alpha\beta$ . Macierze  $[M_{ss}^{\alpha\beta}]$  oraz  $[M_{rr}^{\alpha\beta}]$  charakteryzują się prostą budową diagonalną opisaną wzorami (1.22) i (1.23) w przeciwieństwie do macierzy indukcyjności wirnik-stojan  $[M_{rs}^{\alpha\beta}(\mathcal{G})]$ , której budowa jest znacznie bardziej złożona i różna od postaci diagonalnej (patrz wzór na macierz (1.24) oraz postaci jej macierzy składowych (1.25)+(1.28)). W macierzy  $[M_{rs}^{\alpha\beta}(\mathcal{G})]$  tylko pewna liczba elementów jest różna od zera, a w niektórych przypadkach - macierz może w ogóle nie posiadać elementów zerowych i może pozostać po transformacji  $\alpha\beta$  nadal macierzą pełną.

Poszczególne wiersze i kolumny macierzy wirnik-stojan  $[M_{rs}^{\alpha\beta}(\mathcal{G})]$  odpowiadają współrzędnym wirnika i stojana. W zależności od tego, czy liczba żłobków wirnika jest nieparzysta, czy parzysta - macierze te mają odpowiednio postać (1.35) lub (1.36) - str. 48. Pary współrzędnych  $\alpha\beta$  oraz współrzędne zerowe  $0$  i  $0p$  dzielą macierz na podmacierze o wymiarach  $2 \times 2$ ,  $2 \times 1$ ,  $1 \times 2$  i  $1 \times 1$ .

Struktura macierzy  $[M_{rs}^{\alpha\beta}(\mathcal{G})]$  jest ściśle powiązana ze schematem rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne i daje się łatwo określić na podstawie znajomości tego schematu. Związek ten wynika bezpośrednio z relacji (1.24)+(1.28). Pełna podmacierz  $2 \times 2$  we wzorze (1.25) jest macierzą indukcyjności wirnik-stojan  $v$ -tej maszyny elementarnej o 2-fazowym stojanie i 2-fazowym wirniku. Pełna podmacierz  $1 \times 2$  we wzorze (1.26) jest macierzą indukcyjności wirnik-stojan  $v$ -tej maszyny elementarnej o 1-fazowym stojanie i 2-fazowym wirniku. Pełna podmacierz  $2 \times 1$  we wzorze (1.27) jest macierzą indukcyjności wirnik-stojan  $v$ -tej maszyny elementarnej o 2-fazowym stojanie i 1-fazowym



1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$$\begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad 0 \\
 \alpha_1 \\
 \beta_1 \\
 \alpha_2 \\
 \beta_2 \\
 \alpha_3 \\
 \beta_3 \\
 0
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccc}
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & 
 \end{array} \right]
 \quad (1.37)$$

Zgodnie z powyższym wnioskiem, macierz ta może być przedstawiona w postaci sumy macierzy  $[M_{rsv}^{\alpha\beta}]$  zawartych w drugiej kolumnie tabl. 1.1.

Wszystkie możliwe postacie pełnych podmacierzy w macierzy indukcyjności wirnik-stojan dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej  $[M_{rsv}^{\alpha\beta}]$ , które mogą wystąpić w modelu matematycznym maszyny w przypadku nieparzystej lub parzystej liczby żłobków, są w usystematyzowany sposób zestawione w tabl. 1.2 (założono, że wirnik  $v$ -tej elementarnej maszyny jest położony w dowolnym  $i$ -tym wierszu schematu rozkładu).

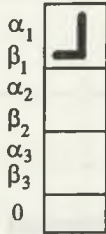
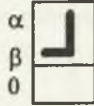
Ze względu na to, że dla oceny stopnia uproszczenia macierzy zasadnicze znaczenie ma to, jakie elementy macierzy są równe zero, a jakie są różne od zera (a nie to, jakie konkretnie wartości przyjmują), użyteczne jest wprowadzenie pojęcia wypełnienia macierzy.

*Wypełnienie macierzy tworzy się zastępując elementy niezerowe pełnymi (zaczernionymi) kwadratami jednostkowymi (kwadratami o wymiarach  $1 \times 1$ ), zaś elementy zerowe - pustymi kwadratami jednostkowymi.*

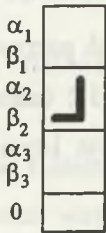
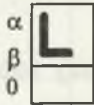
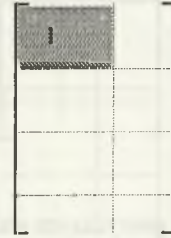


Tablica 1.1

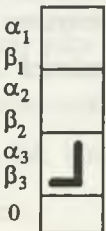
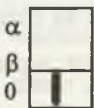
Macierze indukcyjności wirnik-stojan dla wyższych harmonicznych przestrzennych  
we współrzędnych  $\alpha\beta$  maszyny o  $p=1$  i  $Q_r=7$  oraz ich wypełnienia



$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	0
$-\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0



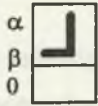
0	0	0
0	0	0
$\cos 2\vartheta$	$-\sin 2\vartheta$	0
$-\sin 2\vartheta$	$-\cos 2\vartheta$	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0





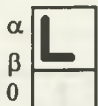
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	$\cos 3\vartheta$
0	0	$-\sin 3\vartheta$
0	0	0

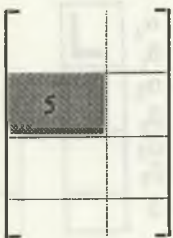



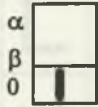
1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu


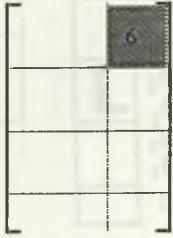


$\alpha_1$		0	0	0	
$\beta_1$		0	0	0	
$\alpha_2$		0	0	0	
$\beta_2$		0	0	0	
$\alpha_3$		$\cos 4\theta$	$\sin 4\theta$	0	
$\beta_3$		$\sin 4\theta$	$-\cos 4\theta$	0	
0		0	0	0	

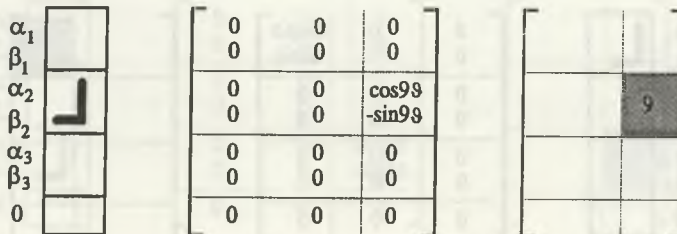
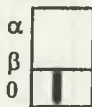
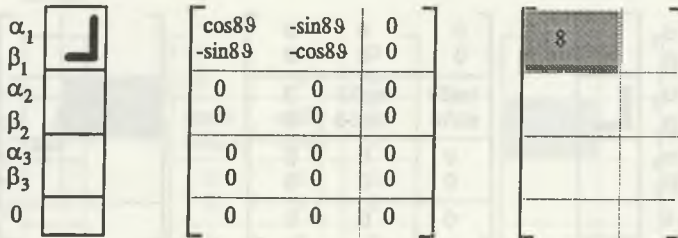
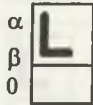
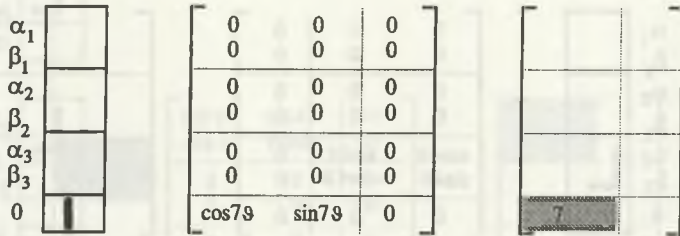
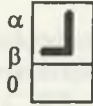


$\alpha_1$		0	0	0	
$\beta_1$		0	0	0	
$\alpha_2$		$\cos 5\theta$	$-\sin 5\theta$	0	
$\beta_2$		$\sin 5\theta$	$\cos 5\theta$	0	
$\alpha_3$		0	0	0	
$\beta_3$		0	0	0	
0		0	0	0	



$\alpha_1$		0	0	$\cos 6\theta$	
$\beta_1$		0	0	$\sin 6\theta$	
$\alpha_2$		0	0	0	
$\beta_2$		0	0	0	
$\alpha_3$		0	0	0	
$\beta_3$		0	0	0	
0		0	0	0	

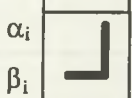
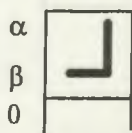
Modelowanie 3-fazowych maszyn indukcyjnych  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przepływu



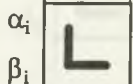
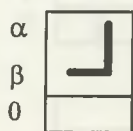
1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

Tablica 1.2

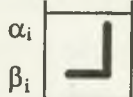
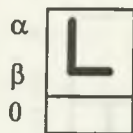
Macierze indukcyjności wirnik-stojan dla  $v$ -tej harmonicznej przestrzennej we współrzędnych  $\alpha\beta$  w zależności od struktury maszyny elementarnej



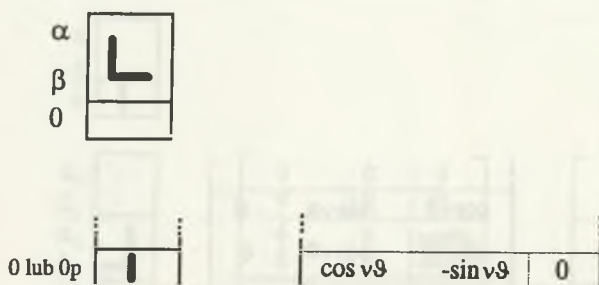
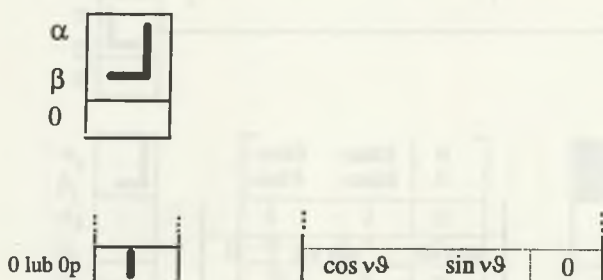
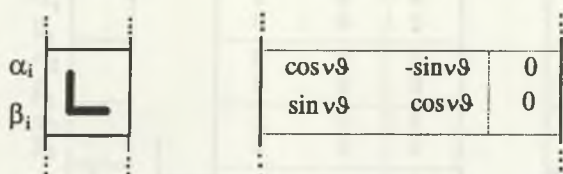
$\cos v\vartheta$	$\sin v\vartheta$	0
$-\sin v\vartheta$	$\cos v\vartheta$	0



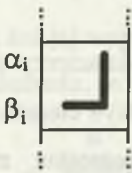
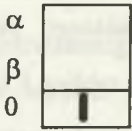
$\cos v\vartheta$	$\sin v\vartheta$	0
$\sin v\vartheta$	$-\cos v\vartheta$	0



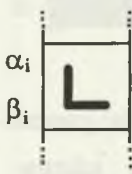
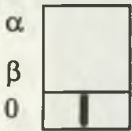
$\cos v\vartheta$	$-\sin v\vartheta$	0
$-\sin v\vartheta$	$-\cos v\vartheta$	0



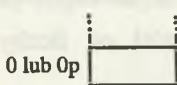
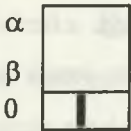
1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
 przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu



0	0	$\cos v\vartheta$
0	0	$-\sin v\vartheta$



0	0	$\cos v\vartheta$
0	0	$\sin v\vartheta$















0	0	$\cos v\vartheta$
---	---	-------------------

Wypełnienia poszczególnych macierzy  $[M_{rs}^{\alpha\beta}]$  dla rozważanego przykładu maszyny o  $p=1$  i  $Q_r=7$  są zestawione w trzeciej kolumnie tablicy 1.1. Pełne, sąsiadujące ze sobą kwadraty jednostkowe zlewają się tworząc zaczernione kwadraty i prostokąty o wymiarach  $2 \times 2$ ,  $2 \times 1$  lub  $1 \times 2$ .

Liczby umieszczone w obrębie pełnych (zaczerzonych) podmacierzy stanowią dodatkową istotną informację, wskazującą na numery tych maszyn elementarnych, dla których te właśnie podmacierze są niezerowe. Wypełnienia macierzy w wyrazisty i przejrzysty sposób charakteryzują rozmieszczenie elementów macierzy różnych od zera oraz elementów równych zero.

Przez nałożenie na siebie dwóch wypełnień macierzy o jednakowych wymiarach i przyjęcie, że:

	+		=		(1.38)
	+		=		
	+		=		
	+		=		

otrzymuje się wypełnienie, które określamy jako *sumę wypełnień*.

Jest oczywiste, że *wypełnienie sumy macierzy jest równe sumie wypełnień macierzy*.

Ta własność jest istotną zaletą pozwalającą na szybkie zorientowanie się w strukturze macierzy indukcyjności wirnik-stojan (i w konsekwencji - w strukturze modelu matematycznego maszyny) w zależności od liczby par biegunów  $p$  i liczby żłobków wirnika  $Q_r$ .

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

Dla rozważanego przykładu maszyny o liczbie par biegunów  $p=1$  i liczbie żłobków wirnika  $Q_r=7$  (schemat rozkładu - rys.1.10) macierz indukcyjności wirnik-stojan  $[M_{rs}^{\alpha\beta}]$  jest równa sumie macierzy zawartych w drugiej kolumnie tab. 1.1, zaś jej wypełnienie, będące sumą wypełnień z trzeciej kolumny tab 1.1 ma (przy założeniu, że  $v_m = 24$ ) następującą postać:

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$	1,8,13,		6,15,...
$\beta_1$	20,22,...		
$\alpha_2$	2,5,16,		9,12,...
$\beta_2$	19,23,...		
$\alpha_3$	4,10,11,		3,18,
$\beta_3$	17,...		24,...
0	7,14,...		21,...

(1.39)

Dla 3-fazowej maszyny indukcyjnej o liczbie par biegunów  $p=2$  i liczbie żłobków wirnika  $Q_r=16$ , której schemat rozkładu przedstawia rys.1.15, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan ma postać (1.40) - str. 59.

Dla 3-fazowej maszyny indukcyjnej o liczbie par biegunów  $p=4$  i liczbie żłobków wirnika  $Q_r=24$ , której schemat rozkładu przedstawiono na rys.1.16, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan - ma postać (1.41) - str. 59.

Wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan można zbudować nie tylko na podstawie schematu rozkładu maszyny, ale również znajomości wypełnienia macierzy stojan-stojan oraz wirnik-wirnik.





1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$	2,14,34,	18,	
$\beta_2$	46,...	30,...	
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$	4,20,28,	12,	
$\beta_4$	44,...	36,...	
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$	10,22,26,	6,	
$\beta_6$	38,...	42,...	
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
0p			8,24,...
0	16,32,...		48,...

(1.40)

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$			
$\beta_2$			
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$	4,20,		
$\beta_4$	28,44,...		
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$			
$\beta_6$			
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
$\alpha_8$	8,16,		
$\beta_8$	32,40,...		
$\alpha_9$			
$\beta_9$			
$\alpha_{10}$			
$\beta_{10}$			
$\alpha_{11}$			
$\beta_{11}$			
0p	12,36,...		
0			24,48,...

(1.41)

Wypełnienie macierzy indukcyjności stojan-stojan maszyny 3-fazowej (1.22) zbudowane poprzez analogię do wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan, ma postać:

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha$	1,2,4,5,7,		
$\beta$	8,10,11,...		
0			3,6,9,...

(1.42)

przy czym dla współrzędnych  $\alpha\beta$  zaczerpnięte pole o wymiarach  $2 \times 2$  reprezentuje podmacierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

zaś dla współrzędnej 0 zaczerpnięte pole o wymiarach  $1 \times 1$  reprezentuje podmacierz:

$$[1]. \quad (1.44)$$

Zbiór rzędów harmonicznych przestrzennych dla współrzędnych  $\alpha\beta$  zawiera numery 2-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w pierwszym wierszu schematu rozkładu stojana, zaś zbiór rzędów harmonicznych przestrzennych dla współrzędnej 0 - numery 1-fazowych uzwojeń elementarnych, zawartych w drugim wierszu schematu rozkładu stojana.

W analogiczny sposób można zbudować wypełnienie macierzy (1.45) indukcyjności wirnik-wirnik o liczbie żłobków  $Q_r$  (1.23).

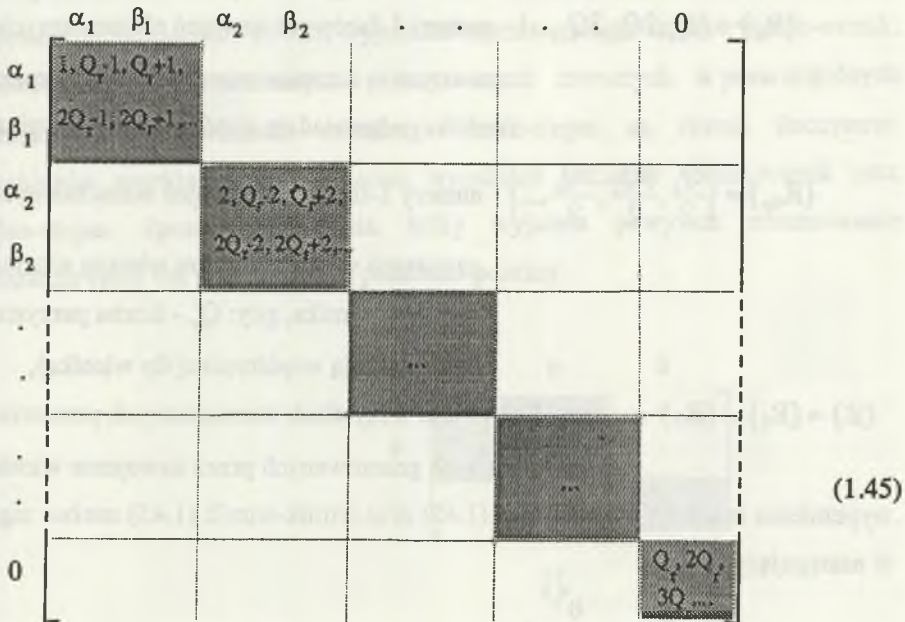
Zbiory harmonicznych przestrzennych, zawartych w poszczególnych wierszach wypełnienia macierzy wirnik-wirnik, są równe numerom uzwojeń elementarnych zawartych w poszczególnych wierszach schematu rozkładu wirnika.

Przyjmując oznaczenia zbiorów i podzbiorów stojana i wirnika:

$\{S_1\} = \{p, 2p, 4p, 5p, 7p, 8p, \dots\}$  - numery 2-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w pierwszym wierszu schematu rozkładu (odpowiadają współrzędnym  $\alpha\beta$  stojana),

$\{S_0\} = \{3p, 6p, 9p, \dots\}$  - numery 1-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w drugim wierszu schematu rozkładu (odpowiadają współrzędnym 0 stojana),

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu



$\{S\} = \{S_1\} \cup \{S_0\}$  - zbiór wszystkich harmonicznych przestrzennych generowanych przez uzwojenie stojana,

$\{R_1\} = \{1, Q_r - 1, Q_r + 1, 2Q_r - 1, 2Q_r + 1, \dots\}$  - numery 2-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w pierwszym wierszu schematu rozkładu wirnika (odpowiadają współrzędnym  $\alpha_1 \beta_1$  wirnika),

$\{R_2\} = \{2, Q_r - 2, Q_r + 2, 2Q_r - 2, 2Q_r + 2, \dots\}$  - numery 2-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w drugim wierszu schematu rozkładu wirnika (odpowiadają współrzędnym  $\alpha_2 \beta_2$  wirnika),

$\{R_i\} = \{i, Q_r - i, Q_r + i, 2Q_r - i, 2Q_r + i, \dots\}$  - numery 2-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w i-tym wierszu schematu rozkładu wirnika (odpowiadają współrzędnym  $\alpha_i \beta_i$  wirnika),

$\{R_0\} = \{Q_r, 2Q_r, 3Q_r, \dots\}$  - numery 1-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w ostatnim wierszu schematu rozkładu wirnika (odpowiadają współrzędnej 0 wirnika),

$\{R_{0p}\} = \left\{ \frac{Q_r}{2}, \frac{3Q_r}{2}, \frac{5Q_r}{2}, \dots \right\}$  - numery 1-fazowych uzwojeń elementarnych zawartych w przedostatnim wierszu schematu rozkładu wirnika, gdy:  $Q_r$  - liczba parzysta (odpowiadają współrzędnej  $0_p$  wirnika),

$\{R\} = \{R_1\} \cup \{R_2\} \cup \dots \cup \{R_0\}$  - zbiór wszystkich harmonicznych przestrzennych generowanych przez uzwojenie wirnika,

wypełnienia macierzy stojan-stojan (1.42) oraz wirnik-wirnik (1.45) można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad 0 \\
 \alpha \left[ \begin{array}{cc|c}
 \{S_1\} & & \\
 \hline
 & & \{S_0\}
 \end{array} \right. \\
 \beta \\
 0
 \end{array} \quad (1.46)$$

oraz

$$\begin{array}{c}
 \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \dots \quad 0 \\
 \alpha_1 \left[ \begin{array}{cc|cc|c|c}
 \{R_1\} & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & \{R_2\} & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 \hline
 0 & & & & & \{R_0\}
 \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan można łatwo otrzymać przez odpowiednie zestawienie ze sobą wypełnień macierzy stojan-stojan i wirnik-wirnik, albowiem ciągi harmonicznych przestrzennych zawartych w poszczególnych podmacierzach wypełnienia macierzy wirnik-stojan są równe iloczynowi podzbiorów wyróżnionych w obrębie wypełnień macierzy wirnik-wirnik oraz stojan-stojan. Sposób zestawienia, który wyjaśnia powyższe rozumowanie i charakteryzuje tok postępowania, pokazano poniżej:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \alpha & \beta & 0 \\
 \alpha & \boxed{\{S_1\}} & & \\
 \beta & & & \\
 0 & & & \boxed{\{S_0\}}
 \end{array} \\
 \Downarrow \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & 0 \\
 \alpha_1 & \boxed{\{R_1\}} & & & & & \\
 \beta_1 & & & & & & \\
 \alpha_2 & & & \boxed{\{R_2\}} & & & \\
 \beta_2 & & & & & & \\
 & & & & & & \dots \\
 0 & & & & & & \boxed{\{R_0\}}
 \end{array} \\
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{ccc}
 & \alpha & \beta & 0 \\
 \alpha_1 & \boxed{\{R_1\} \wedge \{S_1\}} & \boxed{\{R_1\} \wedge \{S_0\}} & \\
 \beta_1 & & & \\
 \alpha_2 & \boxed{\{R_2\} \wedge \{S_1\}} & \boxed{\{R_2\} \wedge \{S_0\}} & \\
 \beta_2 & & & \\
 & & & \dots \\
 0 & \boxed{\{R_0\} \wedge \{S_1\}} & \boxed{\{R_0\} \wedge \{S_0\}} & 
 \end{array}
 \end{array} \tag{1.48}$$

Sprawdźmy powyższy algorytm postępowania na przykładzie.

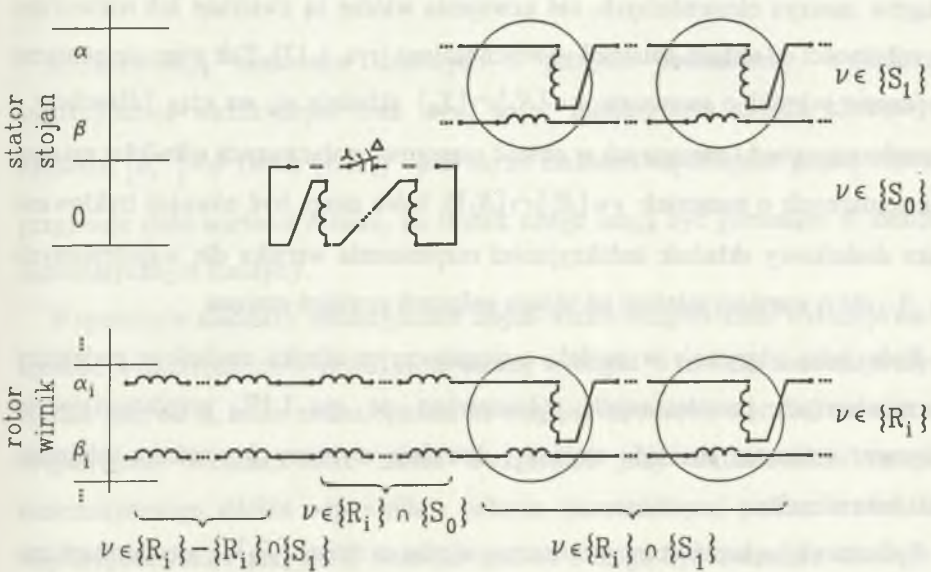
Dla 3-fazowej maszyny o  $p=1$  i  $Q_r=7$  (schemat rozkładu rys. 1.10, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan rys. 1.39) otrzymuje się:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & \begin{array}{c} 1,2,4,5,7,8,10,11, \\ 13,14,16,17,19, \\ 20,22,23, \dots \end{array} & & \\ \beta & & & \\ 0 & & & \begin{array}{c} 3,6,9,12,15, \\ 18,21,24, \dots \end{array} \end{array} \\
 \Downarrow \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 \\ \alpha_1 & \begin{array}{c} 1,6,8,13, \\ 5,20,22, \dots \end{array} & & & & & \\ \beta_1 & & & & & & \\ \alpha_2 & & \begin{array}{c} 2,5,9,12, \\ 16,19,23, \dots \end{array} & & & & \\ \beta_2 & & & & & & \\ \alpha_3 & & & & \begin{array}{c} 3,4,10,11, \\ 17,18,24, \dots \end{array} & & \\ \beta_3 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \begin{array}{c} 7,14, \\ 21, \dots \end{array} \end{array} \\
 \Rightarrow \\
 \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha_1 & \begin{array}{c} 1,8,13, \\ 20,22, \dots \end{array} & \begin{array}{c} 6,15, \dots \end{array} \\ \beta_1 & & \\ \alpha_2 & \begin{array}{c} 2,5,16, \\ 19,23, \dots \end{array} & \begin{array}{c} 9,12, \dots \end{array} \\ \beta_2 & & \\ \alpha_3 & \begin{array}{c} 4,10,11,17, \dots \end{array} & \begin{array}{c} 3,18,24, \dots \end{array} \\ \beta_3 & & \\ 0 & \begin{array}{c} 7,14, \dots \end{array} & \begin{array}{c} 21, \dots \end{array} \end{array}
 \end{array}
 \tag{1.49}$$

Na podstawie zdefiniowanych wcześniej zbiorów można wyróżnić szereg podzbiorów harmoniczných przestrzenných pełniących specyficzną rolę w modelu matematycznym maszyny. I tak, różnica zbiorów  $\{R\} - \{S\}$  jest zbiorem harmoniczných przestrzenných wytwarzanych przez uzwojenie wirnika, przez które wirnik nie sprzęga się ze stojanem. Elementarne 2-fazowe wirniki odpowiadające tym harmoniczným odgrywają więc rolę dodatkowych indukcyjności - dławików w obwodach wirników różnych ciągów maszyn elementarných. Wirniki elementarne o numerach  $v \in \{\{R_i\} - \{R_i\} \cap \{S_i\}\}$  tworzą ciąg dławików włączonych w obwód wirników maszyn elementarných o numerach  $v \in \{R_i\} \cap \{S_i\}$  (a więc tych maszyn, których wirniki są zawarte w  $i$ -tym wierszu schematu rozkładu wirnika). Te połączone w szereg dławiki można zastąpić jedną zastępczą indukcyjnością o wartości  $L_{\sigma si} = \sum_v L_{rv}$ , dla:  $v \in \{\{R_i\} - \{R_i\} \cap \{S_i\}\}$

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

i potraktować jako dodatkowy składnik indukcyjności rozproszenia wirnika dla współrzędnych  $\alpha_i \beta_i$  (rys. 1.17).



Rys. 1.17. Fragment schematu rozkładu stojana i dowolnie wybrany  $i$ -ty wiersz schematu rozkładu wirnika

Fig. 1.17. Part of stator diagram of decomposition and arbitrary chosen  $i$ -th row of rotor diagram of decomposition

Iloczyn zbiorów  $\{R\} \cap \{S_0\}$  jest zbiorem harmonicznych, przez które 2-fazowe wirniki elementarne sprzęgają się z 1-fazowymi uzwojeniami elementarnymi stojana. Obwód elektryczny dla współrzędnej zerowej stojana, złożony z ciągu 1-fazowych stojanów elementarnych jest zwarty, o ile uzwojenia stojana są skojarzone w trójkąt lub w gwiazdę z przewodem zerowym (w pierwszym przypadku - bezpośrednio na zaciskach, zaś w drugim przypadku - poprzez impedancję źródła zasilania) lub otwarty, jeśli uzwojenia stojana są połączone w gwiazdę bez przewodu zerowego. Stąd też maszyny elementarne o 1-fazowych stojanach i 2-fazowych wirnikach, odpowiadające harmonicznym przestrzennym ze



zbioru  $\{R\} \cap \{S_0\}$ , tworzą ciągi specyficznych "dławików - transformatorów", których uzwojenia pierwotne są włączone w obwód wirników odpowiednich ciągów maszyn elementarnych, zaś uzwojenia wtórne są zwierane lub rozwierane w zależności od układu połączeń uzwojeń stojana (rys. 1.17). Tak więc elementarne 2-fazowe wirniki o numerach  $v \in \{R_i\} \cap \{S_0\}$  składają się na ciąg "dławików - transformatorów" (włączonych w obwód szeregowo połączonych wirników maszyn elementarnych o numerach  $v \in \{R_i\} \cap \{S_i\}$ ), które mogą być również traktowane jako dodatkowy składnik indukcyjności rozproszenia wirnika dla współrzędnych  $\alpha_i, \beta_i$ , ale o wartości zależnej od układu połączeń uzwojeń stojana.

Rolę, jaką odgrywają w modelu matematycznym silnika omówione podzbiory harmoniczných przestrzenných zobrazowano na rys. 1.17, przedstawiającym fragment schematu rozkładu stojana i dowolnie wybrany  $i$ -ty wiersz schematu rozkładu wirnika.

Podsumowując, harmoniczne przestrzenne wirnika ze zbioru  $\{R_i\}$ , a więc harmoniczne wytwarzane przez współrzędne  $\alpha_i, \beta_i$  wirnika, można podzielić na 3 podzbiory:

- podzbiór harmoniczných przestrzenných  $\{R_i\} \cap \{S_i\}$ , związanych z maszynami elementarnymi o 2-fazowych stojanach i 2-fazowych wirnikach, a więc podzbiór harmoniczných, za pośrednictwem których dokonuje się w silniku przemiana energii elektrycznej w mechaniczną,
- podzbiór harmoniczných przestrzenných  $\{R_i\} - \{R_i\} \cap \{S_i\}$ , związanych z 2-fazowymi wirnikami elementarnymi pełniącymi wyłącznie rolę dodatkowych indukcyjności - "dławików" - w obwodach wirników i nie uczestniczących w przemianie elektromechanicznej dokonującej się w silniku,
- podzbiór harmoniczných przestrzenných  $\{R_i\} \cap \{S_0\}$ , związanych z maszynami elementarnymi o 1-fazowych stojanach i 2-fazowych wirnikach, pełniących rolę "dławików - transformatorów" o impedancji zależnej od układu połączeń uzwojeń stojana.

## 1.5. WYPEŁNIENIE MACIERZY INDUKCYJNOŚCI WIRNIK- STOJAN A REDUKCJA LICZBY WSPÓŁRZĘDNYCH WIRNIKA

Konsekwencją elementów zerowych i pustych podmacierzy w macierzy indukcyjności wirnik-stojan oraz tego, że w indukcyjnym silniku klatkowym zachodzi  $[u_r^{\alpha\beta}] = 0$  (wzór (1.31)) - jest to, że niektóre współrzędne prądu wirnika przyjmują stałe wartości zerowe, na skutek czego mogą być pominięte w modelu matematycznym maszyny.

Wypełnienie macierzy indukcyjności stojan-wirnik bezpośrednio wskazuje na te spośród współrzędnych wirnika, które muszą wystąpić w modelu matematycznym silnika oraz na te, które można opuścić ze względu na zerowe wartości rozwiązań. Współrzędne wirnika, które trzeba uwzględnić przy formułowaniu modelu matematycznego silnika odpowiadają pełnym (zaczernionym) podmacierzom, zaś współrzędne, które przyjmują wartości zerowe i mogą być z modelu usunięte - pustym podmacierzom. *Liczba współrzędnych wirnika, równa liczbie równań różniczkowych wirnika, jest istotną cechą charakterystyczną modelu matematycznego i będzie dalej oznaczana skrótem LWR (Liczba Współrzędnych Ratora). Odpowiednio - liczba współrzędnych i równań stojana, która może wynosić 2 (współrzędne  $\alpha\beta$ ) lub 3 (współrzędne  $\alpha\beta 0$ ), będzie oznaczana skrótem LWS (Liczba Współrzędnych Statora).* Dla 3-fazowych indukcyjnych maszyn klatkowych zachodzi w ogólności:  $LWS=2$  lub  $LWS=3$  oraz  $2 \leq LWR \leq Q_r$ .

W modelu matematycznym maszyny o  $p=1$  i  $Q_r=7$  (schemat rozkładu - rys. 1.10, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan - (1.39)) wystąpią wszystkie współrzędne wirnika:  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, 0$  ( $LWR = Q_r = 7$ ).

W modelu maszyny o  $p=2$  i  $Q_r=16$  (schemat rozkładu rys. 1.15, wypełnienie macierzy - 1.40)) wystąpią wyłącznie współrzędne wirnika:  $\alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4,$

$\alpha_6, \beta_6, 0p, 0$  (LWR=8), ponieważ  $i_{r\alpha_1} = 0, i_{r\beta_1} = 0, i_{r\alpha_3} = 0, i_{r\beta_3} = 0, i_{r\alpha_5} = 0,$   
 $i_{r\beta_5} = 0, i_{r\alpha_7} = 0, i_{r\beta_7} = 0.$

W modelu maszyny o  $p=4$  i  $Q_r=24$  (schemat rozkładu rys. 1.16, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan (1.41)) wystąpią tylko współrzędne wirnika:  $\alpha_4, \beta_4, \alpha_8, \beta_8, 0p$  i  $0$  (LWR=6), ponieważ  $i_{r\alpha_1} = 0, i_{r\beta_1} = 0, i_{r\alpha_2} = 0, i_{r\beta_2} = 0,$   
 $i_{r\alpha_3} = 0, i_{r\beta_3} = 0, i_{r\alpha_5} = 0, i_{r\beta_5} = 0, i_{r\alpha_6} = 0, i_{r\beta_6} = 0, i_{r\alpha_7} = 0, i_{r\beta_7} = 0,$   
 $i_{r\alpha_9} = 0, i_{r\beta_9} = 0, i_{r\alpha_{10}} = 0, i_{r\beta_{10}} = 0, i_{r\alpha_{11}} = 0, i_{r\beta_{11}} = 0.$

Pokazana na powyższych przykładach redukcja liczby współrzędnych wirnika w modelu matematycznym maszyny wynika z charakterystycznej relacji między liczbą par biegunów  $p$  i liczbą zębów wirnika  $Q_r$  - i zachodzi nawet wtenczas, gdy liczba uwzględnionych harmonicznych przestrzennych jest nieskończenie wielka. Jeśli liczba branych pod uwagę w analizie kolejnych harmonicznych przestrzennych zostanie ograniczona do  $\nu_m$ , wówczas liczba współrzędnych wirnika w równaniach maszyny może ulec dodatkowemu zmniejszeniu.

Jeśli przykładowo w maszynie o  $p=1$  i  $Q_r=7$  (schemat rozkładu rys. 1.10, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan (1.39)) uwzględnimy wyłącznie 2 pierwsze harmoniczne przestrzenne ( $\nu=1,2, \nu_m=2$ ), wówczas macierz wypełnienia przyjmie postać:

	$\alpha$	$\beta$	$0$
$\alpha_1$	1		
$\beta_1$			
$\alpha_2$	2		
$\beta_2$			
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$0$			

(1.50)

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

a w modelu pozostaną tylko 4 współrzędne wirnika:  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  (LWR=4).

Jeśli w maszynie o  $p=2$  i  $Q_r = 16$  (schemat rozkładu rys. 1.15, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan (1.40)) przyjmiemy  $v_m = 4$ , wówczas wypełnienie macierzy przyjmie postać:

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$	2		
$\beta_2$			
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$	4		
$\beta_4$			
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$			
$\beta_6$			
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
0p			
0			

(1.51)

a w modelu pozostaną tylko współrzędne wirnika  $\alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4$  (LWR=4).

Ze względu na to, że poszczególne współrzędne  $\alpha\beta$  wirnika wiążą się ze ściśle określonymi ciągami harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego, liczbę współrzędnych wirnika w modelu matematycznym silnika można również zredukować przez uwzględnienie w analizie jednych, a pominięcie innych ciągów harmonicznych przestrzennych.

Jeśli w maszynie o  $p=1$  i  $Q_r = 7$  (wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan (1.1.39)) uwzględnimy harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v=1,8,13,20,22,\dots$ ,  $v=2,5,16,19,23,\dots$ ,  $v=6,15,\dots$ ,  $v=9,12,\dots$ , a pominiemy pozostałe ciągi harmonicznych, wówczas wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan przyjmie postać:

*Modelowanie 3-fazowych maszyn indukcyjnych  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przepływu*

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$	1,8,13,		6,15,...
$\beta_1$	20,22,...		
$\alpha_2$	2,5,16,		9,12,...
$\beta_2$	19,23,...		
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
0			

(1.52)

i do opisu modelu matematycznego wystarczą 4 współrzędne:  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  (LWR=4).

Jeśli w maszynie o  $p=4$  i  $Q_r=24$  (wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan (1.41)) uwzględnimy harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v=4,20,28,44,...$ , a pominiemy harmoniczne  $v=8,16,32,40,...$ ,  $v=12,36,...$  i  $v=24,48,...$ , to wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan przyjmie postać:

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$			
$\beta_2$			
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$	4,20,		
$\beta_4$	18,44,		
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$			
$\beta_6$			
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
$\alpha_8$			
$\beta_8$			
$\alpha_9$			
$\beta_9$			
$\alpha_{10}$			
$\beta_{10}$			
$\alpha_{11}$			
$\beta_{11}$			
0p			
0			

(1.53)

i w modelu matematycznym wystąpią tylko 2 współrzędne wirnika:  $\alpha_4, \beta_4$  (LWR=2).

*O tym, czy daną harmoniczną przestrzenną lub podzbiór harmoniczych przestrzennych przepływu magnetycznego należy uwzględnić w modelu matematycznym, czy też - można pominąć, decydują wartości amplitud tych harmoniczych, wynikające z wartości współczynników uzwojeń i rzędów, a ponadto - charakter i stopień powiązania z innymi harmonicznymi przestrzennymi decydujący o możliwości powstania określonych zjawisk pasożytniczych. Zagadnieniom tym poświęcone zostaną rozdz. 1.6 i rozdz. 2.1.*

## 1.6. DOMINUJĄCE HARMONICZNE PRZESTRZENNE PRZEPEŁYWU STOJANA I WIRNIKA

O znaczeniu poszczególnych harmoniczych rozkładu przestrzennego przepływu magnetycznego danego uzwojenia decyduje ich rząd oraz wartości współczynników uzwojenia dla wyższych harmoniczych. Miarą tego znaczenia może być iloczyn współczynnika uzwojenia dla  $v$ -tej harmoniczej  $k_{wv}$  i funkcji hiperbolicznej  $1/v$ .

*Współczynnik uzwojenia dla  $v$ -tej harmoniczej przestrzennej jest iloczynem współczynnika skrótu i grupy:*

$$k_{wv} = k_{pv} k_{dv} \quad (1.54)$$

Dla zezwoju skróconego (cięciwowego) o poskoku żłobkowym (poskoku wyrażonym liczbą podziałek żłobkowych)  $Y_Q$ , *współczynnik skrótu* oblicza się wg wzoru:

$$k_{pv} = \sin v \frac{\pi}{Q} Y_Q \quad (1.55)$$

gdzie:  $Y_Q$  - poskok uzwojenia wyrażony liczbą podziałek zębokowych.

Dla grupy złożonej z  $q$  -zezwojów **współczynnik grupy** przyjmuje postać:

$$k_{dv} = \frac{\sin v \frac{q\pi}{Q}}{q \sin v \frac{\pi}{Q}} \quad (1.56)$$

Współczynniki skrótu i grupy (1.55) i (1.56) są, ze względu na rząd harmonicznej przestrzennej  $v$ , dyskretnymi funkcjami okresowymi.

Jeżeli:

$$v = \left| \lambda \pm c \frac{Q}{Y_Q} \right| \quad (1.57)$$

to dla  $v$ -tej i  $\lambda$ -tej harmonicznej jednakowe są wartości bezwzględne współczynników skrótu, jeżeli zaś:

$$v = |\lambda \pm cQ| \quad (1.58)$$

to dla  $v$ -tej i  $\lambda$ -tej harmonicznej jednakowe są wartości bezwzględne współczynników grupy.

Ostatecznie więc współczynniki uzwojenia, które są ich iloczynami, przyjmują wartości równe co do modułu dla tych harmonicznych, których rzędy spełniają warunek:

$$v = |\lambda \pm cQ|. \quad (1.59)$$

Opierając się na wzorze (1.59) można podzielić harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojenia na klasy harmonicznych o jednakowych współczynnikach uzwojeń. Najważniejszą klasę stanowią harmoniczne o współczynniku uzwojenia równym współczynnikowi harmonicznej głównej. *Harmoniczne tej klasy, określone wzorem  $v = cQ \pm p$  noszą nazwę harmonicznych żłbkowych. Wszystkie pozostałe harmoniczne przestrzenne - to harmoniczne strefowe (pasmowe).* W przypadku symetrycznego uzwojenia 3-fazowego można wyróżnić tyle klas harmonicznych, ile żłbków przypada na biegun i fazę, czyli  $q$  klas.

W przypadku uzwojenia klatkowego liczba klas harmonicznych zależy od liczby żłbków  $Q_r$  i jest równa:

$$\frac{Q_r + 1}{2} \text{ klas,} \quad \text{gdy } Q_r - \text{ liczba nieparzysta}$$

$$\frac{Q_r}{2} + 1 \text{ klas} \quad \text{gdy } Q_r - \text{ liczba parzysta.}$$

Szczególną klasę stanowią harmoniczne o współczynnikach uzwojenia równych zero. Należą do niej harmoniczne o rzędach:

$$v = c \frac{Q}{Y_Q} \quad (\text{wartość zero przyjmuje współczynnik skrótu}) \quad (1.60)$$

oraz

$$v = 2c p m \quad (\text{wartość zero przyjmuje współczynnik grupy, o ile } q > 1),$$

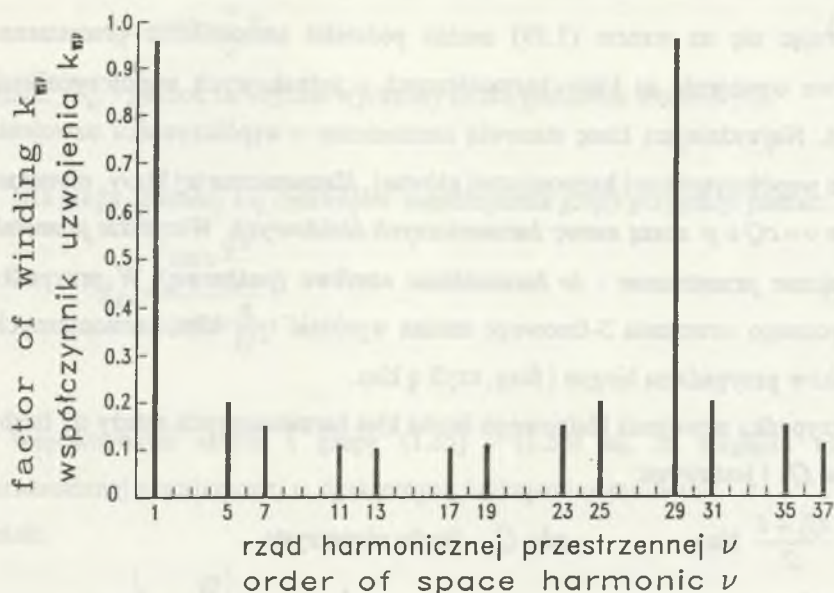
gdzie:  $m$  - liczba pasm fazowych). (1.61)

Rozważmy dla przykładu 3-fazowe uzwojenie stojana o danych:

$$p=1, \quad Q_s=30, \quad Y_{Q_s}=15.$$

Dyskretną zależność współczynnika uzwojenia  $k_{wsv}$  od rzędu harmonicznej przestrzennej  $v$  przedstawia dla takiego uzwojenia rys. 1.18.





Rys. 1.18. Współczynnik uzwojenia dla harmoniczných przestrzennych.

Uzwojenie o danych:  $p=1$ ;  $Q_s=30$ ;  $Y_{Q_s}=15$

Fig. 1.18. Winding factor for space harmonics.

Data of winding:  $p=1$ ;  $Q_s=30$ ;  $Y_{Q_s}=15$

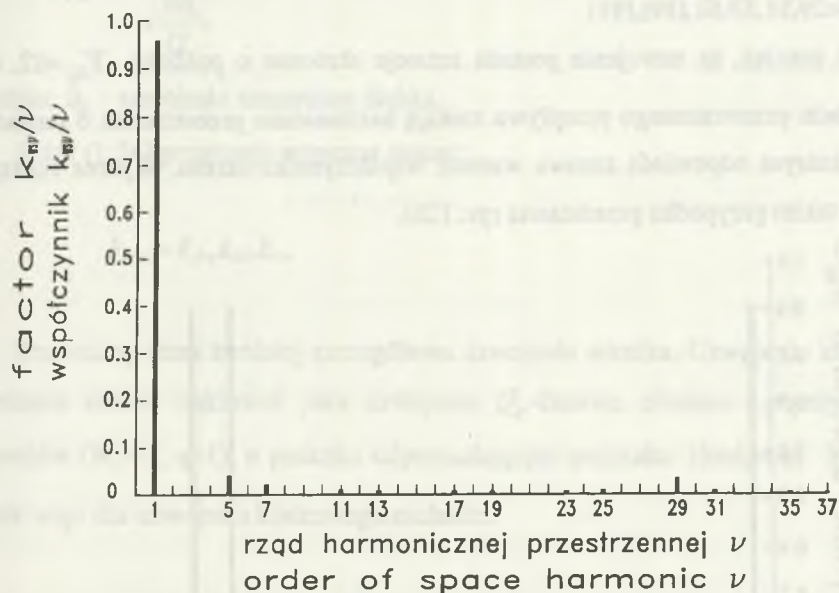
Harmoniczne przestrzenne można podzielić na  $q=5$  klas związanych z różnymi współczynnikami uzwojeń:

- 1)  $k_{ws\nu}=0.9567$      $\nu = p, Q_s - p, Q_s + p, \dots$  czyli  $\nu = 1, 29, 31, \dots$
- 2)  $k_{ws\nu} = 0.2000$      $\nu = 5p, Q_s - 5p, Q_s + 5p, \dots$  czyli  $\nu = 5, 25, 35, \dots$
- 3)  $k_{ws\nu}=0.1494$      $\nu = 7p, Q_s - 7p, Q_s + 7p, \dots$  czyli  $\nu = 7, 23, 37, \dots$
- 4)  $k_{ws\nu}=0.1095$      $\nu = 11p, Q_s - 11p, Q_s + 11p, \dots$  czyli  $\nu = 11, 19, 41, \dots$
- 5)  $k_{ws\nu}=0.1022$      $\nu = 13p, Q_s - 13p, Q_s + 13p, \dots$  czyli  $\nu = 13, 17, 43, \dots$

Harmoniczne przestrzenne  $\nu = 29, 31, 59, 61, \dots$  (ogólnie:  $\nu = cQ_s \pm p$ ,  $c$ -liczba całkowita) o współczynniku uzwojenia równym współczynnikowi uzwojenia dla harmoniczných głównej  $k_{ws p}$  (w rozważanym przykładzie  $k_{ws p}=0.9567$ ), to

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
 przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

harmoniczne żłobkowe stojana. Harmoniczne należące do pozostałych klas, to harmoniczne strefowe. Na rys. 1.19 przedstawiono dodatkowo wykres ilorazu  $k_{ws\nu} / \nu$ , decydującego o znaczeniu  $\nu$ -tej harmonicznej w rozkładzie przestrzennym przepływu stojana, w funkcji rzędu  $\nu$ . Jest to funkcja okresowa tłumiona. Okresowość funkcji wynika z okresowości współczynnika uzwojenia, zaś czynnikiem tłumiącym jest funkcja hiperboliczna:  $1/\nu$ .



Rys. 1.19. Współczynnik:  $k_{ws\nu} / \nu$  dla harmonicznych przestrzennych.

Uzwojenie o danych:  $p=1$ ;  $Q_s = 30$ ;  $Y_{Q_s} = 15$

Fig. 1.19. Factor  $k_{ws\nu} / \nu$  for space harmonics.

Data of winding:  $p=1$ ;  $Q_s = 30$ ;  $Y_{Q_s} = 15$

Biorąc pod uwagę powyższe rozważania i przykłady można stwierdzić, że dominujące znaczenie w rozkładzie przestrzennym przepływu stojana mają:

- harmoniczna główna  $p$ -ta,
- harmoniczne strefowe niskiego rzędu:  $5p$ ,  $7p$  (niekiedy również  $11p$ ,  $13p$ ),

- harmoniczne żłóbkowe stojana I rzędu:  $Q_s \pm p$  i II rzędu:  $2Q_s \pm p$  (czasem III rzędu:  $3Q_s \pm p$ ).

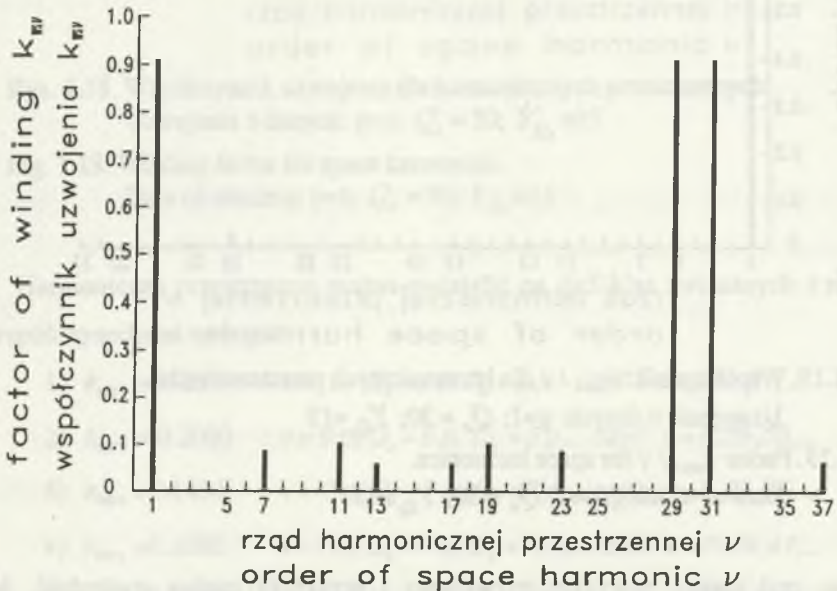
W rozważanym wcześniej przykładzie są to odpowiednio harmoniczne:

$$v=1$$

$$v=5,7,(11),(13)$$

$$v=29,31,59,61,(89),(91)$$

Jeśli przyjąć, że uzwojenie posiada zezwoje skrócone o poskoku  $Y_{Q_s}=12$ , to z rozkładu przestrzennego przepływu znikają harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v=5p$ , którym odpowiada zerowa wartość współczynnika skrótu. Wykres funkcji  $k_{wsv}$  w takim przypadku przedstawia rys. 1.20.



Rys. 1.20. Współczynnik uzwojenia dla harmoniczných przestrzenných.  
Uzwojenie o danych:  $p=1$ ;  $Q_s=30$ ;  $Y_{Q_s}=12$

Fig. 1.20. Winding factor for space harmonics.  
Data of winding:  $p=1$ ;  $Q_s=30$ ;  $Y_{Q_s}=12$

Na wartości amplitud harmonicznych przestrzennych przepływu magnetycznego znaczący wpływ może również wywierać sposób zamknięcia żłobka. Wpływ ten uwzględnia się rozszerzając wzór (1.54) o trzeci czynnik, a mianowicie - współczynnik szczyrbinki (otwarcia) żłobka:

$$k_{ov} = \frac{\sin v \frac{\pi b_o}{Q_r}}{v \frac{\pi b_o}{Q_r}} \quad (1.62)$$

gdzie:  $b_o$  - szerokość szczyrbiny żłobka.

Wzór (1.54) przyjmuje wówczas postać:

$$k_{wv} = k_{pv} k_{dv} k_{ov} \quad (1.63)$$

Rozważmy teraz bardziej szczegółowo uzwojenie wirnika. Uzwojenie klatkowe wirnika można traktować jako uzwojenie  $Q_r$ -fazowe, złożone z pojedynczych zwojów ( $N_r = 1, q = 1$ ), o poskoku odpowiadającym podziałce żłobkowej  $Y_{Q_r} = 1$ .

Tak więc dla uzwojenia klatkowego zachodzi:

$$k_{dv} = 1, \quad k_{pv} = \sin v \frac{\pi}{Q_r} \quad (1.64)$$

Ze względu na zerowanie się współczynnika skrótu, w *krzywej przestrzennej przepływu wirnika nie występują harmoniczne o rządach  $v = c Q_r$ .*

Harmoniczne przestrzenne uzwojenia klatkowego można - podobnie jak w przypadku uzwojenia stojana - podzielić na klasy harmonicznych, którym odpowiadają jednakowe wartości współczynników uzwojenia. Rzędy harmonicznych należących do poszczególnych klas są wyznaczone przez następujące relacje:

$$v = cQ_r \pm 1$$

$$v = cQ_r \pm 2$$

$$v = cQ_r \pm 3$$

$$v = cQ_r \pm 4$$

.....

.....

gdzie:

$$c = 1, 2, 3, \dots, (Q_r + 1) / 2, \text{ gdy } Q_r - \text{liczba nieparzysta}$$

oraz

$$c = 1, 2, 3, \dots, Q_r / 2 + 1, \text{ gdy } Q_r - \text{liczba parzysta.}$$

Łatwo zauważyć, że relacje te określają równocześnie położenie elementarnych uzwojeń wirnika w kolejnych wierszach schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne. Faktycznie, w pierwszym wierszu schematu wirnika, uzwojenia elementarne są zawarte w kolumnach o numerach  $Q_r \pm 1$ , w drugim wierszu w kolumnach o numerach  $Q_r \pm 2$  itd. Z powyższego wynika, że - ze względu na równość liczby faz wirnika i liczby żłobków wirnika - *wszystkie wirniki elementarne, znajdujące się w tym samym wierszu schematu rozkładu, mają te same współczynniki uzwojeń*, a odpowiadające im numery kolumn są równe rzędowi harmonicznych przestrzennych o jednakowych współczynnikach uzwojeń. Największa wartość współczynnika uzwojenia klatkowego odpowiada uzwojeniom elementarnym zawartym w pierwszym wierszu schematu rozkładu wirnika. To jednak, czy dana harmoniczna przestrzenna przepływu wirnika będzie należała do znaczących harmonicznych, zależy nie tylko od jej rzędu i wartości związanego z nią współczynnika uzwojenia, ale przede wszystkim od tego, za pośrednictwem jakiej harmonicznej przestrzennej przepływu stojana powstaje. Najsilniejsze harmoniczne przestrzenne przepływu wirnika - to harmoniczne indukowane przez

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

---

harmoniczną przestrzenną stojana o największej amplitudzie, czyli przez harmoniczną  $p$ -tą (główną). Są to więc *harmoniczne o rządach*  $Q_r \pm p$ , którym odpowiadają uzwojenia elementarne zawarte w  $p$ -tym wierszu schematu rozkładu wirnika. Harmoniczne te *noszą nazwę harmonicznych żłbkowych wirnika*. Inne znaczące grupy harmonicznych przestrzennych wirnika, to harmoniczne generowane przez:

- harmoniczną strefową stojana  $5p$  - są to harmoniczne wirnika o rządach  $c Q_r \pm 5p$ ,
- harmoniczną strefową stojana  $7p$  - są to harmoniczne wirnika o rządach  $c Q_r \pm 7p$ ,
- harmoniczną żłbkową stojana  $Q_s - p$  i  $Q_s + p$  - są to harmoniczne wirnika o rządach  $c Q_r \pm Q_s \pm p$ ,
- harmoniczną żłbkową stojana  $2Q_s - p$  i  $2Q_s + p$  - są to harmoniczne wirnika o rządach  $c Q_r \pm Q_s \pm 2p$ , itd.

Rozważmy jako przykład klatkowe uzwojenie wirnika o liczbie żłbków  $Q_r = 16$ , którego schemat rozkładu na uzwojenia elementarne przedstawiono na rys. 1.15. Harmoniczne przestrzenne związane z:

pierwszym wierszem  $v=1,15,17,31,33,47, \dots$ ,

drugim wierszem  $v=2,14,18,30,34,46, \dots$ ,

trzecim wierszem  $v=3,13,19,29,35,45, \dots$ ,

czwartym wierszem  $v=4,12,20,28,36,44, \dots$ ,

piątym wierszem  $v=5,11,21,27,37,43, \dots$ ,

szóstym wierszem  $v=6,10,22,26,38,42, \dots$ ,

siódmym wierszem  $v=7,9,24,26,39,41, \dots$ ,

ósmym wierszem  $v=8,24,40, \dots$ ,

posiadają odpowiednio współczynniki uzwojenia równe:

$$k_{wr1} = k_{wr15} = k_{wr17} = k_{wr31} = k_{wr33} = k_{wr47} = \dots = 0.1951$$

$$k_{wr2} = k_{wr14} = k_{wr18} = k_{wr30} = k_{wr34} = k_{wr46} = \dots = 0.3827$$

$$k_{wr3} = k_{wr13} = k_{wr19} = k_{wr29} = k_{wr35} = k_{wr45} = \dots = 0.5555$$

$$k_{wr4} = k_{wr12} = k_{wr20} = k_{wr28} = k_{wr36} = k_{wr44} = \dots = 0.7071$$

$$k_{wr5} = k_{wr11} = k_{wr21} = k_{wr27} = k_{wr37} = k_{wr43} = \dots = 0.8315$$

$$k_{wr6} = k_{wr10} = k_{wr22} = k_{wr26} = k_{wr38} = k_{wr42} = \dots = 0.9239$$

$$k_{wr7} = k_{wr9} = k_{wr24} = k_{wr26} = k_{wr39} = k_{wr41} = \dots = 0.9808$$

$$k_{wr8} = k_{wr24} = k_{wr40} = \dots = 1.0$$

To, które z harmonicznych przestrzennych przepływu wirnika przyjmują znaczące wartości zależy od uzwojenia stojana. Przy uzwojeniu stojana o danych:  $p=2$ ,  $Q_s=24$  harmonicznymi żłobkowymi wirnika są harmoniczne z 2 wiersza schematu rozkładu wirnika o rzędach  $v=2,14,18,30,34,46,\dots$ . W ich generowaniu - oprócz harmonicznej 2 - ma również udział 14 harmoniczna stojana (harmoniczna strefowa  $7p$ ) oraz 46 harmoniczna stojana (harmoniczna żłobkowa  $2Q_s - p$ ). Znaczące wartości przyjmują również harmoniczne wirnika z 6 wiersza o rzędach  $v=6,10,22,26,38,42,\dots$ , indukowane przez 10 (harmoniczna strefowa  $5p$ ), 22 (harmoniczna żłobkowa  $Q_s - p$ ) i 26 (harmoniczna żłobkowa  $Q_s + p$ ) harmoniczną przestrzenną stojana.

Wzajemne oddziaływanie harmonicznych przestrzennych stojana i wirnika w maszynie z prostymi żłobkami wirnika jest proporcjonalne do iloczynu współczynnika uzwojenia stojana i współczynnika uzwojenia wirnika  $k_{ws} \cdot k_{wr v}$ . W maszynie ze skośnymi żłobkami wirnika sprzężenie elektromagnetyczne pomiędzy stojanem i wirnikiem, realizujące się za pośrednictwem  $v$ -tej harmonicznej, ulega osłabieniu, a miarą tego zjawiska jest współczynnik skosu:

$$k_{sq v} = \frac{\sin v \frac{\pi}{Q_r} \frac{b_{sq}}{t_s}}{v \frac{\pi}{Q_r} \frac{b_{sq}}{t_s}} \quad (1.65)$$

gdzie:

$t_s$  - podziałka żłobkowa stojana,

$b_{sq}$  - skos żłobków wirnika.

W maszynie ze skośnymi żłobkami wirnika miejsce iloczynu  $k_{ws} \cdot k_{wr} \cdot v$  we wzorach na indukcyjności wirnik-stojan i stojan-wirnik (wzory (1.6) i (1.7)) zajmuje iloczyn  $k_{ws} \cdot k_{wr} \cdot k_{sq} \cdot v$ .

## 1.7. ZASADY REDUKCJI SCHEMATU ROZKŁADU MASZyny

Schemat rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne można uprościć usuwając z niego uzwojenia elementarne odpowiadające tym harmonicznym przestrzennym, które nie są wytwarzane przez uzwojenia stojana i wirnika. Taki schemat rozkładu nazywa się *schematem zredukowanym*. Redukowanie schematu rozkładu prowadzi z reguły do zwiększenia liczby elementów zerowych w macierzy indukcyjności stojan-wirnik. Uwidacznia się to w jej wypełnieniu i częstokroć prowadzi do zredukowania liczby współrzędnych.

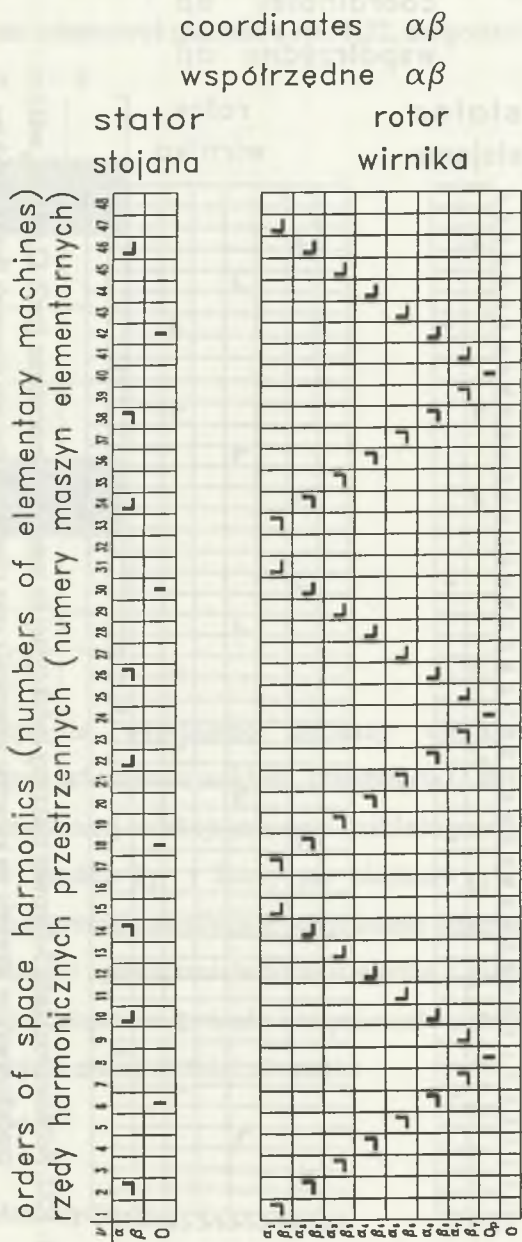
Przyczyny, dla których uzwojenia stojana i wirnika nie wytwarzają wszystkich kolejnych harmonicznych przestrzennych, to:

- 1) symetria uzwojenia stojana,
- 2) zerowanie się współczynnika skrótu wirnika klatkowego dla harmonicznych przestrzennych  $v = cQ_r$ ,
- 3) charakterystyczne relacje liczby par biegunów  $p$  i liczby żłobków wirnika  $Q_r$ ,
- 4) skojarzenie uzwojeń fazowych stojana w gwiazdę bez przewodu zerowego,
- 5) zerowanie się współczynników uzwojenia stojana dla określonych wyższych harmonicznych przestrzennych,
- 6) zerowanie się współczynnika skosu dla określonych harmonicznych przestrzennych wirnika.



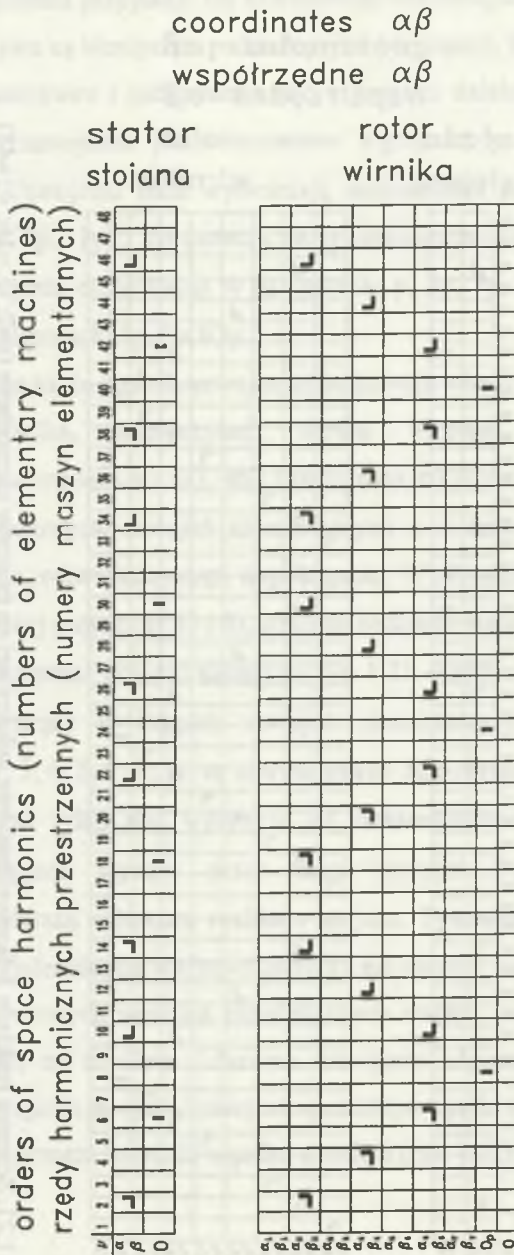
Własność symetrii przypisuje się uzwojeniom wielobiegunowym ( $p > 1$ ), których krzywe przepływu są identyczne pod kolejnymi biegunami. Posiadają ją uzwojenia stojana dwuwarstwowe i jednowarstwowe z grupami dzielonymi przy dowolnym poskoku oraz uzwojenia jednowarstwowe z grupami pełnymi przy poskoku średnicowym. Uzwojenia takie wytwarzają harmoniczne przestrzenne o rzędach  $v = p, 3p, 5p, 7p, 9p, 11p, \dots$ , co oznacza, że w schematach rozkładu występują tylko 2-fazowe uzwojenia elementarne w kolumnach:  $p, 5p, 7p, 11p, \dots$  oraz 1-fazowe uzwojenia w kolumnach:  $3p, 9p, 15p, \dots$

Ze względu na to, że poskok uzwojenia klatkowego wirnika jest równy podziałce żłobkowej wirnika, współczynnik skrótu wirnika dla harmonicznych przestrzennych o rzędach  $v = cQ_r$  jest równy zero, co pozwala znów na usunięcie wszystkich 1-fazowych uzwojeń elementarnych z ostatniego wiersza schematu rozkładu wirnika, odpowiadającego współrzędnej "0". Przykładowo, uwzględniając wymienione wyżej przyczyny 1) i 2), schemat rozkładu maszyny z rys. 1.15 można zredukować do postaci przedstawionej na rys. 1.21. Analizując ten schemat łatwo zauważyć, że prądy w ciągach uzwojeń elementarnych wirnika, zawartych w wierszach: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, są zawsze równe zero. Prądy w tych uzwojeniach mogłyby powstać tylko pod wpływem sił elektromotorycznych indukowanych przez prąd stojana płynący przez ciągi uzwojeń 2-fazowych zawartych w pierwszym wierszu schematu rozkładu stojana. Tymczasem żadne z uzwojeń zawartych w wymienionych wierszach wirnika nie sprzęga się elektromagnetycznie z żadnym z 2-fazowych uzwojeń elementarnych stojana (nie znajduje się w tej samej kolumnie, co zasilane 2-fazowe uzwojenia elementarne stojana), a to oznacza, że uzwojenia te - jako uzwojenia pozostające stale w stanie bezprądowym - mogą być ze schematu rozkładu wirnika usunięte (rys. 1.22).



Rys. 1.21. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne ( $p=2$ ;  $Q_r=16$ ;  $v_m=48$ )  
 zredukowany ze względu na symetrię uzwojenia i zerowanie się współczynnika skrótu uzwojenia  
 klatkowego wirnika dla harmonicznych przestrzennych  $v = cQ_r$

Fig. 1.21. Reduced diagram of decomposition of 3-phase squirrel-cage machine into elementary machines



Rys. 1.22. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne ( $p=2$ ;  $Q_r=16$ ;  $v_m=48$ ) zredukowany ze względu na symetrię uzwojenia oraz charakterystyczny stosunek liczby złołbków wirnika  $Q_r$  i liczby par biegunów  $p$

Fig. 1.22. Reduced diagram of decomposition of 3-phase squirrel-cage machine ( $p=2$ ;  $Q_r=16$ ;  $v_m=48$ ) into elementary machines

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

Wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan, odpowiadające zredukowanemu schematowi rozkładu z rys. 1.22, ma postać:

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$	2,18,34		18,
$\beta_2$	46,...		30,...
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$			
$\beta_4$			
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$	10,22,26,		6,
$\beta_6$	38,...		42,...
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
0p			
0			

(1.66)

Przypomnijmy, że wypełnienie macierzy wirnik-stojan, odpowiadające niezredukowanemu schematowi rozkładu, przedstawia (1.40).

Możliwość omówionej redukcji schematu rozkładu zależy od wzajemnej relacji liczby żłobków wirnika  $Q_r$  i liczby par biegunów  $p$ , a więc jest to trzecia z wymienionych przyczyn umożliwiających redukcję schematu.

Kolejna możliwość uproszczenia schematu wynika z galwanicznego skojarzenia uzwojeń fazowych stojana w gwiazdę bez przewodu zerowego, co powoduje, że prądy fazowe stojana muszą spełniać równanie:

$$i_{s1} + i_{s2} + i_{s3} = 0 \quad (1.67)$$

Stąd - we współrzędnych  $\alpha\beta$ :

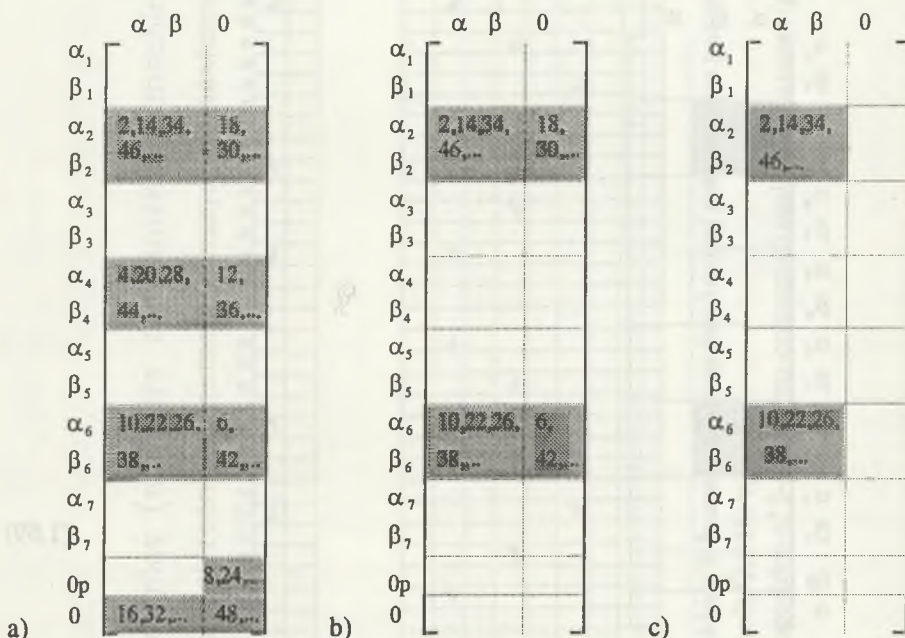
$$i_{s0} = 0 \quad (1.68)$$





zaś współczynnik grupy (1.56) przyjmuje wartość zero (o ile  $q > 1$ ) dla harmoniczných przestrzenných o rzędach wynikających ze wzoru (1.61).

W przypadku wirnika klatkowego ze żłobkami ukosowanymi, ze schematu rozkładu wirnika można usunąć uzwojenia elementarne odpowiadające harmoniczným przestrzenným, dla których zeruje się współczynnik skosu (wzór (1.65)).



Rys. 1.24. Wypełnienie macierzy wirnik-stojan dla maszyny o  $p = 2$ ,

$$Q_r = 16 (v_m = 48):$$

- a) odpowiadające nie zredukowanemu schematowi z rys. 1.15,
- b) odpowiadające zredukowanemu schematowi z rys. 1.22,
- c) odpowiadające zredukowanemu schematowi z rys. 1.23 (uzwojenie stojana skojarzone w gwiazdę bez przewodu zerowego)

Fig. 1.24. Filling of stator-rotor inductances for machine  $p = 2$ ,

$$Q_r = 16 (v_m = 48):$$

- a) corresponding to non-reduced diagram presented in Fig. 1.15,
- b) corresponding to reduced diagram presented in Fig. 1.22,
- c) corresponding to reduced diagram presented in Fig. 1.23

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

---

Po uwzględnieniu wymienionych na początku podrozdziału przyczyn, dla których uzwojenia stojana i wirnika nie generują wszystkich kolejnych harmonicznych przestrzennych przepływu, następuje z reguły znaczne zmniejszenie się liczby uzwojeń elementarnych w schemacie rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne. To prowadzi zaś do powiększenia liczby elementów zerowych w macierzy indukcyjności wirnik-stojan i pustych podmacierzy w jej wypełnieniu. Jest to wyraźnie widoczne w przytoczonym przykładzie maszyny o  $p=2$  i  $Q_r=16$ , gdzie kolejnym etapom redukcji schematu rozkładu, przedstawionym na rys. 1.15, 1.22 i 1.23, odpowiadają wypełnienia macierzy wirnik-stojan (1.40), (1.66), (1.69), zestawione razem obok siebie na rys. 1.24. W miarę rozrzedzania się wypełnień zmniejsza się liczba współrzędnych występujących w modelu matematycznym silnika. W najprostszym przypadku - przy wypełnieniu macierzy wirnik-stojan o postaci (1.69) - w modelu wystąpią tylko 2 współrzędne stojana  $\alpha\beta$  oraz 4 współrzędne wirnika:  $\alpha_2\beta_2, \alpha_6\beta_6$  ( $LWS=2, LWR=4$ ).



## 1.8. PROCEDURA FORMUŁOWANIA UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH MASZYNY PRZY UWZGLĘDNIENIU WYŻSZYCH HARMONICZNYCH PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU

Stan dynamiczny indukcyjnej maszyny klatkowej we współrzędnych  $\alpha\beta$  jest opisany układem równań napięciowo-prądowych stojana i wirnika (1.17), w których  $[u_r^{\alpha\beta}] = 0$  (wzór (1.31)) oraz równaniem mechanicznym (1.3), w którym moment elektromagnetyczny określa wzór (1.29). Występujące w równaniach macierze: rezystancji stojana, indukcyjności rozproszenia stojana, rezystancji wirnika, indukcyjności rozproszenia wirnika, indukcyjności stojan-stojan oraz indukcyjności wirnik-wirnik dane są odpowiednio wzorami (1.18)+(1.23). Ze względu na przyczyny rozważone szczegółowo w rozdz. 1.5 uzwojenie stojana i uzwojenie klatkowe wirnika nie generują wszystkich kolejnych harmonicznych przestrzennych przepływu. Po określeniu więc rzędów harmonicznych przestrzennych wytwarzanych przez uzwojenie stojana i wirnika, można usunąć niepotrzebne wyrazy z macierzy (1.22) i (1.23).

Aby określić postać macierzy indukcyjności wirnik-stojan we współrzędnych  $\alpha\beta$ , należy sporządzić schemat rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne, a następnie zredukować go wg zasad przedstawionych w rozdz. 1.6. Zredukowany schemat rozkładu oraz tabl. 1.2 pozwalają na szybkie i łatwe określenie postaci macierzy indukcyjności wirnik-stojan.

Z otrzymanego w ten sposób układu równań napięciowo-prądowych wirnika można usunąć równania o rozwiązaniach zerowych. Są to równania dla współrzędnych wskazywanych przez puste podmacierze w wypełnieniu macierzy indukcyjności wirnik-stojan.



Dla przykładu sformułujemy model matematyczny 3-fazowego silnika indukcyjnego o  $p=4$  i  $Q_r=24$  ( $v_m=48$ ) o uzwojeniach stojana połączonych w gwiazdę bez przewodu zerowego. Schemat rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne przedstawia rys. 1.16, zaś wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan ma postać (1.41). Schemat rozkładu maszyny z rys. 1.16 można zredukować usuwając uzwojenia elementarne stojana odpowiadające harmonicznymi przestrzennym o rzędach:  $v=4,8,12,16,\dots$  (ze względu na symetrię uzwojenia), uzwojenia elementarne wirnika o numerach:  $v=24,48,\dots$  (ze względu na zerowanie się współczynnika skrótu wirnika klatkowego), uzwojenia elementarne stojana  $v=12,36,\dots$  (ze względu na połączenie uzwojeń stojana w gwiazdę bez przewodu zerowego, na skutek czego  $i_{s0} = 0$ ) oraz uzwojenia elementarne wirnika o numerach:

$$\begin{aligned} v=1,23,25,47,\dots, & \quad v=2,22,26,47,\dots, \\ v=3,21,27,45,\dots, & \quad v=5,19,29,43,\dots, \\ v=6,18,30,42,\dots, & \quad v=7,17,31,41,\dots, \\ v=8,16,32,40,\dots, & \\ v=9,15,33,39,\dots, & \quad v=10,14,34,38,\dots, \\ v=11,13,35,37,\dots, & \end{aligned}$$

(ze względu na charakterystyczną relację pomiędzy liczbą par biegunów  $p$  i liczbą żłobków wirnika  $Q_r$  powodującą, że w tych elementarnych uzwojeniach wirnika nie indukują się siły elektromotoryczne i nie płyną prądy). Zredukowany schemat rozkładu przedstawia rys. 1.25 (ponadto, jeżeli znane są dane nawojowe uzwojenia stojana i skos klatki wirnika, można usunąć dodatkowo uzwojenia elementarne wirnika, odpowiadające harmonicznymi przestrzennym o zerowej wartości współczynnika uzwojenia stojana i zerowej wartości współczynnika skosu wirnika). Usuwając wskazane wyżej ciągi harmonicznych przestrzennych

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

z wypełnienia macierzy (1.41) otrzymuje się następującą zredukowaną postać wypełnienia:

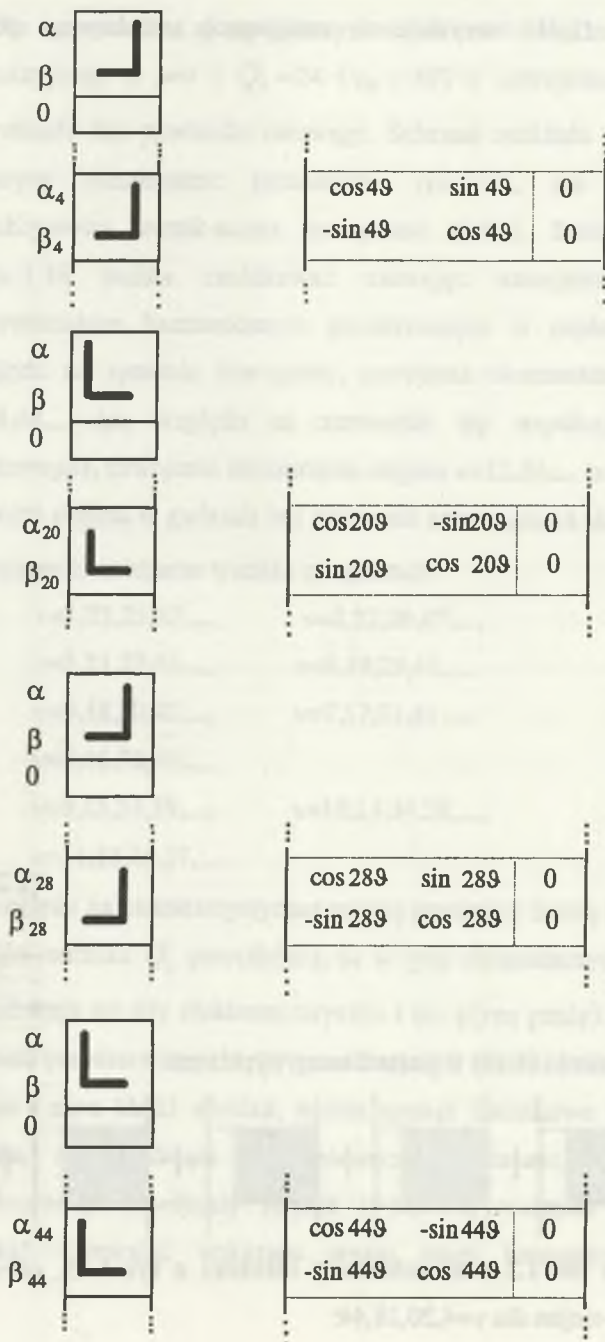
	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$			
$\beta_2$			
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$	4,20,		
$\beta_4$	28,44,		
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$			
$\beta_6$			
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
$\alpha_8$			
$\beta_8$			
$\alpha_9$			
$\beta_9$			
$\alpha_{10}$			
$\beta_{10}$			
$\alpha_{11}$			
$\beta_{11}$			
0p			
0			

(1.70)

Przedstawiając wypełnienie (1.70) w postaci sumy wypełnień:

$$\begin{array}{c} \alpha_4 \\ \beta_4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4,20, \\ 28,44, \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 28 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 44 \\ \hline \end{array} + \dots$$

można, opierając się na tab.1.2 oraz schemacie rozkładu z rys.1.25, określić budowę macierzy wirnik-stojan dla  $v=4,20,28,44$ :



1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

a następnie - przez ich zsumowanie - wypadkową postać macierzy wirnik-stojan:

$$\begin{aligned}
 [M_{sr4}(\vartheta)] = & L_{sr4} \begin{bmatrix} \cos 4\vartheta & \sin 4\vartheta & 0 \\ -\sin 4\vartheta & \cos 4\vartheta & 0 \end{bmatrix} + L_{sr20} \begin{bmatrix} \cos 20\vartheta & -\sin 20\vartheta & 0 \\ \sin 20\vartheta & \cos 20\vartheta & 0 \end{bmatrix} + \\
 & + L_{sr28} \begin{bmatrix} \cos 28\vartheta & \sin 28\vartheta & 0 \\ -\sin 28\vartheta & \cos 28\vartheta & 0 \end{bmatrix} + L_{sr44} \begin{bmatrix} \cos 44\vartheta & -\sin 44\vartheta & 0 \\ \sin 44\vartheta & \cos 44\vartheta & 0 \end{bmatrix} + \dots
 \end{aligned}$$

Wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan o postaci (1.70) oznacza, że model matematyczny maszyny będzie zawierał tylko 2 równania napięciowo-prądowe wirnika, odpowiadające współrzędnym  $\alpha_4, \beta_4$  ( $LWR=2$ ), bowiem prądy związane z pozostałymi współrzędnymi wirnika przyjmą wartości równe 0.

Ostatecznie więc model matematyczny silnika składa się z 2 równań napięciowo-prądowych dla stojana (współrzędne  $\alpha\beta$ ,  $LWS=2$ ), 2 równań napięciowo-prądowych dla wirnika (współrzędne  $\alpha_4, \beta_4$ ,  $LWR=2$ ) oraz równania mechanicznego o następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} R_s \\ R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\sigma s} \\ L_{\sigma s} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{v=4,20,28,44,\dots} L_{sv} \\ \sum_{v=4,20,28,44,\dots} L_{sv} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{d}{dt} \left( L_{sr4} \begin{bmatrix} \cos 4\vartheta & -\sin 4\vartheta \\ \sin 4\vartheta & \cos 4\vartheta \end{bmatrix} + L_{sr20} \begin{bmatrix} \cos 20\vartheta & \sin 20\vartheta \\ -\sin 20\vartheta & \cos 20\vartheta \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + L_{sr28} \begin{bmatrix} \cos 28\vartheta & -\sin 28\vartheta \\ \sin 28\vartheta & \cos 28\vartheta \end{bmatrix} + L_{sr44} \begin{bmatrix} \cos 44\vartheta & \sin 44\vartheta \\ -\sin 44\vartheta & \cos 44\vartheta \end{bmatrix} + \dots \right) \begin{bmatrix} i_{r\alpha 4} \\ i_{r\beta 4} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_0 - 2R_{pr} \cos 4\alpha & 0 \\ 0 & R_0 - 2R_{pr} \cos 4\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{r\alpha 4} \\ i_{r\beta 4} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 4\alpha & 0 \\ 0 & L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 4\alpha \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{r\alpha 4} \\ i_{r\beta 4} \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{d}{dt} \left( L_{sr4} \begin{bmatrix} \cos 4\vartheta & \sin 4\vartheta \\ -\sin 4\vartheta & \cos 4\vartheta \end{bmatrix} + L_{sr20} \begin{bmatrix} \cos 20\vartheta & -\sin 20\vartheta \\ \sin 20\vartheta & \cos 20\vartheta \end{bmatrix} + \right. \\
 &+ L_{sr28} \begin{bmatrix} \cos 28\vartheta & \sin 28\vartheta \\ -\sin 28\vartheta & \cos 28\vartheta \end{bmatrix} + L_{sr44} \begin{bmatrix} \cos 44\vartheta & -\sin 44\vartheta \\ \sin 44\vartheta & \cos 44\vartheta \end{bmatrix} + \dots \left. \right) \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \sum_{v=4,20,28,44,\dots} L_{rv} & 0 \\ 0 & \sum_{v=4,20,28,44,\dots} L_{rv} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{r\alpha 4} \\ i_{r\beta 4} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = T_e - T_m \tag{1.73}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 T_e &= \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( L_{sr4} \begin{bmatrix} \cos 4\vartheta & -\sin 4\vartheta \\ \sin 4\vartheta & \cos 4\vartheta \end{bmatrix} + L_{sr20} \begin{bmatrix} \cos 20\vartheta & \sin 20\vartheta \\ -\sin 20\vartheta & \cos 20\vartheta \end{bmatrix} + \right. \\
 &+ L_{sr28} \begin{bmatrix} \cos 28\vartheta & -\sin 28\vartheta \\ \sin 28\vartheta & \cos 28\vartheta \end{bmatrix} + L_{sr44} \begin{bmatrix} \cos 44\vartheta & \sin 44\vartheta \\ -\sin 44\vartheta & \cos 44\vartheta \end{bmatrix} + \dots \left. \right) \begin{bmatrix} i_{r\alpha 4} \\ i_{r\beta 4} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

1. Model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu

$$\begin{aligned} i_{ra1} = i_{r\beta1} = i_{ra2} = i_{r\beta2} = i_{ra3} = i_{r\beta3} = i_{ra5} = i_{r\beta5} = i_{ra6} = i_{r\beta6} = \\ = i_{ra7} = i_{r\beta7} = i_{ra8} = i_{r\beta8} = i_{ra9} = i_{r\beta9} = i_{ra10} = i_{r\beta10} = i_{ra11} = \\ = i_{r\beta11} = i_{r0p} = i_{r0} = 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$i_{s0} = 0 \quad (1.76)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{Q_r} = \frac{\pi}{12}$$



## 2. PASOŻYTNICZE MOMENTY PRZEMIENNE (SYNCHRONICZNE) I ASYNCHRONICZNE

### 2.1. TORY GENEROWANIA PASOŻYTNICZYCH MOMENTÓW PRZEMIENNYCH I ASYNCHRONICZNYCH

Schemat rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne (schemat rozkładu poliharmonicznego modelu 3-fazowej maszyny indukcyjnej na 2- i 1-fazowe monoharmoniczne maszyny elementarne) pozwala na graficzne przedstawienie mechanizmów generowania różnych składowych prądów stojana i wirnika oraz momentów pasożytniczych powstających w maszynie za pośrednictwem wyższych harmonicznnych przestrzennych przepływu.

Opierając się na stwierdzeniu z rozdz. 1.3, że uzwojenia elementarne stojana i wirnika, które sprzęgają się elektromagnetycznie, zajmują tę samą kolumnę schematu rozkładu, zaś uzwojenia, które są połączone ze sobą galwanicznie, przynależą do tych samych wierszy schematu, można sporządzić na podstawie schematu rozkładu sieć wszystkich możliwych oddziaływań wynikających z połączeń galwanicznych oraz sprzężeń indukcyjnych między uzwojeniami elementarnymi oraz scharakteryzować mechanizm rozchodzenia się pobudzenia, którym jest napięcie (lub prąd) przyłożone do uzwojenia stojana. W maszynach zasilanych symetrycznym 3-fazowym układem napięć, pobudzenie to jest związane ze współrzędnymi  $\alpha\beta$ , albowiem współrzędna 0 - przyjmuje wartość zerową (wzór 1.34).

Na rys. 2.1 przedstawiono sieć wzajemnych oddziaływań pomiędzy uzwojeniami elementarnymi dla 3-fazowego silnika o  $p = 2$  i  $Q_r = 16$ , zasilanego symetrycznie (zredukowany schemat rozkładu maszyny - rys. 1.21). W obrębie tak sporządzonej sieci wzajemnych oddziaływań uzwojeń elementarnych można wyróżnić nieskończenie wiele torów charakteryzujących powstawanie składowych prądów

związanych z różnymi harmonicznymi przestrzennymi oraz z różną liczbą (krotnością) odbić tzw. prądu pierwotnej reakcji stojana (w stanie ustalonym - prądu o częstotliwości  $\omega_0$ ) kolejno na przemian w uzwojeniu stojana oraz w uzwojeniu wirnika maszyny. Takie prądy związane z kolejnymi odbiciami noszą nazwę prądów  $k$ -krotnej reakcji uzwojeń (gdzie:  $k=1,2,3,\dots$ ). W szczególności, jeśli  $k=1$ , mówimy o prądach reakcji pierwotnej, jeśli  $k=2$  - prądach wtórnej reakcji, jeśli  $k=3$  - prądach trzeciej reakcji itd.

W stanie ustalonym składowe te są prądami o różnych pulsacjach. Prąd reakcji pierwotnej stojana jest prądem o pulsacji źródła zasilania  $\omega_0$ , prądy reakcji pierwotnej wirnika są prądami o tzw. pulsacjach poślizgu  $\omega_0 \pm v\Omega_m$ , zaś prądy reakcji wtórnej oraz wyższych reakcji stojana i wirnika - określane mianem prądów o pulsacjach obcych - posiadają pulsacje  $\omega_0 \pm (v \pm \rho \pm \lambda \pm \dots)\Omega_m$ , gdzie:  $v, \rho, \lambda, \dots$  - rzędy harmonicznym przestrzennym uczestniczących w powstawaniu poszczególnych składowych.

Prądy  $k$ -krotnych reakcji uzwojeń stojana i wirnika związane z różnymi harmonicznymi przestrzennymi (uzwojeniami elementarnymi), oddziałując wzajemnie między sobą prowadzą do powstawania w maszynie momentów pasożytniczych. Momentom tym - w zależności od krotności reakcji uzwojeń stojana i wirnika - przypisuje się różne rzędy.

Przeanalizujemy wybrane tory generowania momentów pasożytniczych na przykładzie 3-fazowego silnika o  $p = 2$  i  $Q_r = 16$  (zredukowany schemat rozkładu - rys. 1.21, sieć wzajemnych oddziaływań pomiędzy uzwojeniami elementarnymi - rys. 2.1). Momenty pasożytnicze I rzędu, które są wynikiem współdziałania prądu stojana o pulsacji  $\omega_0$  z prądami pierwotnej reakcji uzwojeń elementarnych wirnika, posiadają tory generowania o przebiegach, jak na rys.2.2, gdzie w powstawaniu poszczególnych składowych momentów uczestniczy jedna harmoniczna przestrzenna (pierwszy tor z lewej strony schematu dla  $v = p$

odpowiada momentowi głównemu) lub też tory o przebiegach, jak na rys. 2.3, gdzie w powstawaniu poszczególnych składowych momentów uczestniczą po dwie harmoniczne przestrzenne.

Na rys. 2.4 i 2.5 przedstawiono przykładowe tory generowania pasożytniczych momentów II rzędu. W analogiczny sposób można konstruować tory generowania pasożytniczych momentów III, IV i wyższych rzędów.

Moment elektromagnetyczny silnika jest nieskończoną sumą momentów składowych związanych ze wszystkimi możliwymi torami generowania, dającymi się skonstruować w obrębie sieci wzajemnych oddziaływań na schemacie rozkładu. Te poszczególne składowe, odpowiadające różnym torom generowania, charakteryzują się różnymi własnościami i w różny sposób oddziałują na zachowanie się maszyny. Szereg istotnych cech i własności tych momentów można określić na podstawie samej tylko znajomości torów ich generowania. Przede wszystkim - można z łatwością odróżnić składowe mające charakter momentów asynchronicznych, a więc składowe, które przy symetrycznym 3-fazowym zasilaniu sinusoidalnym przyjmują po dojściu do stanu ustalonego wartości stałe, od tych składowych, które w stanie ustalonym stają się przebiegami przemiennymi o pulsacji zależnej od prędkości obrotowej maszyny. Składowe te nazywamy krótko: pasożytniczymi momentami asynchronicznymi i pasożytniczymi momentami przemiennymi.

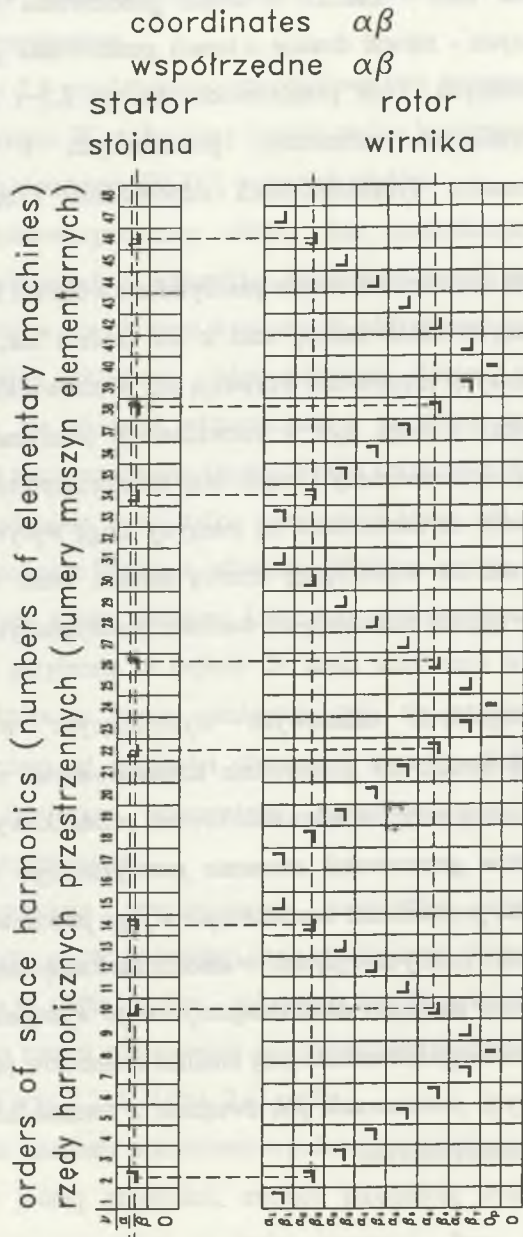
Tory generowania pasożytniczych momentów asynchronicznych mają charakterystyczną postać podwójnej linii, wynikającą z faktu, że tory generowania oddziałujących na siebie prądów - pokrywają się. Tak więc, tory przedstawione na rys. 2.2 i 2.4 są torami generowania pasożytniczych momentów asynchronicznych odpowiednio: I (rys. 2.2) i II (rys. 2.4) rzędu.

Pasożytnicze momenty przemiennie o pulsacjach zależnych od prędkości wirnika stają się dla jednej prędkości, zwanej prędkością synchroniczną momentu pasożytniczego, momentami o stałej wartości. Przy takich prędkościach

pasożytnicze momenty przemienne przekształcają się w pasożytnicze momenty synchroniczne. Można więc - zamiast o torach generowania pasożytniczych momentów przemiennech - mówić dualnie o torach generowania pasożytniczych momentów synchronicznych. Tory przedstawione na rys. 2.3 i 2.5 - to tory generowania pasożytniczych momentów przemiennech i równocześnie pasożytniczych momentów synchronicznych odpowiednio I rzędu (rys. 2.3) i II rzędu (rys. 2.5).

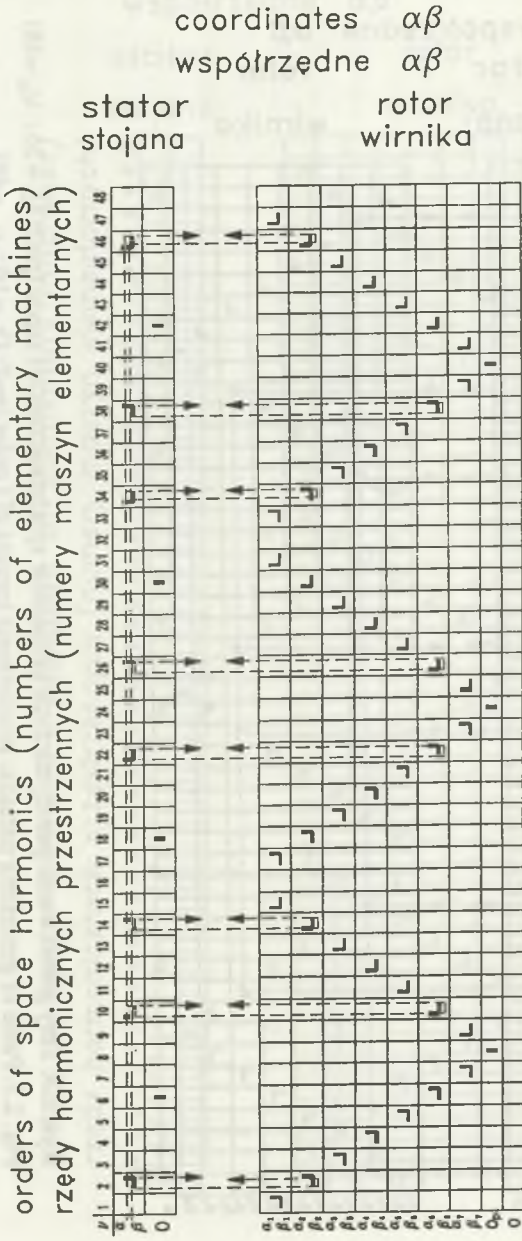
Istotne znaczenie dla wartości momentów pasożytniczych ma ich rząd. Wartości momentów pasożytniczych silnie maleją wraz z ich rzędem tak, że momenty pasożytnicze III i wyższych rzędów nie wpływają już w zauważalny sposób na zachowanie się maszyny i mogą być w rozważaniach pomijane. Zasadnicze znaczenie mają pasożytnicze momenty I rzędu oraz niektóre spośród momentów II rzędu. W istotny sposób na zachowanie się maszyny mogą wpływać też prądy reakcji wtórnej związane ze współrzędną zerową stojana, które w niektórych maszynach w znaczący sposób oddziałują na wartości pasożytniczych momentów I rzędu.

Powiązanie poszczególnych składowych występujących w momencie elektromagnetycznym z torami ich generowania konstruowanymi na schemacie rozkładu jest istotną pomocą przy formułowaniu równań różniczkowych maszyny, albowiem *każdy z torów generowania momentu pasożytniczego bezpośrednio wskazuje na harmoniczne przestrzenne uczestniczące w jego powstawaniu oraz na współrzędne wirnika, które należy uwzględnić w modelu matematycznym, aby - po rozwiązaniu - w przebiegu momentu elektromagnetycznego wystąpiła rozważana składowa*. Jest to zaleta szczególnie istotna przy analizie momentów przemiennech (synchronicznych), których powstawanie jest związane z dwoma lub z większą liczbą harmonicznych przestrzennych.

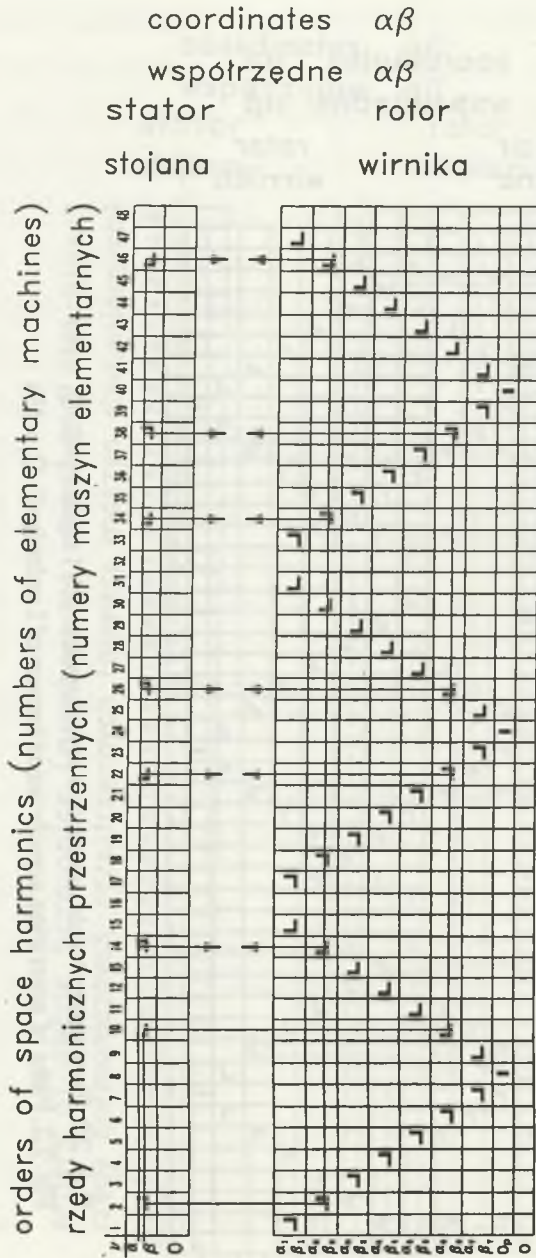


Rys. 2.1. Sieć wzajemnych oddziaływań pomiędzy uzwojeniami elementarnymi ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )

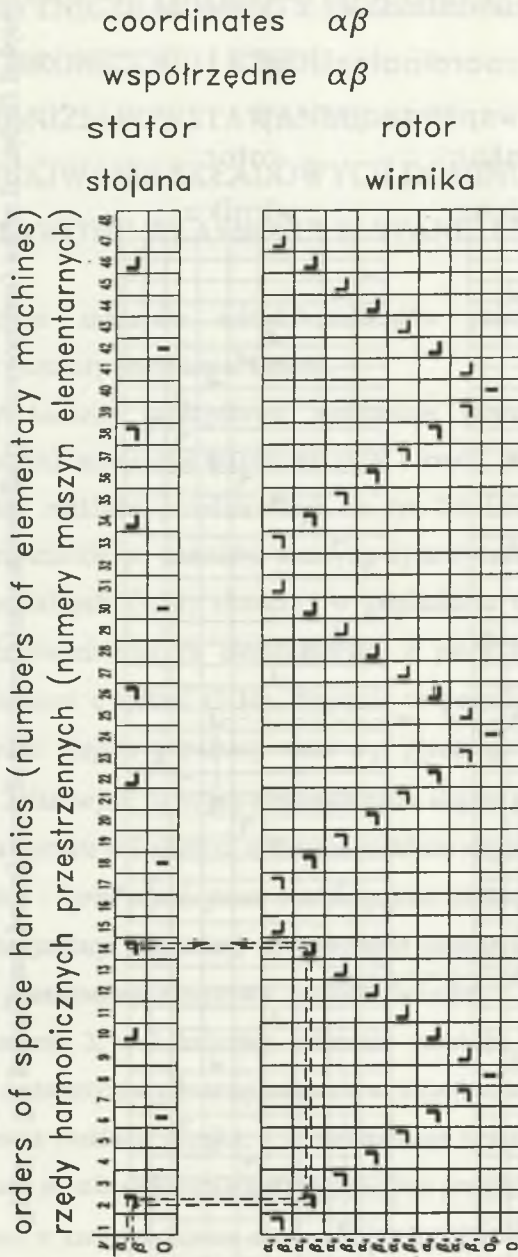
Fig. 2.1. Network of mutual interactions among elementary windings ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )



Rys. 2.2. Tory generowania momentów asynchronicznych I rzędu ( $p=2; Q_r = 16$ )  
 Fig. 2.2. Paths of generating asynchronous torques of I order ( $p=2; Q_r = 16$ )



Rys. 2.3. Tory generowania pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ ;  $v_m = 48$ )  
 Fig. 2.3. Paths of generating parasitic synchronous torques of I order ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ ;  $v_m = 48$ )



Rys. 2.4. Tor generowania pasożytniczego momentu asynchronicznego II rzędu ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )  
 Fig. 2.4. Path of generating parasitic asynchronous torque of II order ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )





## 2.2. PASOŻYTNICZE MOMENTY PRZEMIENNE (SYNCHRONICZNE) I RZĘDU - MECHANIZM POWSTAWANIA, WYSZUKIWANIE SKŁADOWYCH DOMINUJĄCYCH, PODSTAWOWE WŁASNOŚCI W STANIE USTALONYM

Najistotniejsze znaczenie wśród momentów pasożytniczych odgrywają pasożytnicze momenty przemienne I rzędu.

Rozważmy bardziej szczegółowo mechanizm powstawania przemiennej (synchronicznej) momentów pasożytniczych I rzędu na przykładzie maszyny, której schemat rozkładu przedstawiono na rys. 2.6 (niezredukowany schemat rys. 1.21). Przyłożenie do zacisków maszyny symetrycznego 3-fazowego układu napięć sinusoidalnych (1.33) oznacza, w odniesieniu do schematu rozkładu, zasilenie 2-fazowych maszyn elementarnych z pierwszego wiersza schematu stojana napięciami o postaci (1.34). Napięcie to powoduje powstanie w stanie ustalonym prądu stojana o pulsacji sieci  $\omega_0$ , płynącego przez ciąg szeregowo połączonych 2-fazowych uzwojeń elementarnych stojana o numerach: p, 5p, 7p, 11p, 13p,... zawartych w 1 wierszu schematu rozkładu stojana.

Stwierdzenie : "*prąd płynie przez v-te uzwojenie elementarne stojana (wirnika)*" oznacza w interpretacji fizycznej, że uzwojenie stojana (wirnika) wytwarza v-tą harmoniczną przestrzenną przepływu stojana (wirnika). Elementarne uzwojenie stojana o numerze 2, z 2 kolumny schematu rozkładu (rys. 1.21), sprzęga się magnetycznie z zawartym w tej samej kolumnie uzwojeniem elementarnym wirnika z 2 wiersza schematu rozkładu wirnika, a wyindukowana w tym uzwojeniu przez prąd stojana o pulsacji  $\omega_0$  siła elektromotoryczna powoduje przepływ prądu przez wszystkie połączone z nim w szereg 2-fazowe elementarne wirniki zawarte w 2 wierszu, a więc przez wirniki: 14, 18, 30, 34, 46-ty itd. Uzwojenie elementarne stojana o numerze 5p sprzęga się z kolei magnetycznie z zawartym w tej samej kolumnie uzwojeniem

elementarnym wirnika z 6 wiersza schematu rozkładu wirnika, a wyindukowana w tym uzwojeniu przez prąd stojana o pulsacji  $\omega_o$  siła elektromotoryczna powoduje przepływ prądu przez wszystkie połączone z nim w szereg 2-fazowe elementarne wirniki leżące w 6 wierszu, a więc przez wirniki: 6, 22, 26, 38, 42 itd. Tak więc uogólniając, *każde uzwojenie elementarne stojana (pomimo że sprzęga się elektromagnetycznie tylko z jednym, znajdującym się w tej samej kolumnie uzwojeniem elementarnym) powoduje powstanie (na skutek galwanicznych połączeń pomiędzy uzwojeniami elementarnymi wirnika) nieskończonego ciągu harmonicznych przestrzennych wirnika.*

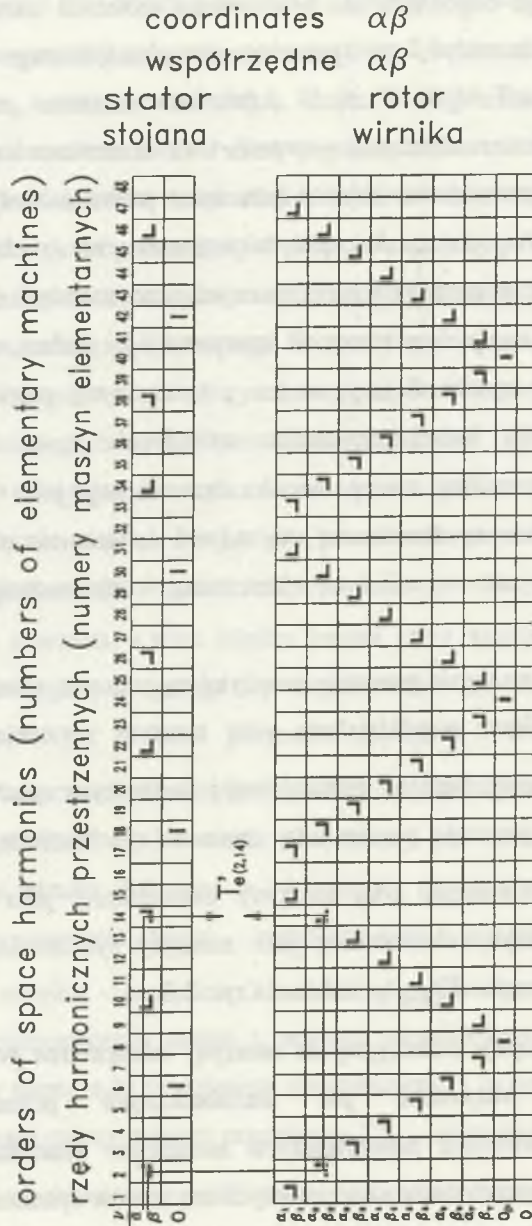
Do wytworzenia pasożytniczego momentu przemiennego, który przy pewnej prędkości staje się momentem synchronicznym, dochodzi wówczas, gdy powstające w taki właśnie sposób wyższe harmoniczne przestrzenne pola magnetyczne wirnika "natrafiają" na wyższe harmoniczne przestrzenne pola magnetyczne wytwarzane przez uzwojenie stojana. Mechanizm ten zilustrowano na rys.2.6. Prąd stojana o pulsacji sieci  $\omega_o$  płynie przez wszystkie 2-fazowe uzwojenia elementarne stojana z 1 wiersza schematu, a więc między innymi przez uzwojenie 2 i 14. Uzwojenie elementarne stojana 2 sprzęga się magnetycznie z 2 uzwojeniem elementarnym wirnika, które jest z kolei połączone szeregowo z wszystkimi uzwojeniami z 2 wiersza schematu rozkładu wirnika, a więc między innymi również z 14 wirnikiem. Można powiedzieć, że 14 wirnik elementarny jest zasilany przez 2 uzwojenie elementarne wirnika. Tak więc w 14 maszynie elementarnej zasilane jest zarówno elementarne uzwojenie stojana - napięciem sieci o pulsacji  $\omega_o$ , jak i elementarne uzwojenie wirnika - napięciem 2 wirnika elementarnego (uzwojenia pozostałych wirników elementarnych można z pewnym przybliżeniem traktować jako dławiki włączone w szereg z 14 uzwojeniem elementarnym), a to oznacza, że w 14 maszynie powstaje pasożytniczy moment przemienny  $T'_{\alpha(v,\rho)}$ , który przy prędkości  $\Omega_{ms}$  (zwanej prędkością synchroniczną) przekształca się w pasożytniczy moment synchroniczny  $T'_{\alpha(v,\rho)s}$  o stałej wartości.

## 2. Pasożytnicze momenty przemienne (synchroniczne) i asynchroniczne

Opisanemu mechanizmowi generowania przemiennego (synchronicznego) momentu pasożytniczego odpowiada tor generowania momentu zaznaczony na rys. 2.6. Jak łatwo zauważyć, *tor generowania pasożytniczego momentu przemiennego (synchronicznego) I rzędu odpowiada każdemu prostokątowi utworzonemu na schemacie rozkładu maszyny przez dwa elementarne stojany i dwa elementarne wirniki leżące w dwóch różnych kolumnach schematu rozkładu:  $v$ -tej i  $\rho$ -tej, przy czym  $v \neq \rho$* . W powstawaniu pasożytniczego momentu synchronicznego I rzędu uczestniczy więc zawsze para harmoniczných przestrzenných ( $v, \rho$ ) lub - innymi słowy - dwie maszyny elementarne. W interpretacji fizycznej, w nawiązaniu do teorii maszyny synchronicznej, można  $\rho$ -tą maszynę przyrównać do maszyny synchronicznej, której uzwojenie wzbudzenia ( $\rho$ -te uzwojenie elementarne wirnika) jest zasilane z  $v$ -tego wirnika elementarnego jako wzbudnicy, zaś twornik - z sieci. Maszynę elementarną  $\rho$ -tą nazywa się umownie *elementarną maszyną synchroniczną*, zaś  $v$ -tą maszynę elementarną - *elementarną maszyną wzbudzającą* (rys. 2.7).

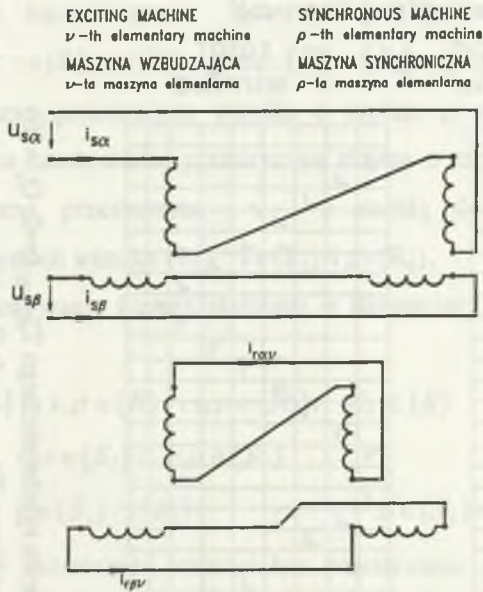
Oczywiście, jeżeli w maszynie powstaje pasożytniczy moment synchroniczny  $T_{e(v,\rho)s}^*$ , który jest wynikiem współdziałania  $v$ -tej maszyny elementarnej jako maszyny wzbudzającej i  $\rho$ -tej maszyny elementarnej jako maszyny synchronicznej - to równocześnie też powstaje pasożytniczy moment synchroniczny  $T_{e(\rho,v)s}''$ , będący wynikiem współdziałania  $\rho$ -tej maszyny elementarnej jako maszyny wzbudzającej i  $v$ -tej maszyny elementarnej jako maszyny synchronicznej. Tor generowania takiego momentu  $T_{e(\rho,v)s}''$  przedstawia rys. 2.8.

*Schemat rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne pozwala na szybkie wyszukanie wszystkich par harmoniczných przestrzenných uczestniczących w generowaniu pasożytniczych momentów synchronicznych.* Wszystkie możliwe tory generowania pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu w maszynie o schemacie rozkładu z rys. 2.6 przedstawiono na rys. 2.3.



Rys. 2.6. Tor generowania pasożytniczego momentu synchronicznego  $T_e'(2,14)_s$  ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )  
 Fig. 2.6. Path of generating parasitic synchronous torque  $T_e'(2,14)_s$  ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )

## 2. Pasożytnicze momenty przemienne (synchroniczne) i asynchroniczne

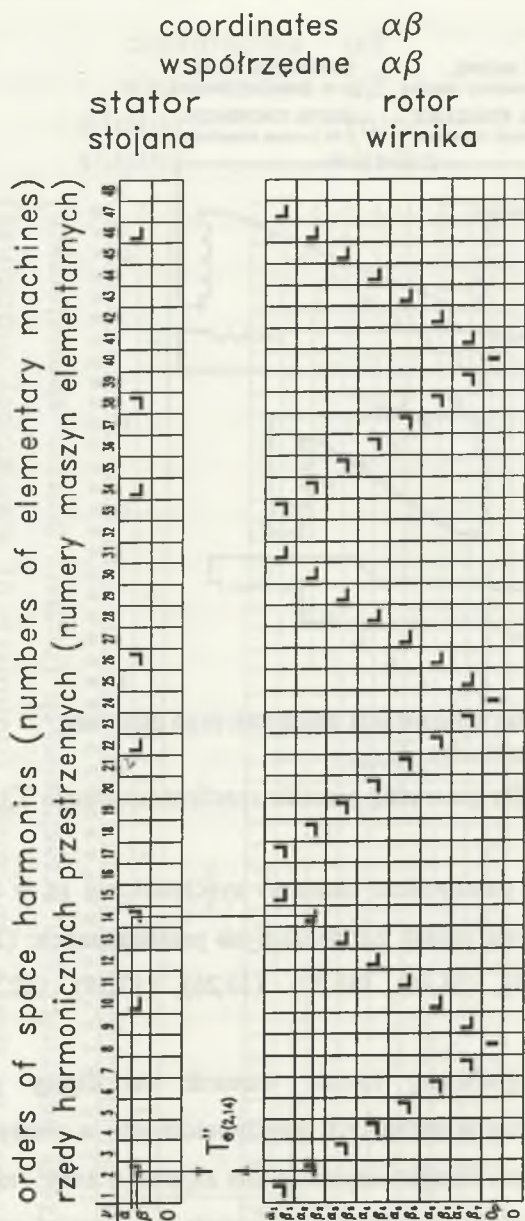


Rys. 2.7. Mechanizm generowania pasożytniczego momentu synchronicznego  $T'_{\alpha(\nu,\rho)s}$

Fig. 2.7. Principle for generating parasitic synchronous torque  $T'_{\alpha(\nu,\rho)s}$

Wynika z niego, że pasożytnicze momenty synchroniczne są w tej maszynie związane z następującymi parami harmonicznymi przestrzennych: (2,14), (2,34), (2,46), (14,34), (14,46), (34,46), (10,22), (10,26), (10,38), (22,26), (22,38) i (26,38).

Sformułowany w graficznej formie warunek określający powstawanie pasożytniczych momentów przemiennej (synchronicznej) w maszynie zasilanej 3-fazowym symetrycznym układem napięć można zapisać w inny - matematyczny sposób. Moment przemiennej (synchronicznej) powstaje w wyniku współdziałania każdej pary harmonicznymi przestrzennymi  $(\nu,\rho)$ , jeśli:



Rys. 2.8. Tor generowania pasywnego momentu synchronicznego  $T_e''(2,14)_s$  ( $p=2$ ;  $Q_r=16$ )  
 Fig. 2.8. Path of generating parasitic synchronous torque  $T_e''(2,14)_s$  ( $p=2$ ;  $Q_r=16$ )

- harmoniczna  $v$  i harmoniczna  $\rho$  są zawarte w widmie harmonicznych przestrzennych generowanych przez 2-fazowe uzwojenia stojana:  $v \in \{S_1\}, \rho \in \{S_1\}$  oraz w widmie harmonicznych przestrzennych generowanych przez uzwojenie klatkowe:  $v \in \{R\}, \rho \in \{R\}$ , gdzie:  $\{R\} = \{R_1\} \cup \{R_2\} \cup \dots \cup \{R_j\} \cup \dots$ ,
- harmoniczna przestrzenna wirnika o rzędzie  $\rho$  powstaje w wyniku reakcji wirnika na harmoniczną przestrzenną stojana o rzędzie  $v$ , różnym od  $\rho$ , czyli harmoniczne przestrzenne  $v$  i  $\rho$  należą do tego samego podzbioru harmonicznych wirnika  $\{R_j\}$ :  $v \in \{R_j\}$  i  $\rho \in \{R_j\}$ .

Przez zsumowanie i przekształcenie w następujący sposób powyższych relacji logicznych:

$$v, \rho \in \{S_1\} \cap v, \rho \in \{R\} \cap v, \rho \in \{R_j\}, \quad R_j \subset \{R\} \quad (a)$$

$$(a) \Rightarrow v, \rho \in \{S_1\} \cap v, \rho \in \{R_j\} \quad (b)$$

$$(b) \Rightarrow v \in \{S_1\} \cap \{R_j\} \quad \cap \quad \rho \in \{S_1\} \cap \{R_j\} \quad (c)$$

otrzymujemy ostatecznie warunek na powstawanie pasożytniczych momentów przemiennej (synchronicznej) I rzędu, który można wyrazić w następujący sposób: *para harmonicznych przestrzennych  $(v, \rho)$  wytwarza pasożytniczy moment przemiennej (synchronicznej)  $T_{e(v, \rho)s}$  wtedy i tylko wtedy, gdy.*

$$v \in \{S_1\} \cap \{R_j\} \quad \cap \quad \rho \in \{S_1\} \cap \{R_j\} \quad (2.1)$$

Taka postać warunku dobrze koresponduje z budową macierzy wirnik-stojan opisaną relacją (1.48) i pozwala na łatwe wyznaczenie rzędów wszystkich harmonicznych przestrzennych uczestniczących w powstawaniu pasożytniczych momentów przemiennej I rzędu na podstawie znajomości wypełnienia macierzy wirnik-stojan.

Wszystkie harmoniczne przestrzenne, które mogą uczestniczyć w generowaniu pasożytniczych momentów przemiennej (synchronicznej) I rzędu są zawarte w obrębie podmacierzy obwiedzionej czarną linią (uwzględniono, że dla wirnika klatkowego  $\{R_0\} = \emptyset$ ):



	$\alpha$	$\beta$	$0$
$\alpha_1$	$\{R_1\} \wedge \{S_1\}$		
$\beta_1$			
$\alpha_2$	$\{R_2\} \wedge \{S_1\}$		
$\beta_2$			
	...		
$\alpha_i$	$\{R_i\} \wedge \{S_1\}$		
$\beta_i$			
	...		
$0$			

(2.2a)

*Pasożytniczy moment przemienny (synchroniczny) jest wynikiem współdziałania tylko tych uporządkowanych par harmonicznych przestrzennych  $(v, \rho)$ , które dają się zestawzić z harmonicznych zawartych w kolejnych podzbiorach  $\{R_i\} \cap \{S_1\}$  - tak, jak to pokazano poniżej:*

	$\alpha$	$\beta$	$0$
$\alpha_1$	$\{R_1\} \wedge \{S_1\}$		
$\beta_1$			
$\alpha_2$	$\{R_2\} \wedge \{S_1\}$		
$\beta_2$			
	...		
$\epsilon$	$\alpha_i$	$\{R_i\} \wedge \{S_1\}$	
$(v, \rho)$	$\beta_i$		
	...		
$0$			

(2.2b)

2. Pasożytnicze momenty przemienne (synchroniczne) i asynchroniczne

Stąd też wniosek, że jeśli zbiór  $\{R_i\} \cap \{S_i\}$  jest zbiorem jednoelementowym, to harmoniczna ta nie uczestniczy w powstawaniu pasożytniczego momentu przemiennego (synchronicznego) i może być wykluczona ze zbioru harmonicznych odpowiadających za powstawanie momentów pasożytniczych.

Przykładowo harmoniczne przestrzenne uczestniczące w powstawaniu pasożytniczych momentów przemiennej I rzędu w 3-fazowej maszynie o  $p=2$  i  $Q_r = 16$  przy  $v_m = 48$  (zredukowany schemat rozkładu - rys. 1.21, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan - (1.66)) są zawarte w podmacierzy wyodrębnionej za pomocą czarnej linii:

	$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_1$			
$\beta_1$			
$\alpha_2$	2,14,34,	46,	18, 30,
$\beta_2$			
$\alpha_3$			
$\beta_3$			
$\alpha_4$			
$\beta_4$			
$\alpha_5$			
$\beta_5$			
$\alpha_6$	10,22,26,	38,	6, 42,
$\beta_6$			
$\alpha_7$			
$\beta_7$			
0p			
0			

(2.3)

W obrębie zbioru  $\{R_2\} \cap \{S_1\}$  pasożytniczy moment przemiennej I rzędu wytwarzają uporządkowane pary harmonicznych: (2,14), (2,34), (2,46), (14,34), (14,46), (34,46), zaś w obrębie zbioru  $\{R_4\} \cap \{S_1\}$  - pary: (10,22), (10,26), (10,38), (22,26), (22,38), (26,38).

Tak więc pary harmonicznych przestrzennych uczestniczących w powstawaniu pasożytniczych momentów przemiennych (synchronicznych) I rzędu mogą być wyznaczone na podstawie schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne i tory generowania, jak i również wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan.

Pasożytnicze momenty synchroniczne, odpowiadające poszczególnym parom harmonicznych przestrzennych ( $v, \rho$ ) lub - innymi słowy - poszczególnym torom generowania momentów pasożytniczych, przyjmują najczęściej bardzo zróżnicowane wartości, różniące się nieraz o rząd lub nawet kilka rzędów. Pozwala to na wyodrębnienie spośród nich momentów dominujących, wpływających w zasadniczy sposób na wartość wypadkowego momentu synchronicznego oraz - momentów o wartościach pomijalnie małych, których można w obliczeniach nie uwzględniać. Zależy to od rzędów harmonicznych przestrzennych  $v$  i  $\rho$  oraz od współczynników uzwojeń stojana i wirnika dla  $v$ -tej i  $\rho$ -tej harmonicznej.

Największe pasożytnicze momenty przemiennie (synchroniczne), są oczywiście, związane z harmoniczną główną, czyli harmoniczną  $p$ -tą.

Dla oceny roli pasożytniczych momentów przemiennych I rzędu, dla których maszyną wzbudzającą jest elementarna maszyna o numerze  $5p$ , istotne znaczenie ma nierówność:

$$5p < \frac{Q_r}{2}, \text{ gdy } Q_r - \text{liczba parzysta} \quad (2.4)$$

lub

$$5p < \frac{Q_r - 1}{2}, \text{ gdy } Q_r - \text{liczba nieparzysta} . \quad (2.5)$$

W przypadku spełnienia nierówności, należy się spodziewać w maszynie relatywnie większych pasożytniczych momentów przemiennych niż wówczas, gdy nierówności te nie są spełnione.

Dzieje się tak dlatego, że w przypadku niespełnienia nierówności (2.2), (2.3) w tym samym wierszu schematu rozkładu wirnika, w którym zawarte jest

uzwojenie elementarne wirnika  $5p$ , znajduje się na lewo od niego uzwojenie elementarne o dużej indukcyjności głównej wirnik-wirnik  $L_{r\nu}$  (gdzie:  $\nu < 5p$ ), które pomniejsza prąd wirnika i w konsekwencji pasożytniczy moment synchroniczny. To elementarne uzwojenie  $L_{r\nu}$  zachowuje się tak, jak dodatkowy dławik włączony w szereg z uzwojeniem wirnika maszyny wzbudzającej.

To samo dotyczy również pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu, dla których maszyną wzbudzającą jest maszyna elementarna o numerze  $7p$ . Przy ich rozpatrywaniu konieczne jest również rozważenie nierówności analogicznej do (2.4) i (2.5):

$$7p < \frac{Q_r}{2}, \text{ gdy } Q_r - \text{liczba parzysta} \quad (2.6)$$

lub

$$7p < \frac{Q_r - 1}{2}, \text{ gdy } Q_r - \text{liczba nieparzysta.} \quad (2.7)$$

Powyższe rozważania, jak też wyniki analizy dotyczące współczynników uzwojeń przeprowadzone w rozdz.1.6, pozwalają na ustalenie procedury prowadzącej do wyszukania na schemacie rozkładu maszyny dominujących pasożytniczych momentów przemiennej (synchronicznych) I rzędu. Rząd najwyższej uwzględnianej na schemacie rozkładu harmonicznej przestrzennej  $\nu_m$  powinien wynosić około  $(4+5)Q_r$  (schemat rozkładu wirnika składa się wówczas z  $4+5$  "liter V"). Wyszukiwanie torów generowania pasożytniczych momentów synchronicznych dogodnie jest rozpocząć od momentów związanych z najsilniejszymi harmonicznymi przestrzennymi przepływu stojana. Kolejno przyjmuje się więc, że  $\nu$ -tą elementarną maszyną wzbudzającą jest:

- $p$ -ta maszyna elementarna odpowiadająca harmonicznej głównej,
- $5p$ -ta i  $7p$ -ta maszyna elementarna, zwłaszcza jeśli spełnione są nierówności (2.4), (2.6), gdy  $Q_r$  - liczba parzysta lub (2.5), (2.7), gdy  $Q_r$  - liczba nieparzysta,

- $(Q_s \pm p)$ -ta,  $(2Q_s \pm p)$ -ta i  $(3Q_s \pm p)$ -ta maszyna (maszyny elementarne odpowiadające harmonicznym żłobkowym stojana I, II i III rzędu).

Jeżeli - po wyszukaniu toru generowania momentu pasożytniczego - okaże się, że  $p$ -ta elementarna maszyna synchroniczna, współdziałająca z wyżej wymienionymi maszynami wzbudzającymi, jest związana z harmoniczną o dużej amplitudzie, a więc z harmoniczną żłobkową stojana, harmoniczną żłobkową wirnika lub harmoniczną strefową o wysokim współczynniku uzwojenia, to moment ten można zaliczyć do pasożytniczych momentów dominujących. Na szczególną uwagę zasługują wybitnie niekorzystne przypadki, gdy  $p$ -ta harmoniczna przestrzenna jest równocześnie harmoniczną żłobkową stojana (lub harmoniczną strefową o wysokim współczynniku uzwojenia) oraz - harmoniczną żłobkową wirnika.

Wskaźnikiem pomocnym przy określaniu dominujących pasożytniczych momentów przemiennych może być współczynnik o następującej postaci:

$$\left| k_{(v,\rho)} = \frac{k_{wsv} k_{wsp} k_{wrv} k_{wrp} k_{sqv} k_{sq\rho}}{v\rho} \right| \quad (2.8)$$

będący formalnym zapisem stwierdzenia, że *pasożytniczy moment synchroniczny przyjmuje tym wyższe wartości, im wyższe są współczynniki uzwojeń i skosu oraz niższe rzędy harmonicznych przestrzennych maszyn elementarnych  $v$ -tej i  $p$ -tej, uczestniczących w powstawaniu tego momentu*. Istotne znaczenie odgrywa w tym wyrażeniu współczynnik skosu. W praktyce jednak okazuje się, że osłabienie pasożytniczych momentów przemiennych (synchronicznych), uzyskiwane za pomocą skosu żłobków wirnika jest znacznie mniejsze, niżby to wynikało z obliczeń teoretycznych i wartości współczynnika skosu. Przyczyną tego są prądy poprzeczne, płynące pomiędzy ukosowanymi prętami wirnika przez żelazo, niweczące w znacznym stopniu tłumiące działanie skosu żłobków klatki. Stąd też przy wyszukiwaniu dominujących pasożytniczych momentów przemiennych

(synchronicznych) lepiej nie brać pod uwagę wartości współczynnika skosu i przyjąć przy obliczaniu współczynnika (2.6), że:  $k_{sqv} = 1$  i  $k_{sq\rho} = 1$ .

Procedurę wyszukiwania dominujących pasożytniczych momentów przemiennej (synchronicznych) I rzędu można również oprzeć na wypełnieniu macierzy indukcyjności wirnik-stojan. W tym celu należy wyróżnić harmoniczne przestrzenne stojana i wirnika o największym znaczeniu - i zbadać, które z nich spełniają warunek (2.1), a więc tworzą pary w obrębie podzbiorów  $\{R_j\} \cap \{S_j\}$  zawartych w części wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan obwiedzionej czarną linią (2.2b).

synchronous machine  
maszyna synchroniczna

		$\rho$			
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
exciting machine maszyna wzbudzająca	$\downarrow$	0	$\frac{2\omega_0}{\rho+v}$	$-\frac{2\omega_0}{\rho-v}$	0
	$\downarrow$	$\frac{2\omega_0}{\rho+v}$	0	0	$-\frac{2\omega_0}{\rho-v}$
	$\downarrow$	$\frac{2\omega_0}{\rho-v}$	0	0	$-\frac{2\omega_0}{\rho+v}$
	$\downarrow$	0	$\frac{2\omega_0}{\rho-v}$	$-\frac{2\omega_0}{\rho+v}$	0
	$\downarrow$	0	$\frac{2\omega_0}{\rho+v}$	$-\frac{2\omega_0}{\rho-v}$	0

Rys. 2.9. Prędkości synchroniczne momentów pasożytniczych w zależności od orientacji osi faz elementarnej maszyny wzbudzającej i synchronicznej

Fig. 2.9. Synchronous speeds of parasitic torques according to orientation of axes of elementary windings in exciting and synchronous machine

*Znajomość toru generowania pasożytniczego momentu przemiennej I rzędu, związanej z parą harmonicznych przestrzennych  $(v, \rho)$ , pozwala na określenie szeregu własności tej składowej bez wykonywania jakichkolwiek obliczeń. I tak prędkość, przy której pasożytniczy moment przemiennej przekształca się w moment*

synchroniczny, czyli *prędkość synchroniczna momentu pasożytniczego*  $\Omega_{ms}$ , jest uzależniona od orientacji osi faz maszyny wzbudzającej i synchronicznej oraz numerów maszyn elementarnych (rzędów harmonicznych przestrzennych) uczestniczących w powstawaniu tego momentu. Wszystkie możliwe przypadki zestawiono na rys. 2.9.

Z postaci torów generowania pasożytniczych momentów synchronicznych wynika, że harmoniczne przestrzenne wytwarzające pasożytnicze momenty przemienne spełniają relacje:

$$\rho \pm v = c Q_r \quad c = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.9)$$

Z zestawienia prędkości synchronicznych, przedstawionego na rys. 2.18, wynika, że pasożytniczy moment synchroniczny może powstać w zakresie pracy silnikowej:

$$\Omega_{ms} = \frac{2\omega_0}{\rho \pm v} = \frac{2\omega_0}{cQ_r}, \quad (2.10)$$

w zakresie pracy hamulcowej:

$$\Omega_{ms} = \frac{-2\omega_0}{\rho \pm v} = \frac{-2\omega_0}{cQ_r} \quad (2.11)$$

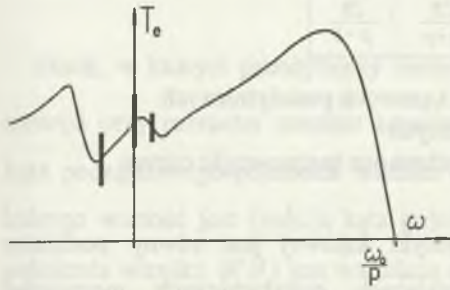
lub też przy rozruchu:

$$\Omega_{ms} = 0. \quad (2.12)$$

Pasożytnicze momenty synchroniczne, związane z zakresem pracy silnikowej i hamulcowej, powstają w bliskim otoczeniu prędkości  $\Omega_m = 0$ . Dominującym pasożytniczym momentem synchronicznym odpowiadają najczęściej wartości  $c=1,2,3$ .

Pasożytniczy moment synchroniczny jest momentem stałym, którego wartość uzależniona jest od kąta położenia wirnika  $\vartheta_0$  w chwili zaistnienia stanu ustalonego. Kąt  $\vartheta_0$  można również zdefiniować jako kąt widoczny pomiędzy osią pierwszej fazy stojana i osią pierwszego oczka klatki wirnika przy założeniu, że maszyna wirująca ze stałą prędkością kątową  $\Omega_{ms}$  jest oświetlana lampą stroboskopową o pulsacji odpowiadającej prędkości wirnika  $\Omega_{ms}$ .

Zależność pasożytniczego momentu synchronicznego od kąta położenia wirnika  $\vartheta_0$  nazywa się *charakterystyką kątową pasożytniczego momentu synchronicznego*. Maksymalną wartość pasożytniczego momentu synchronicznego określa się jako *amplitudę pasożytniczego momentu synchronicznego*. Pasożytniczy moment synchroniczny zaznacza się umownie na charakterystyce mechanicznej silnika przy prędkości synchronicznej  $\Omega_{ms}$  za pomocą pionowego odcinka o długości odpowiadającej podwójnej wartości amplitudy (rys. 2.10).



Rys. 2.10. Przykładowa wypadkowa charakterystyka mechaniczna z pasożytniczymi momentami synchronicznymi w zakresie pracy hamulcowej i silnikowej oraz przy rozruchu

*Charakterystyka kątowa pasożytniczego momentu synchronicznego związanej z pojedynczą parą harmonicznych  $(\nu, \rho)$  jest zawsze funkcją sinusoidalną. Okres  $T_s$  tej charakterystyki jest uzależniony od orientacji osi faz  $\nu$ -tej i  $\rho$ -tej maszyny elementarnej i może być określony na podstawie zestawienia z rys. 2.11, obejmującego wszystkie możliwe przypadki.*

Fig. 2.10. Exemplary resultant torque-speed curve with parasitic synchronous torques in brake and motor region and at starting

Z rys. 2.11 i wzoru (2.19) wynika, że:

$$T_s = \frac{2\pi}{\rho \pm \nu} = \frac{2\pi}{cQ_r} = \frac{\alpha_r}{c} \quad (2.13)$$

gdzie:

$\alpha_r$  - kątowa podziałka zębowa wirnika ( $\alpha_r = \frac{2\pi}{Q_r}$ ).

Oznacza to, że *okres  $T_s$  charakterystyki kątowej pasożytniczego momentu synchronicznego jest zawsze dzielnikiem podziałki zębowej wirnika  $\alpha_r$ .*



		synchronous machine maszyna synchroniczna			
		$\rho$	$\rho$	$\rho$	$\rho$
exciting machine maszyna wzbudzająca	$\nu$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$
	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$
	$\lrcorner$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$
	$\lrcorner$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$
	$\lrcorner$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$
	$\lrcorner$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho+\nu}$	$\frac{2\pi}{\rho-\nu}$

Rys. 2.11. Okresy charakterystyk kątowych pasożytniczych momentów synchronicznych  
 Fig. 2.11. Periods of parasitic synchronous torque-angle curves

Największy możliwy okres charakterystyki kątowej jest równy podziałce żłobkowej  $\alpha_r$  (dla  $c=1$ ). Dla dominujących pasożytniczych momentów synchronicznych związanych z wartościami liczby  $c=1,2,3$  okres charakterystyki kątowej jest równy odpowiednio podziałce żłobkowej, 1/2 podziałki żłobkowej lub 1/3 podziałki żłobkowej. Wartość  $c$  występująca we wzorach (2.10) i (2.11) oraz we wzorze (2.13) jest ta sama. Stąd wynika, że dla momentów synchronicznych występujących w zakresie pracy silnikowej i hamulcowej, okres charakterystyki kątowej i prędkość synchroniczna są powiązane prostą relacją:

$$T_s = \pi \frac{|\Omega_{ms}|}{\omega_0} \quad (2.14)$$

Innymi słowy, dla synchronicznych momentów pasożytniczych powstających przy prędkości  $\Omega_{ms} \neq 0$ , znajomość prędkości synchronicznej  $\Omega_{ms}$  oznacza również znajomość okresu charakterystyki kątowej  $T_s$ . Nie jest tak w przypadku pasożytniczych momentów synchronicznych powstających przy prędkości  $\Omega_{ms} = 0$ , dla których to momentów do wyznaczenia okresu charakterystyki kątowej

konieczna jest znajomość rzędów harmonicznych przestrzennych  $(v, \rho)$  uczestniczących w ich powstawaniu.

Dla rozruchu silnika szczególne znaczenie ma charakterystyka kątowa momentu synchronicznego powstającego przy  $\Omega_{ms} = 0$ , albowiem przy zatrzymanym wirniku kąt  $\vartheta_0$  jest równy wprost kątowi początkowego położenia wirnika  $\mathcal{G}(0)$ :

$$\vartheta_0 = \mathcal{G}(0) \quad (2.15)$$

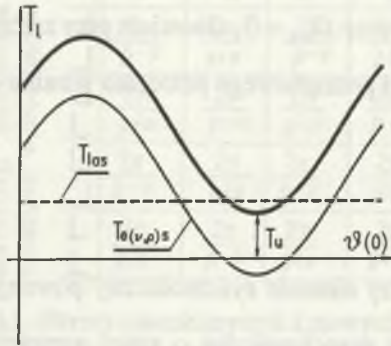
Silnik, w którym pasożytniczy moment synchroniczny powstaje przy  $\Omega_{ms} = 0$ , rozwija przy rozruchu moment asynchroniczny o stałej wartości, niezależnej od kąta początkowego położenia wirnika oraz pasożytniczy moment synchroniczny, którego wartość jest funkcją kąta położenia wirnika  $\mathcal{G}(0)$ . Wartość początkowa położenia wirnika  $\mathcal{G}(0)$  jest wartością całkowicie przypadkową. Stąd wypadkowy moment rozruchowy silnika  $T_r$ , będący sumą asynchronicznego momentu rozruchowego  $T_{ras}$  i pasożytniczego momentu synchronicznego  $T_{e(v,\rho)s}$ , jest również funkcją początkowego położenia wirnika  $\mathcal{G}(0)$ . Przykładowy przebieg takiej charakterystyki przedstawia rys. 2.12.

*Minimalny moment rozruchowy  $T_u$  rozwijany przez silnik przy uwzględnieniu oddziaływania pasożytniczego momentu synchronicznego jest równy różnicy asynchronicznego momentu rozruchowego oraz amplitudy pasożytniczego momentu synchronicznego.*

W maszynie zazwyczaj istnieje wiele różnych par harmonicznych przestrzennych wytwarzających momenty pasożytnicze, a wypadkowy moment pasożytniczy powstający w silniku jest wynikiem działania wszystkich tych par.

Ze wzoru (2.14) wynika, że pasożytnicze momenty synchroniczne występujące przy tej samej prędkości obrotowej, różnej od prędkości zerowej, mają te same okresy charakterystyk kątowych. Tak więc *wypadkowa charakterystyka*

*paszytniczego momentu synchronicznego, związanego z zakresem pracy silnikowej lub hamulcowej, jest zawsze funkcją sinusoidalną.*



Rys. 2.12. Charakterystyka momentu rozruchowego w funkcji początkowego kąta położenia wirnika  
 Fig. 2.12. Starting torque-initial rotor angle curve

Paszytnicze momenty synchroniczne występujące przy rozruchu, związane z różnymi parami harmonicznych przestrzennych mogą mieć różne okresy charakterystyk kątowych, stąd też *wypadkowa charakterystyka kątowna momentu synchronicznego przy  $\Omega_{ms} = 0$  może być funkcją niesinusoidalną.*

Przy prędkościach różnych od prędkości synchronicznej  $\Omega_m \neq \Omega_{ms}$  paszytniczy moment synchroniczny przekształca się w paszytniczy moment przemienny. Pulsacja tego momentu, zmieniająca się wraz z prędkością wirnika  $\Omega_m$ , jest opisana wzorem:

$$\omega_p = c Q_r |\Omega_m - \Omega_{ms}| \quad (2.16)$$

Wprowadzając do wzoru (2.16) okres charakterystyki kątownej, opisany wzorem (2.13), otrzymujemy:

$$\omega_p = Q_r \frac{\alpha_r}{T_s} |\Omega_m - \Omega_{ms}| = \frac{2\pi}{T_s} |\Omega_m - \Omega_{ms}|, \quad (2.17)$$

a więc *pulsacja pasożytniczego momentu przemiennego jest zależna od różnicy między prędkością wirnika i prędkością synchroniczną oraz od okresu charakterystyki kątovej  $T_s$ .*

Wraz ze zmianą prędkości obrotowej zmienia się amplituda pasożytniczego momentu przemiennego. Zależność amplitudy pasożytniczego momentu przemiennego od poślizgu, czyli innymi słowy - charakterystyka mechaniczna amplitudy pasożytniczego momentu przemiennego, może być również interpretowana jako obwiednia maksymalnych wartości momentu przemiennego, zaś jej zwierciadlane odbicie względem osi prędkości - jako obwiednia minimalnych wartości momentu przemiennego. W taki właśnie sposób - w postaci górnej i dolnej obwiedni maksymalnych i minimalnych wartości momentu przemiennego - przedstawia się zwykle charakterystyki mechaniczne amplitudy momentu przemiennego i nazywa w skrócie - *obwiedniami pasożytniczego momentu przemiennego  $T_{e(v,\rho)m}$ .*

Obwiednie składowych pasożytniczych momentów przemiennych  $T'_{e(v,\rho)m}$  i  $T''_{e(v,\rho)m}$  charakteryzują się występowaniem miejsc zerowych przy prędkościach odpowiednio:

$$\Omega_m = \pm \frac{\omega_0}{\nu} \quad (2.18)$$

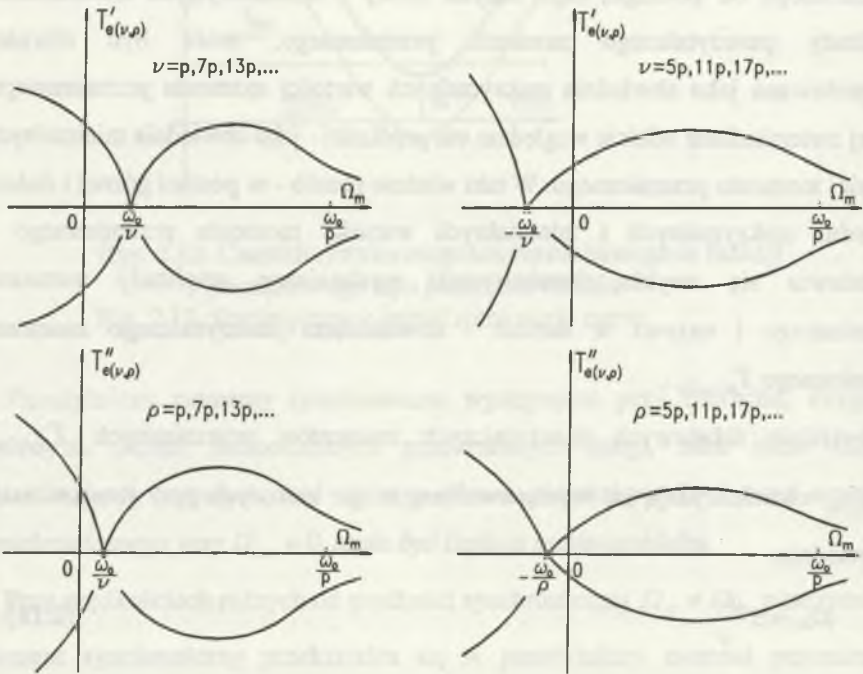
lub

$$\Omega_m = \pm \frac{\omega_0}{\rho}, \quad (2.19)$$

a więc przy prędkościach odpowiadających zerowym wartościom prądów w wirnikach elementarnych maszyn uczestniczących w powstawaniu pasożytniczego momentu przemiennego. Możliwe przebiegi obwiedni tych składowych przedstawia rys. 2.13.

Obwiednia pasożytniczego momentu przemiennego, będącego sumą momentów przemiennych  $T'_{e(v,\rho)}$  i  $T''_{e(v,\rho)}$ , może w niektórych przypadkach charakteryzować się

posiadaniem minimów, odpowiadających położeniu miejsc zerowych na charakterystykach obwiedni momentów składowych  $T'_{e(v,\rho)}$  i  $T''_{e(v,\rho)}$ . W ogólnym jednak przypadku, ze względu na wzajemne przesunięcie charakterystyk kątowych momentów składowych - ekstrema na charakterystyce wypadkowej są rozłożone w odmienny sposób.



Rys. 2.13. Możliwe przypadki położenia miejsc zerowych dla obwiedni pasożytniczych momentów przemiennych - składowych  $T'_{e(v,\rho)m}$  i  $T''_{e(v,\rho)m}$

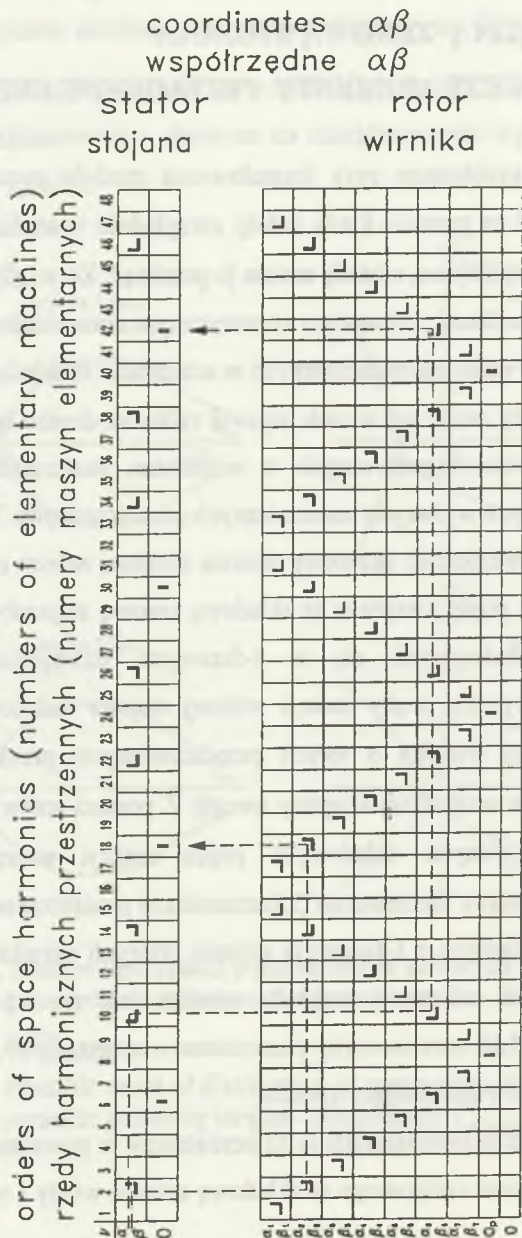
Fig. 2.13. Possible cases of distribution of zero points for envelopes of parasitic pulsating torques - components  $T'_{e(v,\rho)m}$  and  $T''_{e(v,\rho)m}$

### 2.3. WPŁYW PRĄDÓW REAKCJI WTÓRNEJ ZWIĄZANYCH ZE WSPÓLRZĘDNĄ ZEROWĄ STOJANA NA PASOŻYTNICZE MOMENTY PRZEMIENNE I RZĘDU

Kolejnym istotnym problemem przy formułowaniu modelu matematycznego maszyny jest odpowiedź na pytanie, kiedy należy uwzględnić w analizie równanie dla współrzędnej zerowej stojana, a kiedy można je pominąć. Ze względu na to, że w 3-fazowej maszynie zasilanej 3-fazowym symetrycznym sinusoidalnym układem napięć, ciąg 1-fazowych uzwojeń elementarnych w schemacie rozkładu stojana jest zwarty (wzór 1.34), prądy mogą się w nich pojawić tylko na drodze indukcyjnej - w wyniku sprzężeń elektromagnetycznych z wirnikiem, realizujących się za pośrednictwem określonych wyższych harmonicznych przestrzennych. Tak więc to, czy w modelu należy uwzględnić składową zerową stojana, zależy od tego, czy w maszynie indukują się prądy związane ze składową zerową stojana, czy też nie. Wśród składowych indukujących się w 1-fazowych uzwojeniach stojana najistotniejszą rolę odgrywają prądy reakcji wtórnej stojana indukowane przez prądy reakcji pierwotnej wirnika o torach przedstawionych przykładowo na rys. 2.14 i na nich przede wszystkim skupimy uwagę. Z postaci torów wynika, że w powstawaniu poszczególnych składowych prądu reakcji wtórnej stojana uczestniczą zawsze 2 maszyny elementarne (2 harmoniczne przestrzenne): maszyna o 2-fazowym stojanie i maszyna o 1-fazowym stojanie, których wirniki przynależą do tego samego wiersza schematu rozkładu wirnika (na rys. 2.14 maszyny elementarne o numerach 2,18 oraz maszyny elementarne o numerach 10,42). Można to wyrazić matematycznie w następujący sposób:

- \* para harmonicznych przestrzennych  $(\nu, \lambda)$  uczestniczy w powstawaniu prądu reakcji wtórnej stojana związanego ze składową zerową wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\nu \in \{R_i\} \cap \{S_I\} \quad \cap \quad \lambda \in \{R_j\} \cap \{S_0\} \quad (2.20)$$



Rys. 2.14. Tory generowania prądów reakcji wtórnej stojana związanych ze współrzędną zerową stojana  
 (stojan połączony w trójkąt) ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )

Fig. 2.14. Paths of generating currents of secondary stator reaction connected with zero stator coordinate  
 (delta-connected stator) ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )

Powstawanie prądów reakcji wtórnej stojana, odpowiadających współrzędnej zerowej jest więc związane z harmonicznymi należącymi do następujących dwóch, wyróżnionych czarną linią, podzbiorów wypełnienia macierzy wirnik-stojan:

$$\begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad 0 \\
 \left[ \begin{array}{c|c}
 \alpha_1 & \{R_1\} \wedge \{S_1\} & \{R_1\} \wedge \{S_0\} \\
 \beta_1 & & \\
 \hline
 \alpha_2 & \{R_2\} \wedge \{S_1\} & \{R_2\} \wedge \{S_0\} \\
 \beta_2 & & \\
 \vdots & \dots & \dots \\
 \hline
 \alpha_i & \{R_i\} \wedge \{S_1\} & \{R_i\} \wedge \{S_0\} \\
 \beta_i & & \\
 \vdots & \dots & \dots \\
 0 & & 
 \end{array} \right]
 \end{array} \quad (2.21a)$$

Prądy reakcji wtórnej stojana związane ze współrzędną zerową są wynikiem współdziałania wszystkich par harmonicznymi przestrzennymi zawartych w obrębie

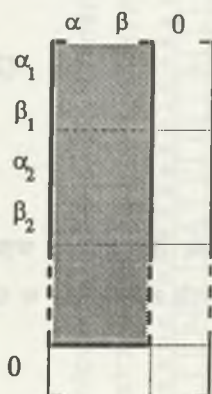
$$\begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad 0 \\
 \left[ \begin{array}{c|c}
 \alpha_1 & \{R_1\} \wedge \{S_1\} & \{R_1\} \wedge \{S_0\} \\
 \beta_1 & & \\
 \hline
 \alpha_2 & \{R_2\} \wedge \{S_1\} & \{R_2\} \wedge \{S_0\} \\
 \beta_2 & & \\
 \vdots & \dots & \dots \\
 \hline
 \alpha_i & \{R_i\} \wedge \{S_1\} & \{R_i\} \wedge \{S_0\} \\
 \beta_i & & \\
 \vdots & \dots & \dots \\
 0 & & 
 \end{array} \right]
 \end{array} \quad (2.21b)$$



tego samego wiersza, przy czym pierwszy element każdej pary przynależy do pierwszej kolumny odpowiadającej współrzędnym  $\alpha\beta$ , zaś drugi element pary - do drugiej kolumny odpowiadającej współrzędnej 0. Można to zilustrować w sposób przedstawiony w (2.21b).

Jeśli więc zbiór  $R_i \cap \{S_i\}$  jest zbiorem pustym, to w 1-fazowych uzwojeniach elementarnych o numerach przynależnych do zbioru  $R_i \cap \{S_0\}$  prądy reakcji wtórnej nie będą się indukowały.

Reasumując, współrzędna zerowa stojana nie wystąpi w modelu matematycznym, jeśli kolumna wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan odpowiadająca współrzędnej 0 jest pusta:

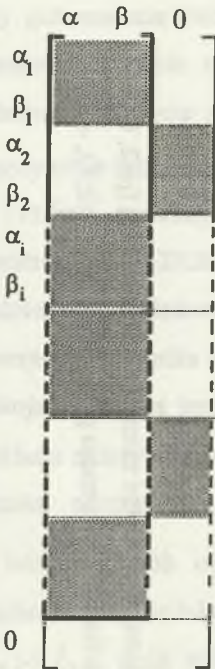


(2.22)

lub też wtedy, gdy pełnym podzbiorem kolumny związanej ze współrzędną 0 odpowiadają puste podzbiory w lewej kolumnie związanej ze współrzędnymi  $\alpha\beta$  (2.23).

Przypadki (2.22) i (2.23) zachodzą wówczas, gdy liczba par biegunów  $p$  i liczba złołbków wirnika  $Q_r$  pozostają w pewnej charakterystycznej relacji.

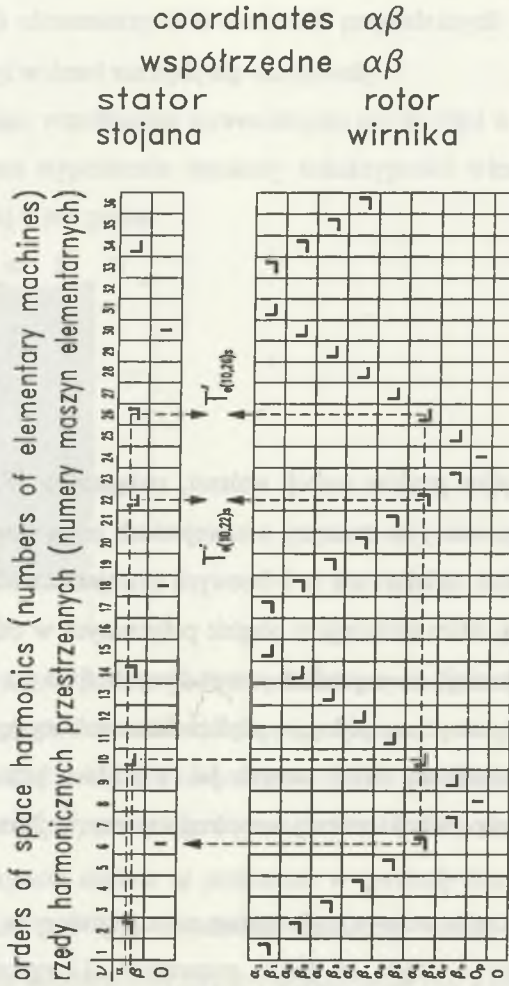
*Jeśli uzwojenia stojana są połączone w gwiazdę bez przewodu zerowego, to niezależnie od  $p$  i  $Q_r$ , wypełnienie macierzy wirnik-stojan ma postać (2.22) i równanie dla współrzędnej zerowej stojana może być z modelu usunięte.*



(2.23)

Rozważmy obecnie wpływ prądów reakcji wtórnej, związanych ze współrzędną zerową, na własności eksploatacyjne maszyny o uzwojeniach połączonych w trójkąt. Prądy reakcji wtórnej stojana, indukowane w 1-fazowych uzwojeniach elementarnych, są prądami obcych pulsacji, które cyrkulują w obrębie połączonych w trójkąt uzwojeń fazowych stojana i nie ujawniają się w prądach przewodowych. Stąd też w przypadku silnika o uzwojeniach połączonych w trójkąt, w prądach fazowych występują - oprócz składowych o obcych pulsacjach, takich samych jak w prądach przewodowych - dodatkowe składowe (prądy reakcji wtórnej współrzędnej zerowej) o odmiennych pulsacjach.

Pomimo tego, że współrzędna zerowa prądu stojana nie uczestniczy w powstawaniu pasożytniczych momentów I rzędu (a tylko momentów II i wyższych rzędów o pomijalnie małym znaczeniu), to może w znaczący sposób wpływać na wartości powstających w maszynie momentów pasożytniczych I rzędu związanych ze współrzędnymi  $\alpha\beta$  stojana. Wpływ ten tłumaczą zestawione na wspólnym rys. 2.15 -



Rys. 2.15. Wpływ prądu reakcji wtórnej stojana  $i_{s(10,6)}$  na pasywnicze momenty synchroniczne ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )  
 Fig. 2.15. Influence of current reaction on synchronous parasitic torques ( $p=2$ ;  $Q_r = 16$ )

tory generowania dwóch pasożytniczych momentów przemiennych I rzędu z torem generowania prądu reakcji wtórnej składowej zerowej stojana dla przykładowej 3-fazowej maszyny o  $p=2$  i  $Q_r=16$ . W maszynie tej powstają dwa znaczące pasożytnicze momenty przemienne związane z harmonicznymi przestrzennymi (10,22) i (10,26) (powstaje też, oczywiście, moment związany z harmonicznymi przestrzennymi (22,26) o mniejszym znaczeniu). Uzwojenie elementarne 6 wownika spełnia rolę dodatkowego dławika o znacznej wartości, włączonego w szereg z uzwojeniem wownika maszyny wzbudzającej o numerze  $v=10$ . W przypadku gdy uzwojenie stojana jest skojarzone w gwiazdę bez przewodu zerowego (ze schematu rozkładu należy usunąć 1-fazowe uzwojenia elementarne stojanów) indukcyjność 6 wownika elementarnego jest równa indukcyjności głównej wirnik-wirnik  $L_{r6}$  i w istotny sposób ogranicza prąd wzbudzenia 22 i 26 elementarnej maszyny synchronicznej, indukowany w 10 elementarnej maszynie wzbudzającej, ponieważ:  $L_{r4} \gg L_{r10}$ . Jeśli jednak uzwojenia stojana są skojarzone w trójkąt, wówczas w 1-fazowym uzwojeniu elementarnym, leżącym naprzeciwko 6 wownika elementarnego, indukują się prądy reakcji wtórnej składowej zerowej o znacznej wartości (prądy reakcji wtórnej składowej zerowej zamykają się w obrębie zwartego trójkąta i nie są ograniczane przez impedancję źródła zasilania), co oznacza, że zastępcza indukcyjność 6 wownika elementarnego (indukcyjność "widziana" z zacisków 6 wownika elementarnego) jest znacznie mniejsza. Zmniejszenie zastępczej indukcyjności 4 wownika elementarnego prowadzi do powiększenia "prądu wzbudzenia" powstającego w 10 maszynie elementarnej i powiększenia - w konsekwencji - pasożytniczych momentów przemiennych związanych z harmonicznymi (10,22) i (10,26).

Z powyższego przykładu wynika, że prądy reakcji wtórnej, powstające w 1-fazowych uzwojeniach elementarnych leżących naprzeciwko 2-fazowych wirników zawartych w tych wierszach, co wirniki maszyn elementarnych uczestniczących w powstawaniu pasożytniczych momentów przemiennych, są przyczyną powiększenia wartości tych momentów przy zmianie układu połączeń

uzwojeń stojana z gwiazdy bez przewodu zerowego na trójkąt. Wpływ ten jest jednak wyraźnie widoczny tylko w takich przypadkach, gdy jedno (lub więcej) z 1-fazowych uzwojeń elementarnych leży na lewo od toru generowania pasożytniczego momentu synchronicznego.

Reasumując,  $\lambda$ -ta harmoniczna przestrzenna w znaczący sposób wpływa na wartości pasożytniczego momentu przemiennego związanej z parą harmonicznych przestrzennych  $(\nu, \rho)$  i jest przyczyną jego zależności od układu połączeń uzwojeń fazowych stojana, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned} \nu \in \{R_i\} \cap \{S_1\}, \quad \rho \in \{R_i\} \cap \{S_1\} \\ \lambda \in \{R_i\} \cap \{S_0\}, \quad \lambda < \nu \end{aligned} \quad (2.24)$$

Zjawisko to jest szczególnie widoczne wtenczas, gdy  $\lambda=3p$ .

Warunki te można zilustrować graficznie opierając się na wypełnieniu macierzy indukcyjności wirnik-stojan w następujący sposób:

		$\alpha$	$\beta$	$0$	
$\alpha_1$		$\{R_1\} \wedge \{S_1\}$		$\{R_1\} \wedge \{S_0\}$	
$\beta_1$		$\{R_2\} \wedge \{S_1\}$		$\{R_2\} \wedge \{S_0\}$	
$\alpha_2$		...		...	
$\beta_2$		$\{R_i\} \wedge \{S_1\}$		$\{R_i\} \wedge \{S_0\}$	
$\alpha_i$		...		...	
$\beta_i$		...		...	
$0$					

$\lambda \in$

$\nu < \lambda$

(2.25)

### 3. KOMPUTEROWA ANALIZA

#### DYNAMIKI MASZYN INDUKCYJNYCH

##### 3.1. KLASYFIKACJA MODELI POLIHARMONICZNYCH

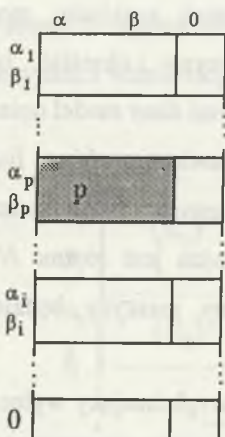
Postać wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan może być podstawą do przeprowadzenia klasyfikacji poliharmonicznych modeli indukcyjnych maszyn klatkowych oraz do wyodrębnienia i scharakteryzowania własności różnych klas tych modeli. Jest to możliwe dzięki temu, że wypełnienie macierzy wirnik-stojan wraz ze schematem rozkładu maszyny na maszyny elementarne pozwala na jednoznaczne odtworzenie układu równań różniczkowych opisujących maszynę (podrozdz. 1.8), a więc może być traktowane jako syntetyczny uproszczony zapis modelu matematycznego maszyny. Równocześnie, opierając się na wypełnieniach macierzy indukcyjności wirnik-stojan oraz na schematach rozkładu, można dokonać jakościowej analizy rozwiązania równań maszyny i określić, jakie zjawiska związane z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi dany model opisuje.

Wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan zawierają różną liczbę harmonicznych przestrzennych. Jeśli liczba harmonicznych przestrzennych w obrębie wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan jest równa  $N$ , to odpowiadający temu wypełnieniu model poliharmoniczny maszyny będziemy nazywać modelem  $N$ -harmonicznym.

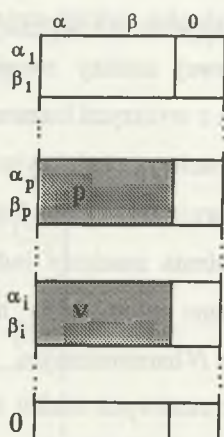
Najprostszym z możliwych modeli maszyny jest model uwzględniający wyłącznie harmoniczną  $p$ -tą, czyli główną. Nosi on nazwę *modelu monoharmonicznego* ( $N=1$ ), a odpowiadające mu wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan ma postać (3.1) ( $LWR=2$ ,  $LWS=2$ ). Model ten opisuje wyłącznie główną przemianę elektromechaniczną dokonującą się za pośrednictwem  $p$ -tej harmonicznej pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny.

Kolejną klasę stanowią *modele uwzględniające* (prócz momentu głównego) *paszytnicze momenty asynchroniczne*, a więc takie momenty paszytnicze, które przyjmują wartość stałą w ustalonym stanie symetrycznym. Odpowiadające tym modelom wypełnienia macierzy indukcyjności głównych mogą zawierać co najwyżej po jednej harmonicznej przestrzennej w każdym wierszu kolumny  $\alpha\beta$ , stąd też będziemy je nazywać *modelami poliharmonicznymi z harmonicznymi przestrzennymi autonomicznymi*. Najprostszy model tej klasy, to model 2-harmoniczny uwzględniający moment główny oraz jeden paszytniczy moment asynchroniczny ( $LWR=4, LWS=2$ ) - o wypełnieniu macierzy indukcyjności wirnik-stojan (3.2).

Najczęściej bierze się pod uwagę harmoniczną  $\nu=5p$  lub też - jeśli współczynnik uzwojenia stojana  $k_{ws5p} = 0$  - harmoniczną  $\nu=7p$ .



(3.1)



(3.2)

Modele 3-harmoniczne ( $LWR=6$ ), 4-harmoniczne ( $LWR=8$ )..., uwzględniające odpowiednio 2,3,... paszytnicze momenty asynchroniczne, charakteryzują się wypełnieniami macierzy wirnik-stojan o budowie (3.3).

	$\alpha$	$\beta$	$0$		$\alpha$	$\beta$	$0$	
$\alpha_1$								
$\beta_1$								
⋮				⋮				⋮
$\alpha_p$	P				P			
$\beta_p$								
⋮				⋮				⋮
$\alpha_i$	$v_1$				$v_1$			
$\beta_i$								
⋮				⋮				⋮
$\alpha_j$	$v_2$				$v_2$			
$\beta_j$								
⋮				⋮				⋮
$0$					$v_3$			
⋮				⋮				⋮
$0$								

(3.3)

Rozszerzeniem tej klasy są *modele uwzględniające pasożytnicze momenty asynchroniczne o wartościach zależnych od układu połączeń uzwojeń stojana.*

	$\alpha$	$\beta$	$0$	
$\alpha_1$				
$\beta_1$				
⋮				⋮
$\alpha_p$	P			
$\beta_p$				
⋮				⋮
$\alpha_i$	$v$		$\lambda$	
$\beta_i$				
⋮				⋮
$0$				

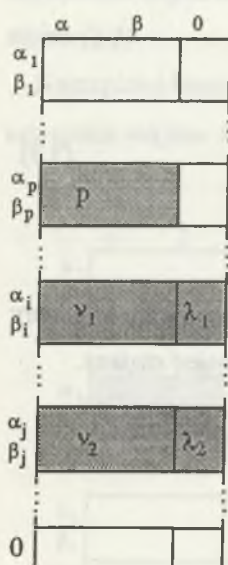
$\lambda < v$

(3.4)

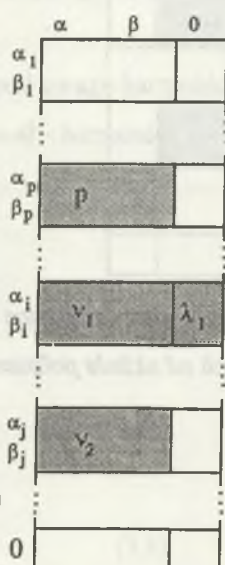


Najprostszy model tej klasy, to model 3-harmoniczny uwzględniający moment główny oraz jeden pasożytniczy moment asynchroniczny, zależny od układu połączeń uzwojeń stojana ( $LWR=4, LWS=3$ ). Macierz wypełnień ma budowę (3.4). Aby wpływ układu połączeń uzwojeń stojana na wartość pasożytniczego momentu asynchronicznego był wyraźnie widoczny i miał znaczenie praktyczne, musi zachodzić:  $\lambda < \nu$ . Najsilniej wpływ ten ujawnia się wówczas gdy:  $\lambda=3p$ .

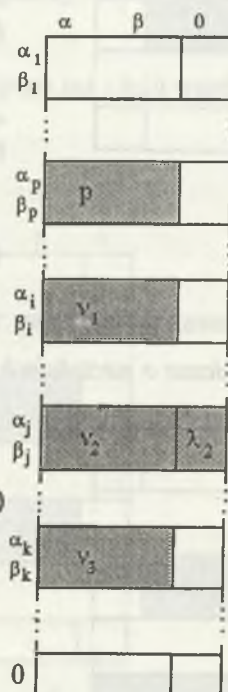
Inne możliwe przypadki, będące wynikiem sumowania wypełnień (3.2) (3.3) z (3.4) charakteryzują się wypełnieniami macierzy wirnik-stojan o postaciach:



(3.5)



(3.6)



(3.7)

Model o wypełnieniu (3.5) ( $LWR=6, LWS=3$ ) uwzględnia dwa pasożytnicze momenty asynchroniczne zależne od układu połączeń uzwojeń stojana, model o wypełnieniu (3.6) ( $LWR=6, LWS=3$ ) - dwa pasożytnicze momenty asynchroniczne, z których tylko jeden jest zależny od układu połączeń uzwojeń

stojana, zaś model o wypełnieniu (3.7) ( $LWR=8, LWS=3$ ) - trzy pasożytnicze momenty asynchroniczne, z których jeden jest zależny od układu połączeń uzwojeń stojana, a dwa - nie.

Kolejną klasę stanowią *modele poliharmoniczne, uwzględniające pasożytnicze momenty synchroniczne*, a więc momenty pasożytnicze, które w stanie ustalonym symetrycznym stają się momentami przemiennymi. Model maszyny należący do takiej klasy musi zawierać więcej niż jedną harmoniczną w co najmniej jednym z wierszy kolumny  $\alpha\beta$  wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan. Stąd też modele takie będziemy określać mianem *modeli poliharmonicznych z harmonicznymi przestrzennymi nieautonomicznymi* (wzajemnie sprzężonymi). Najprostszy model tej klasy, to model 2-harmoniczny uwzględniający moment główny harmonicznego p-tej oraz pasożytniczy moment synchroniczny (przemienne) związany z parą harmonicznych przestrzennych ( $p, v$ ) ( $LWR=2, LWS=2$ ):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \alpha & \beta & 0 \\
 \alpha_1 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \\
 \beta_1 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \alpha_p & \boxed{p, v} & \boxed{\phantom{0}} \\
 \beta_p & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (3.8)$$

Harmoniczna  $v$  odpowiada najczęściej harmonicznego żłobkowej wirnika oraz harmonicznego żłobkowej stojana.

Model ten uwzględnia również pasożytniczy moment asynchroniczny dla  $v$ -tej harmonicznego przestrzennej, ale jego wpływ - ze względu na stosunkowo wysoką wartość rzędu  $v$  - jest najczęściej pomijalnie mały.

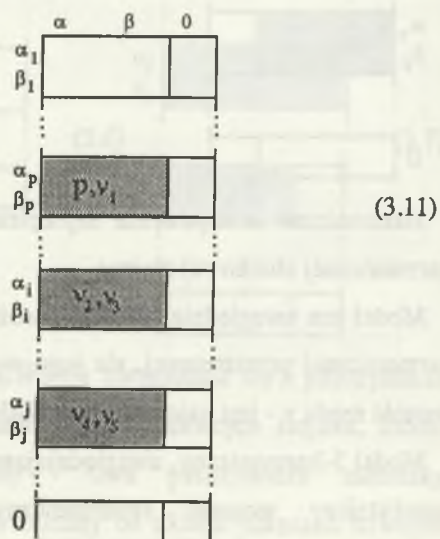
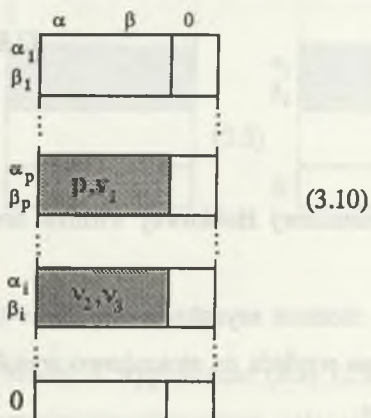
Model 3-harmoniczny, uwzględniający moment główny harmonicznego p-tej oraz pasożytniczy moment synchroniczny związany z parą harmonicznych przestrzennych ( $v_1, v_2$ ), gdzie:  $v_1 \neq p$ , ma następującą postać ( $LWR=4, LWS=2$ ):



Rząd harmonicznej  $v_1$  jest najczęściej równy  $5p$  lub  $7p$ .

Model ten uwzględnia również pasożytnicze momenty asynchroniczne dla  $v_1$ -tej i  $v_2$ -tej harmonicznej przestrzennej, z których najczęściej znaczenie praktyczne ma tylko moment asynchroniczny dla harmonicznej  $v_1$ -tej ( $v_1 < v_2$ ).

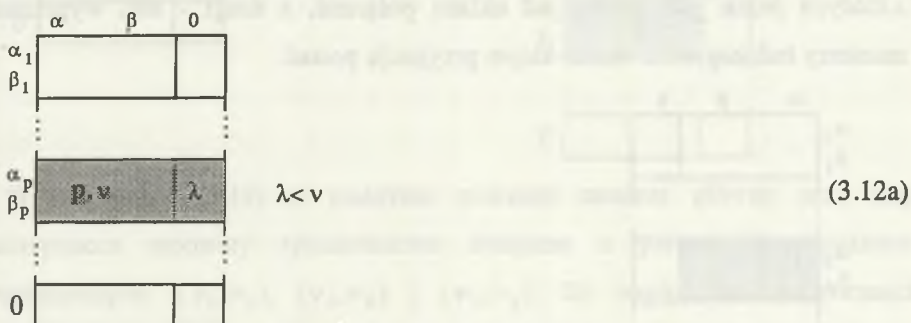
Inne - bardziej złożone - modele tej klasy mogą mieć przykładowo następujące postacie:



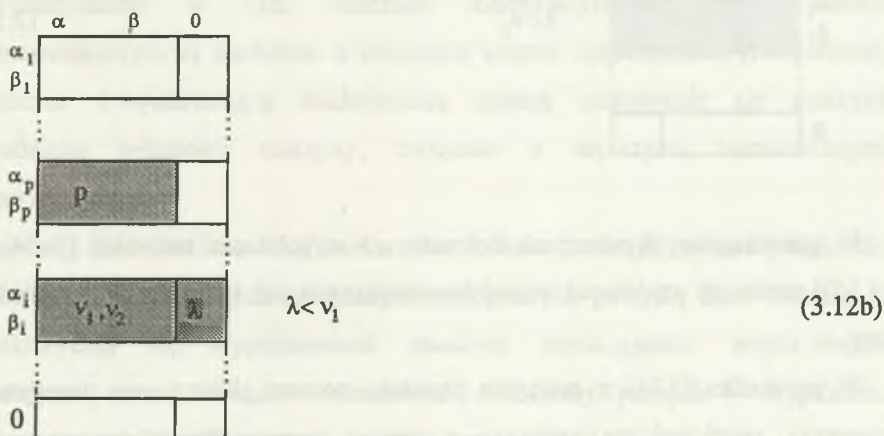
Model o wypełnieniu macierzy (3.10) ( $LWR=4, LWS=2$ ) uwzględnia moment główny i dwa pasożytnicze momenty synchroniczne, zaś model o wypełnieniu macierzy (3.11) ( $LWR=6, LWS=2$ ) - moment główny i trzy pasożytnicze momenty synchroniczne. Pasożytnicze momenty synchroniczne mogą mieć w ogólnym przypadku różne prędkości synchroniczne.

Rozszerzeniem tej klasy są *modele uwzględniające pasożytnicze momenty synchroniczne o wartościach zależnych od układu połączeń uzwojeń stojana*.

W 3-harmonicznym modelu o wypełnieniu macierzy wirnik-stojan:



uwzględniającym moment główny oraz jeden pasożytniczy moment synchroniczny, zależność momentu synchronicznego od układu połączeń uzwojeń stojana jest słabo zauważalna (a w przypadku gdy  $\lambda > v$ , praktycznie niewidoczna).



Najprostszym modelem, w którym zależność ta ujawnia się w wyraźny sposób, jest model 4-harmoniczny ( $LWR=4, LWS=3$ ) uwzględniający moment główny oraz jeden pasożytniczy moment synchroniczny - o harmonicznych spełniających warunek:  $\lambda < \nu_1$  i budowie macierzy (3.12b).

Zależność momentu synchronicznego (związanego z parą harmonicznymi  $(\nu_1, \nu_2)$ ) od układu połączeń uzwojeń stojana jest najsilniej widoczna wtedy, gdy:  $\lambda=3p$ . W przypadku gdy w maszynie występują 2 momenty synchroniczne, z których jeden jest zależny od układu połączeń, a drugi - nie, wypełnienie macierzy indukcyjności wirnik-stojan przyjmuje postać:

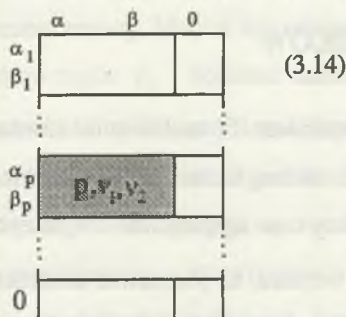
	$\alpha$	$\beta$	$0$	
$\alpha_1$				$\vdots$
$\beta_1$				
$\vdots$				
$\alpha_p$	p			$\vdots$
$\beta_p$	p			
$\vdots$				
$\alpha_l$	$\nu_1, \nu_2$			$\vdots$
$\beta_l$	$\nu_1, \nu_2$			
$\vdots$				
$\alpha_i$	$\nu_3, \nu_4$		$\lambda$	$\vdots$
$\beta_i$	$\nu_3, \nu_4$		$\lambda$	
$\vdots$				
$0$				

$\lambda < \nu_3$  (3.13)

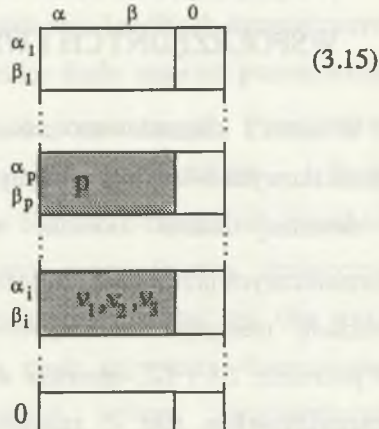
W poszczególnych wierszach kolumny  $\alpha\beta$  wypełnienia macierzy ((3.14) lub (3.15)) może się znajdować więcej harmonicznymi niż tylko dwie, przykładowo trzy.

W przypadku (3.14) w maszynie powstaje moment główny oraz pasożytnicze momenty synchroniczne związane z parami harmonicznymi przestrzennymi:

$(p, \nu_1)$ ,  $(p, \nu_2)$  i  $(\nu_1, \nu_2)$ , przy czym moment synchroniczny dla pary  $(\nu_1, \nu_2)$  jest najczęściej pomijalnie mały.



lub



W przypadku (3.15) w maszynie powstaje moment główny oraz trzy pasożytnicze momenty synchroniczne związane z parami harmonicznymi przestrzennymi:  $(\nu_1, \nu_2)$ ,  $(\nu_1, \nu_3)$  i  $(\nu_2, \nu_3)$ . Ze względu na nierówności  $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$ , trzeci z tych momentów jest zwykle pomijalnie mały.

W analogiczny sposób można rozważać wypełnienia macierzy, zawierające cztery lub więcej harmonicznymi przestrzennymi w jednym wierszu kolumny  $\alpha\beta$ .

Wyodrębnione w tym rozdziale charakterystyczne klasy modeli poliharmonicznymi są modelami o znacznym stopniu uproszczenia, tym niemniej częstokroć z wystarczającą dokładnością opisują zachowanie się maszyny i zasadnicze własności maszyny, związane z wyższymi harmonicznymi przestrzennymi.

Bardziej dokładne i bardziej uniwersalne modele powstają poprzez połączenie cech modeli przynależnych do różnych omówionych powyżej klas. Modele te charakteryzują się wypełnieniami macierzy indukcyjności wirnik-stojan, powstałymi przez formalne sumowanie charakterystycznych wypełnień, wyróżnionych i sklasyfikowanych w niniejszym rozdziale.

### 3.2. FORMUŁOWANIE UPROSZCZONYCH MODELI POLIHARMONICZNYCH O ZMINIMALIZOWANEJ LICZBIE WSPÓLRZĘDNYCH I WSPÓŁCZYNNIKÓW

W rozdz.1 sformułowano zasady i opisano procedurę formułowania równań różniczkowych 3-fazowej maszyny indukcyjnej o dowolnej liczbie par biegunów  $p$  i dowolnej liczbie żłobków wirnika  $Q_r$ , przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu stojana i wirnika, na podstawie schematu rozkładu maszyny oraz wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan. W podrozdz. 2.1 i 2.2, opierając się na torach generowania prądów i momentów, przeanalizowano rolę i znaczenie różnych grup wyższych harmonicznych przestrzennych w generowaniu pasożytniczych momentów przemiennych (synchronicznych), jak też rozmieszczenie tych harmonicznych w obrębie wypełnienia macierzy wirnik-stojan.

Liczba równań różniczkowych, opisujących stan dynamiczny maszyny oraz liczba współczynników równań, jest ściśle powiązana z liczbą oraz rzędami uwzględnianych w analizie harmonicznych przestrzennych przepływu. Im mniejsza jest liczba równań różniczkowych i mniejsza liczba współczynników w modelu matematycznym, tym oczywiście, krótszy jest czas obliczeń oraz prostsza strategia badania wpływu różnych parametrów konstrukcyjnych maszyny na własności eksploatacyjne maszyny. Nie bez znaczenia jest też mniejsze prawdopodobieństwo popełnienia błędu przy opracowywaniu programu.

W rozdz.1.5 pokazano, w jaki sposób można określić liczbę równań różniczkowych w modelu matematycznym 3-fazowego silnika indukcyjnego o liczbie par biegunów  $p$  i liczbie żłobków wirnika  $Q_r$ , przy założeniu, że w analizie uwzględnia się nieskończenie wiele kolejnych harmonicznych przestrzennych. Aby rozwiązać układ równań różniczkowych, liczba

harmonicznych przestrzennych musi być jednak ograniczona do skończonej wartości  $\nu_m$  - poprzez określenie rzędu najwyższej uwzględnianej harmonicznej przestrzennej. Można też zrezygnować z uwzględniania kolejnych harmonicznych aż do rzędu  $\nu_m$  i dokonać dalszego ograniczenia ich liczby poprzez pozostawienie w modelu tylko najistotniejszych harmonicznych przestrzennych. Prowadzi to, oczywiście, do zmniejszenia liczby współczynników, a częstokroć - i liczby równań, może jednak spowodować znaczący błąd w otrzymanych wynikach w porównaniu z rozwiązaniem uzyskanym przy uwzględnieniu dostatecznie wysokiej liczby kolejnych harmonicznych przestrzennych. Stąd też oba wyżej wymienione problemy: właściwego określenia rzędu najwyższej harmonicznej przestrzennej  $\nu_m$  oraz poprawności kryterium wyboru uwzględnianych w równaniach harmonicznych przestrzennych, należą do zagadnień o zasadniczym znaczeniu w analizie modeli poliharmonicznych i w istotny sposób rzutują na poprawność rozwiązań otrzymywanych przy numerycznej symulacji przebiegów dynamicznych maszyn. Klucz do rozwiązania problemu tkwi w możliwości prawidłowego przewidzenia charakteru oddziaływania i znaczenia poszczególnych składowych zawartych w momencie elektromagnetycznym i poprawnego wyodrębnienia spośród nieskończonej ich liczby - składowych dominujących, a następnie określenia z jakimi współrzędnymi i współczynnikami modelu są one powiązane. To, jaką rolę odgrywają poszczególne harmoniczne przestrzenne w generowaniu momentów pasożytniczych i w jaki sposób wpływają na wartości tych momentów, jak też to - które z momentów mają istotne znaczenie, a które - pomijalnie małe, jest możliwe do przewidzenia na podstawie schematów rozkładu maszyny i torów generowania momentów pasożytniczych oraz wypełnień macierzy indukcyjności - i zostało szczegółowo omówione w podrozdz. 1.4, 1.6, 2.1 i 2.2. Jeszcze dobitniej możliwości te można scharakteryzować w kategoriach matematycznych: *schematy rozkładu maszyny na maszyny elementarne, tory generowania momentów elektromagnetycznych oraz wypełnienia macierzy*



*indukcyjności wirnik-stojan pozwalają na jakościową analizę równań różniczkowych maszyny, a więc - na orzekanie o istotnych cechach rozwiązania równań bez samego ich rozwiązywania. Uzyskane w ten właśnie sposób - poprzez analizę jakościową - informacje można:*

- \* służyć do zoptymalizowania struktury układu równań, a więc sformułowania modelu matematycznego maszyny składającego się z minimalnej liczby równań różniczkowych i minimalnej liczby współczynników, a zachowującego najistotniejsze cechy rozwiązania i charakteryzującego się dostateczną dokładnością z technicznego punktu widzenia,*
- \* wykorzystać do sprawdzenia poprawności modelu i opartego na nim programu komputerowego.*

*Tok postępowania, prowadzący do sformułowania modelu poliharmonicznego maszyny indukcyjnej, zawierającego minimalną liczbę równań i współczynników, a uwzględniającego dominujące momenty pasożytnicze - obejmuje następujące etapy:*

- sporządzenie schematu rozkładu maszyny i określenie wypełnienia macierzy wirnik-stojan. Obliczenia i pomiary wskazują na to, że liczbę harmonicznych przestrzennych można ograniczyć do  $\nu_m = (4 \div 5)Q_r$ , czemu odpowiada (4÷5) liter V na schemacie rozkładu wirnika. Model taki uwzględnia harmoniczne żłobkowe wirnika I, II i III rzędu (harmoniczne o rzędach  $\nu = cQ_r \pm p$ , gdzie  $c=1,2,3$ ),*
- przeprowadzenie redukcji schematu rozkładu maszyny i wypełnienia macierzy wirnik-stojan. Nie zaleca się usuwania uzwojeń elementarnych odpowiadających zerowej wartości współczynnika skosu, zwłaszcza w maszynach o klatce zalewanej, albowiem prądy poprzeczne płynące przez pakiet blach pomiędzy prętami klatki w znacznym stopniu niwelują działanie skosu i powodują, że prądy wirnika dla harmonicznych przestrzennych, dla których współczynnik*

skosu jest teoretycznie równy zero przyjmują w rzeczywistości niewiele mniejsze wartości, niż w klatce z prętami prostymi.

Wypełnienie macierzy wirnik-stojan odpowiadające zredukowanemu schematowi rozkładu wskazuje na współrzędne wirnika o wartościach zerowych (równania wirnika o rozwiązaniach zerowych), a więc na współrzędne, które można z modelu matematycznego maszyny usunąć. Mówi również o tym, czy należy uwzględnić w modelu współrzędną zerową stojana i równanie dla współrzędnej zerowej stojana w przypadku, gdy uzwojenie jest połączone w trójkąt lub w gwiazdę z przewodem zerowym (w przypadku gdy uzwojenie jest połączone w gwiazdę bez przewodu zerowego, współrzędna zerowa stojana jest równa zero - podrozdz.2.3),

- *wyszukanie na schemacie rozkładu maszyny torów dominujących pasożytniczych momentów przemiennych.* Metoda wyszukiwania torów generowania pasożytniczych momentów przemiennych (synchronicznych) i określania rzędów harmonicznych przestrzennych uczestniczących w ich powstawaniu została omówiona w podrozdz. 2.1 i 2.2. Procedura prowadząca do wyselekcjonowania dominujących pasożytniczych momentów przemiennych I rzędu, oparta na znajomości rzędów oraz współczynników uzwojeń harmonicznych przestrzennych uczestniczących w powstawaniu pasożytniczych momentów przemiennych, została przedstawiona w rozdz. 2.1. Pewną pomocną wskazówką może być również wyznaczenie współczynnika (2.8). Dokładniejszym i wiarygodniejszym sposobem - wymagającym jednak przeprowadzenia dość czasochłonnych obliczeń - jest wyznaczenie amplitud pasożytniczych momentów synchronicznych oraz obwiedni pasożytniczych momentów przemiennych w stanie ustalonym na podstawie wzorów zawartych w pracy [19]. Można też wykorzystać gotowe programy komputerowe automatycznie wyszukujące harmoniczne przestrzenne uczestniczące w powstawaniu pasożytniczych momentów przemiennych i obliczające związane

z nimi obwiednie pasożytniczych momentów przemiennych oraz amplitudy momentów synchronicznych. Program komputerowy MOMPAS, wspomagający projektowanie 3-fazowych silników indukcyjnych i umożliwiający wyznaczenie wypadkowej charakterystyki mechanicznej przy uwzględnieniu momentów pasożytniczych, został opisany w pracy [18],

- *wybór rzędów harmonicznych przestrzennych związanych z dominującymi momentami pasożytniczymi* i usunięcie ze schematu rozkładu maszyny uzwojeń elementarnych, a z wypełnienia macierzy wirnik-stojan - rzędów tych wszystkich harmonicznych przestrzennych, które są związane z pomijalnie małymi pasożytniczymi momentami przemiennymi,
- *określenie na podstawie tabl. 1.2 struktury macierzy indukcyjności wirnik-stojan, zapewniającej uwzględnienie wszystkich dominujących momentów pasożytniczych,*
- *sformułowanie na podstawie równań (1.17) oraz relacji (1.18)-(1.29) modelu matematycznego maszyny.*

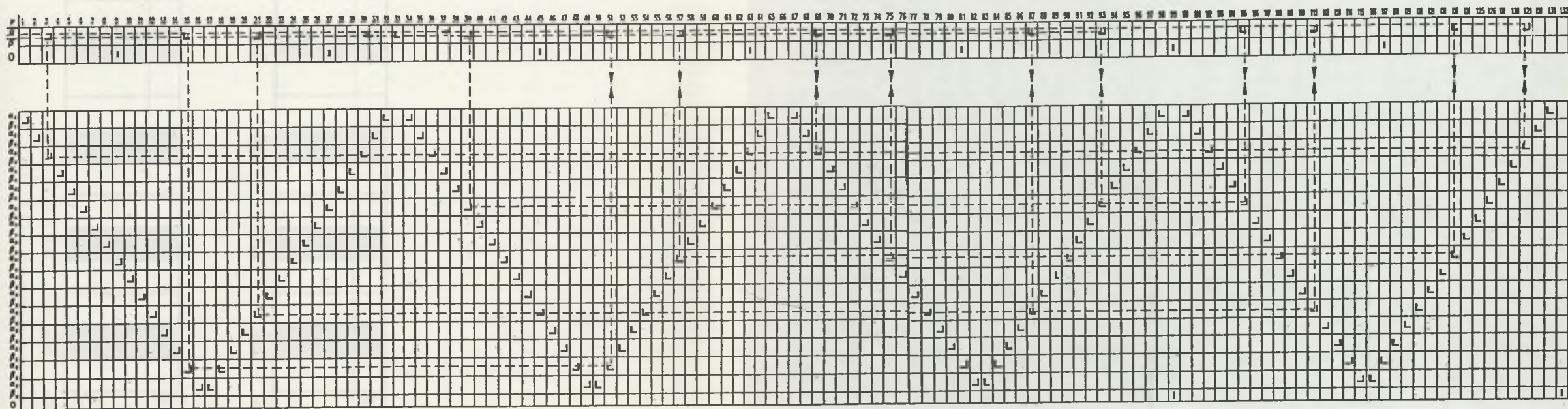
Dla przykładu rozważmy, zgodnie z powyższą procedurą, 3-fazowy silnik klatkowy o danych:

$$P_N = 3 \text{ kW}; \quad U_N = 380 \text{ V}; \quad I_N = 7.2 \text{ A}; \quad p = 3, \quad Q_s = 36, \quad Q_r = 33,$$

Schemat rozkładu maszyny na maszyny elementarne (przy  $v_m = 132$ ) przedstawia rys. 3.1, zaś odpowiadające mu wypełnienie macierzy wirnik-stojan ma postać (3.16).

Dominujące pasożytnicze momenty asynchroniczne są związane z harmonicznymi: 5p ( $v=15$ ), 7p ( $v=21$ ) oraz 13p ( $v=39$ ). Harmoniczna 13p ( $v=39$ ) jest równocześnie harmoniczną żłobkową stojana I rzędu ( $Q_s + p$ ). Harmoniczna 11p ( $v=33$ ) nie wytwarza momentu, ponieważ współczynnik skrótu wirnika klatkowego dla tej harmonicznej jest równy 0 ( $k_{pr33} = 0$ ).

orders of space harmonics (numbers of elementary machines)  
 rzędy harmoniczných przestrzenných (numery maszyn elementarných)



Rys. 3.1. Schemat rozkładu 3-fazowej maszyny klatkowej o danych:  $p=3$ ;  $Q_s = 36$  ;  
 $Q_r = 33$  na maszyny elementarne wraz z torami generowania pasożytniczych  
 momentów synchronicznych

Fig. 3.1. Diagram of decomposition for 3-phase squirrel-cage machine with:  $p=3$ ;  
 $Q_s = 36$  ;  $Q_r = 33$  and paths of generating parasitic synchronous torques

### 3. Komputerowa analiza dynamiki maszyn indukcyjnych

	$\alpha$	$\beta$	0		$\alpha$	$\beta$	0
$\alpha_3$				$\alpha_3$			
$\beta_3$	1p,23p,43p		21p	$\beta_3$	3,69,129		63
$\alpha_6$				$\alpha_6$			
$\beta_6$	13p,31p,35p		9p	$\beta_6$	39,93,105		27
$\alpha_9$				$\alpha_9$			
$\beta_9$	19p,25p,41p		3p	$\beta_9$	57,75,123		9
$\alpha_{12}$				$\alpha_{12}$			
$\beta_{12}$	7p,29p,37p		15p	$\beta_{12}$	21,87,111		45
$\alpha_{15}$				$\alpha_{15}$			
$\beta_{15}$	5p,17p		27p	$\beta_{15}$	15,51		81
0	11p		33p	0	33		99

(3.16)

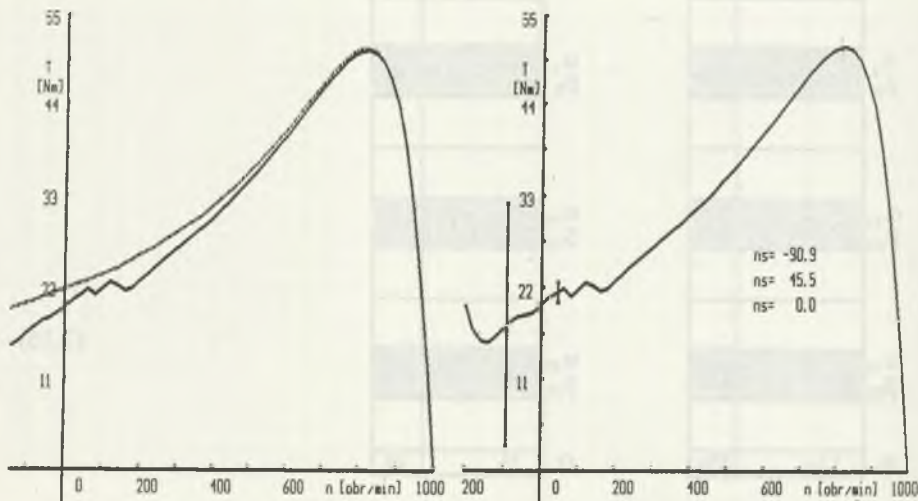
Charakterystykę mechaniczną silnika, uwzględniającą pasożytnicze momenty asynchroniczne na tle głównej charakterystyki mechanicznej odpowiadającej harmonicznej  $v=3$ , przedstawia rys. 3.2.

Tory pasożytniczych momentów synchronicznych (przemienne) uwidocznione na rys. 3.1 wskazują bezpośrednio na rzędy harmoniczných przestrzennych biorących udział w ich wytwarzaniu.

Znając tory generowania momentów oraz rys. 2.18 i rys. 2.20 można określić prędkości synchroniczne oraz okresy charakterystyk kątowych momentów

synchronicznych, związanych z poszczególnymi parami harmonicznymi przestrzennymi. Tok postępowania oraz wzory umożliwiające wyznaczenie amplitud pasożytniczych momentów synchronicznych dla różnych par harmonicznymi przestrzennymi zostały podane i omówione w pracy [19].

Te wszystkie informacje oraz wyniki obliczeń, uzyskane przy założeniu, że wirnik ma żłobki proste (nie ukosowane), zebrano razem w tab. 3.1, a na rys. 3.3 przedstawiono wypadkową charakterystykę mechaniczną silnika uwzględniającą pasożytnicze momenty asynchroniczne i synchroniczne.



Rys. 3.2. Charakterystyka mechaniczna silnika uwzględniająca pasożytnicze momenty asynchroniczne na tle głównej charakterystyki mechanicznej dla  $v=p$  ( $p=3$ ,  $Q_s = 36$ ,  $Q_r = 33$ )

Fig. 3.2. Torque-speed curve with parasitic asynchronous torques against a background of main torque-speed curve for  $v=p$  ( $p=3$ ,  $Q_s = 36$ ,  $Q_r = 33$ )

Rys. 3.3. Wypadkowa charakterystyka mechaniczna uwzględniająca pasożytnicze momenty asynchroniczne i synchroniczne dla silnika o danych:  $p=3$ ,  $Q_s = 36$ ,  $Q_r = 33$

Fig. 3.3. Resultant torque-speed curve with parasitic asynchronous and synchronous torques for motor with the following data:  $p=3$ ,  $Q_s = 36$ ,  $Q_r = 33$

Tablica 3.1

Pasożytnicze momenty synchroniczne związane z różnymi parami harmonicznymi przestrzennymi  $(\nu, \rho)$  w maszynie o danych:  $p=3, Q_s = 36, Q_r = 33, b_{sq} = 0$

Prędkość synchroniczna $\Omega_{ms}$	Okres charakterystyki kątowej $T_s$	Rzędy harmonicznymi $(\nu, \rho)$	Amplituda momentu synchronicznego $T_{e(\nu, \rho)s}$
$-\frac{2}{66}\omega_0$	$\frac{2\pi}{66} = \frac{\alpha_r}{2}$	(3,69)	23.06
		(15,51)	2.73
		(21,87)	0.288
		(39,105)	0.207
		(57,129)	0.0173
$\frac{2}{132}\omega_0$	$\frac{2\pi}{132} = \frac{\alpha_r}{4}$	(3,129)	1.14
		(21,111)	0.67
		(39,93)	0.176
		(57,75)	0.044
0	$\frac{2\pi}{198} = \frac{\alpha_r}{6}$	(69,129)	0.0118
		(75,123)	0.0086
		(87,111)	0.0043
		(93,105)	0.00086

Z tabl.3.1 i rys.3.3 wynika, że największe znaczenie mają harmoniczne o rzędach: 3,15,21,51,69,87,111 i 129. Wybierając więc przykładowo do dalszych rozważań tylko dominujące harmoniczne przestrzenne, można ograniczyć liczbę współrzędnych wirnika do sześciu:  $\alpha_3\beta_3, \alpha_{12}\beta_{12}, \alpha_{15}\beta_{15}$  ( $LWR=6$ ). Odnośnie do zależności momentów pasożytniczych od układu połączeń uzwojeń stojana, która jest z technicznego punktu widzenia warunkowana spełnieniem nierówności:





Takiemu wypełnieniu odpowiada model poliharmoniczny uwzględniający 7 pasożytniczych momentów synchronicznych związanych z harmonicznymi: (3,69), (3,129), (69,129), (21,87), (21,111), (87,111), (15,51) oraz 8 pasożytniczych momentów asynchronicznych, z których znaczące są 2, związane z harmonicznymi 15 i 21. Model ten przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_s & \\ & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\sigma s} & \\ & L_{\sigma s} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \left[ \begin{array}{cc} \sum_{v=3,15,21,33,39,51,\dots} L_{sv} & \\ & \sum_{v=3,15,21,33,39,51,\dots} L_{sv} \end{array} \right] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix} + \\
 &+ \frac{d}{dt} \left\{ \left( L_{sr3} \begin{bmatrix} \cos 3\vartheta & -\sin 3\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 3\vartheta & \cos 3\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \right. \\
 &+ L_{sr15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 15\vartheta & -\sin 15\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 15\vartheta & -\cos 15\vartheta \end{bmatrix} + \\
 &+ L_{sr21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 21\vartheta & \sin 21\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 21\vartheta & -\cos 21\vartheta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ L_{sr51} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 51\vartheta & -\sin 51\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 51\vartheta & \cos 51\vartheta \end{bmatrix} + \\
 &+ L_{sr69} \begin{bmatrix} \cos 69\vartheta & -\sin 69\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 69\vartheta & -\cos 69\vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ L_{sr87} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 87\vartheta & \sin 87\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 87\vartheta & \cos 87\vartheta & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 &+ L_{sr111} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 111\vartheta & -\sin 111\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 111\vartheta & \cos 111\vartheta & 0 & 0 \end{bmatrix} +
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 & +L_{sr129} \begin{bmatrix} \cos 129^\circ & \sin 129^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 129^\circ & -\cos 129^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra3} \\ i_{r\beta3} \\ i_{ra12} \\ i_{r\beta12} \\ i_{ra15} \\ i_{r\beta15} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_0 - 2R_{pr} \cos 3\alpha & & & & & \\ & R_0 - 2R_{pr} \cos 3\alpha & & & & \\ & & R_0 - 2R_{pr} \cos 12\alpha & & & \\ & & & R_0 - 2R_{pr} \cos 12\alpha & & \\ & & & & R_0 - 2R_{pr} \cos 15\alpha & \\ & & & & & R_0 - 2R_{pr} \cos 15\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ra3} \\ i_{r\beta3} \\ i_{ra12} \\ i_{r\beta12} \\ i_{ra15} \\ i_{r\beta15} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 3\alpha & & & & & \\ & L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 3\alpha & & & & \\ & & L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 12\alpha & & & \\ & & & L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 12\alpha & & \\ & & & & L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 15\alpha & \\ & & & & & L_{\sigma 0} - 2L_{pr} \cos 15\alpha \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ra3} \\ i_{r\beta3} \\ i_{ra12} \\ i_{r\beta12} \\ i_{ra15} \\ i_{r\beta15} \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{d}{dt} \left( L_{sr3} \begin{bmatrix} \cos 39^\circ & \sin 39^\circ \\ -\sin 39^\circ & \cos 39^\circ \end{bmatrix} + L_{sr15} \begin{bmatrix} \cos 15^\circ & -\sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & -\cos 15^\circ \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_{ra3} \\ i_{r\beta3} \\ i_{ra12} \\ i_{r\beta12} \\ i_{ra15} \\ i_{r\beta15} \end{bmatrix} + \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

3. Komputerowa analiza dynamiki maszyn indukcyjnych

$$+L_{sr21} \begin{bmatrix} \cos 219 & \sin 219 \\ \sin 219 & -\cos 219 \end{bmatrix} + L_{sr51} \begin{bmatrix} \cos 519 & -\sin 519 \\ \sin 519 & \cos 519 \end{bmatrix} +$$

$$+L_{sr69} \begin{bmatrix} \cos 699 & -\sin 699 \\ \sin 699 & -\cos 699 \end{bmatrix} + L_{sr87} \begin{bmatrix} \cos 879 & -\sin 879 \\ \sin 879 & \cos 879 \end{bmatrix} +$$

$$+L_{sr111} \begin{bmatrix} \cos 1119 & \sin 1119 \\ -\sin 1119 & \cos 1119 \end{bmatrix} + L_{sr129} \begin{bmatrix} \cos 1299 & \sin 1299 \\ \sin 1299 & -\cos 1299 \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} i_{sa} \\ i_{s\beta} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \sum_{v=3,30,63,-} L_{rv} & & & & & \\ & \sum_{v=3,30,63,-} L_{rv} & & & & \\ & & \sum_{v=12,21,45,51,-} L_{rv} & & & \\ & & & \sum_{v=12,21,45,51,-} L_{rv} & & \\ & & & & \sum_{v=15,18,48,51,-} L_{rv} & \\ & & & & & \sum_{v=15,18,48,51,-} L_{rv} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ra3} \\ i_{r\beta3} \\ i_{ra12} \\ i_{r\beta12} \\ i_{ra15} \\ i_{r\beta15} \end{bmatrix} +$$

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = T_e - T_m \quad (3.20)$$

$$T_e = \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{s\beta} \end{bmatrix}^T \frac{\partial}{\partial \theta} \left( L_{sr3} \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \quad (3.21)$$

$$+ L_{sr15} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 15\theta & -\sin 15\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 15\theta & -\cos 15\theta \end{bmatrix} +$$

$$+ L_{sr21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 21\theta & \sin 21\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 21\theta & -\cos 21\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ L_{sr51} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cos 51\theta & -\sin 51\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin 51\theta & \cos 51\theta \end{bmatrix} +$$

$$+ L_{sr69} \begin{bmatrix} \cos 69\theta & -\sin 69\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin 69\theta & -\cos 69\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ L_{sr87} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 87\theta & \sin 87\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 87\theta & \cos 87\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ L_{sr111} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos 111\theta & -\sin 111\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 111\theta & \cos 111\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ L_{sr129} \begin{bmatrix} \cos 129\theta & \sin 129\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 129\theta & -\cos 129\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} i_{ra3} \\ i_{r\beta3} \\ i_{ra12} \\ i_{r\beta12} \\ i_{ra15} \\ i_{r\beta15} \end{matrix} \right)$$

$$i_{s0} = 0$$

$$\begin{aligned} i_{ra1} = i_{r\beta1} = i_{ra2} = i_{r\beta2} = i_{ra4} = i_{r\beta4} = i_{ra5} = i_{r\beta5} = i_{ra6} = i_{r\beta6} = i_{ra7} = i_{r\beta7} = \\ = i_{ra8} = i_{r\beta8} = i_{ra9} = i_{r\beta9} = i_{ra10} = i_{r\beta10} = i_{ra11} = i_{r\beta11} = i_{ra13} = i_{r\beta13} = i_{ra14} = i_{r\beta14} = \\ = i_{ra16} = i_{r\beta16} = i_{r0} = 0 \end{aligned}$$

Wpływ pominiętych harmonicznym przestrzennym na zjawiska związane z harmonicznymi przestrzennymi uwzględnianymi w równaniach ujęty jest w indukcyjnościach rozproszenia różnicowego stojana i wirnika, mających postać sum  $\sum_{\nu} L_{s\nu}$  i  $\sum_{\nu} L_{r\nu}$  (rzędy harmonicznym zawarte w tych sumach są różne dla różnych par współrzędnych i mogą być wyznaczone na podstawie schematów rozkładu maszyny na maszyny elementarne [10,19]).

### 3.3. OGÓLNA STRUKTURA UKŁADU RÓWNAŃ

#### RÓŻNICZKOWYCH DO OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Układ równań różniczkowych maszyny o ogólnej postaci (1.17), (1.3) (w szczególnym - rozpatrywanym w poprzednim podrozdziale - przypadku ma on postać układu (3.18)-(3.21)) można zapisać w zwartej postaci hipermacierzowej w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} [u_s^{\alpha\beta}] \\ [0] \\ 0 \\ \frac{T_m}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_s] & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [R_r^{\alpha\beta}] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & 0 & 1 \\ [0] & [0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_s^{\alpha\beta}] \\ [i_r^{\alpha\beta}] \\ \mathcal{G} \\ \Omega_m \end{bmatrix} + \quad (3.22)$$

$$+\frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} [M_{ss}^{\alpha\beta}] + [L_{os}] & [M_{sr}^{\alpha\beta}] & 0 & 0 \\ [M_{rs}^{\alpha\beta}] & [M_{rr}^{\alpha\beta}] + [L_{\sigma r}^{\alpha\beta}] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & -1 & 0 \\ [0] & [0] & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_s^{\alpha\beta}] \\ [i_r^{\alpha\beta}] \\ \mathcal{J} \\ \Omega_m \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ 0 \\ \frac{T_e}{J} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$T_e$  - moment elektromagnetyczny opisany relacją (1.29) (w szczególnym - rozpatrywanym w poprzednim podrozdziale przypadku - jest to relacja (3.21)).

Wymiary poszczególnych macierzy kolumnowych, macierzy prostokątnych oraz macierzy kwadratowych są uzależnione od liczby współrzędnych wirnika oraz od tego, czy w modelu uwzględniamy współrzędną zerową stojana.

Przyjmując oznaczenia:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{ss}^{\alpha\beta}] + [L_{os}] & [M_{sr}^{\alpha\beta}] & 0 & 0 \\ [M_{rs}^{\alpha\beta}] & [M_{rr}^{\alpha\beta}] + [L_{\sigma r}^{\alpha\beta}] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & -1 & 0 \\ [0] & [0] & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_s] & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [R_r^{\alpha\beta}] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & 0 & 1 \\ [0] & [0] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} [u_s^{\alpha\beta}] \\ [0] \\ 0 \\ \frac{T_m}{J} \end{bmatrix} = \left( [R] + \frac{d}{dt}[M] \right) \begin{bmatrix} [i_s^{\alpha\beta}] \\ [i_r^{\alpha\beta}] \\ \vartheta \\ \Omega_m \end{bmatrix} + [M] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [i_s^{\alpha\beta}] \\ [i_r^{\alpha\beta}] \\ \vartheta \\ \Omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \\ 0 \\ \frac{T_e}{J} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Jest to równanie macierzowe należące do klasy równań o ogólnej postaci:

$$[w] = [C][x] + [M] \frac{d}{dt}[x] + [F] \quad (3.26)$$

gdzie:

$[w]$  - wektor wymuszeń,

$[x]$  - wektor zmiennych,

$[C]$ ,  $[M]$  - macierze funkcyjne parametrów,

$[F]$  - wektor zawierający element nieliniowy,

które można sprowadzić do następującej postaci kanonicznej (normalnej):

$$\frac{d}{dt}[x] = [B] - [A][x] \quad (3.27)$$

gdzie:

$$[B] = [M]^{-1}([w] - [F])$$

$$[A] = [M]^{-1}[C]$$

Równanie macierzowe (3.27) można rozwiązać numerycznie, korzystając ze standardowych metod numerycznego całkowania równań (np. metody Runge-Kutty, Fehlberga itd.).

Wektor kolumnowy  $[x]$  zawiera maksymalnie  $(Q_r + 5)$  współrzędnych, a mianowicie:  $Q_r$  współrzędnych wirnika, 3 współrzędne stojana i 2 współrzędne stanu mechanicznego (kąt obrotu wirnika  $\vartheta$  i prędkość kątową  $\Omega_m$ , zaś minimalnie - 6 współrzędnych: 2 współrzędne wirnika, 2 współrzędne stojana i 2 współrzędne stanu mechanicznego.

Macierze parametrów  $[A]$ ,  $[B]$  są macierzami kwadratowymi o wymiarach zawartych odpowiednio w przedziale:  $(Q_r + 5) \times (Q_r + 5) + 6 \times 6$ . Liczba współczynników  $L_{rs\nu}$  (zachodzi:  $L_{rs\nu} = L_{sr\nu}$ ) jest równa liczbie uwzględnianych harmonicznych przestrzennych.

W przypadku modeli matematycznych 2- lub nawet 3-harmonicznych jest praktycznie możliwe "ręczne" odwrócenie macierzy  $[M]$  i uzyskanie analitycznej postaci macierzy  $[M]^{-1}$ . Obliczenia związane z wyznaczeniem analitycznej postaci  $[M]^{-1}$  są jednak żmudne i pracochłonne, chociaż realizacja obliczeń numerycznych - znacznie szybsza. W przypadku modeli z większą liczbą harmonicznych lub też wtenczas, gdy chcemy uniknąć ręcznych obliczeń związanych z odwracaniem macierzy  $[M]$ , macierz  $[M]$  odwraca się numerycznie w każdym kroku całkowania. Operacja ta wydłuża czas obliczeń, jednak sam program komputerowy jest krótszy i prostszy.

Stosowane metody numerycznego całkowania mogą być metodami ze stałym lub zmiennym krokiem całkowania. Długość kroków całkowania w istotny sposób rzutuje na czas obliczeń. Krok całkowania musi być znacznie krótszy, niż w przypadku analizy numerycznej modeli monoharmonicznych. Wynika to z obecności w rozwiązaniach składowych przemiennych momentu i prądu o pulsacjach zależnych od prędkości wirowania maszyny. Przy prędkościach zbliżonych do prędkości znamionowej silnika, pulsacje składowych przemiennych momentu osiągają wartości:

$$\omega_p = cQ_r(\Omega_{mN} - \Omega_{ms}) \approx cQ_r \Omega_{mN} \approx cQ_r \frac{\omega_0}{p}, \quad \text{gdzie: } c=1,2,3, \quad (3.28)$$



a więc są to wartości przeciętnie kilkadziesiąt, a nawet kilkaset razy większe od pulsacji sieci zasilającej. Stąd też - aby zapewnić poprawność rozwiązania - długość kroku całkowania musi być w otoczeniu takiej prędkości kilkaset (a nawet kilka tysięcy) razy mniejsza od okresu napięcia zasilającego. W otoczeniu prędkości synchronicznej momentów pasożytniczych krok ten może być odpowiednio zmniejszony.

Podsumowując, *przy analizie modeli monoharmonicznych długość kroku całkowania wynika przede wszystkim z pulsacji napięcia zasilającego silnik, natomiast przy analizie modeli poliharmonicznych - jest określona przez pulsację pasożytniczych momentów przemiennych.*

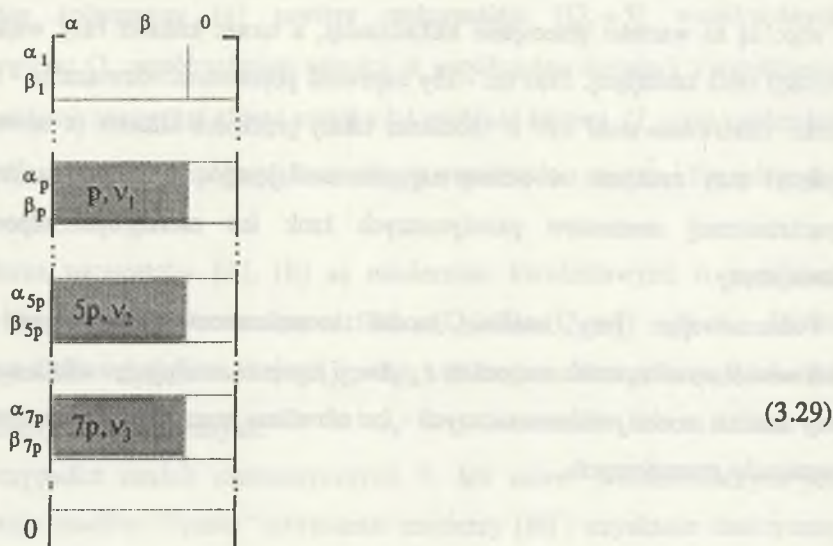
### 3.4. BADANIE FORMALNEJ POPRAWNOŚCI MODELU MATEMATYCZNEGO MASZYNY INDUKCYJNEJ ORAZ PROGRAMU KOMPUTEROWEGO

Poprawność opracowanego modelu poliharmonicznego oraz programu komputerowego można sprawdzić przeprowadzając obliczenia dla takich wybranych stanów dynamicznych, dla których jest możliwe przewidzenie i określenie - na podstawie schematów rozkładu maszyny i torów generowania momentów pasożytniczych - charakteru oraz podstawowych własności poszczególnych przebiegów składowych zawartych w rozwiązaniu, jak też - i samych przebiegów wypadkowych.

Rozważmy na wstępie maszynę o wypełnieniu macierzy indukcyjności wirnik-stojan (3.29).

Zgodnie ze wzorem (1.29), moment elektromagnetyczny maszyny indukcyjnej można przedstawić w postaci sumy  $\sum T_{ev}$ . Dla maszyny o wypełnieniu ograniczonym do postaci (3.29) zachodzi:

$$T_e = T_{ep} + T_{e5p} + T_{e7p} + T_{ev1} + T_{ev2} + T_{ev3}, \quad (3.30)$$



(3.29)

a więc wypadkowy moment elektromagnetyczny jest równy sumie 6 momentów elektromagnetycznych wytworzonych przez 6 maszyn elementarnych o numerach porządkowych:  $p, 5p, 7p, v_1, v_2, v_3$ . Przy ograniczeniu analizy do momentów pasożytniczych I rzędu, każdy z wymienionych wyżej momentów elektromagnetycznych można z kolei rozłożyć na 2 momenty składowe: pasożytniczy moment przemienny (synchroniczny) oraz pasożytniczy moment asynchroniczny, co wynika wprost z rys. 3.4, na którym zestawiono schematycznie wszystkie możliwe tory generowania pasożytniczych momentów asynchronicznych i synchronicznych I rzędu.

Zgodnie z rys. 3.4, mamy:

$$T_{ep} = T_{e(p)} + T''_{e(p,v_1)} \quad (3.31)$$

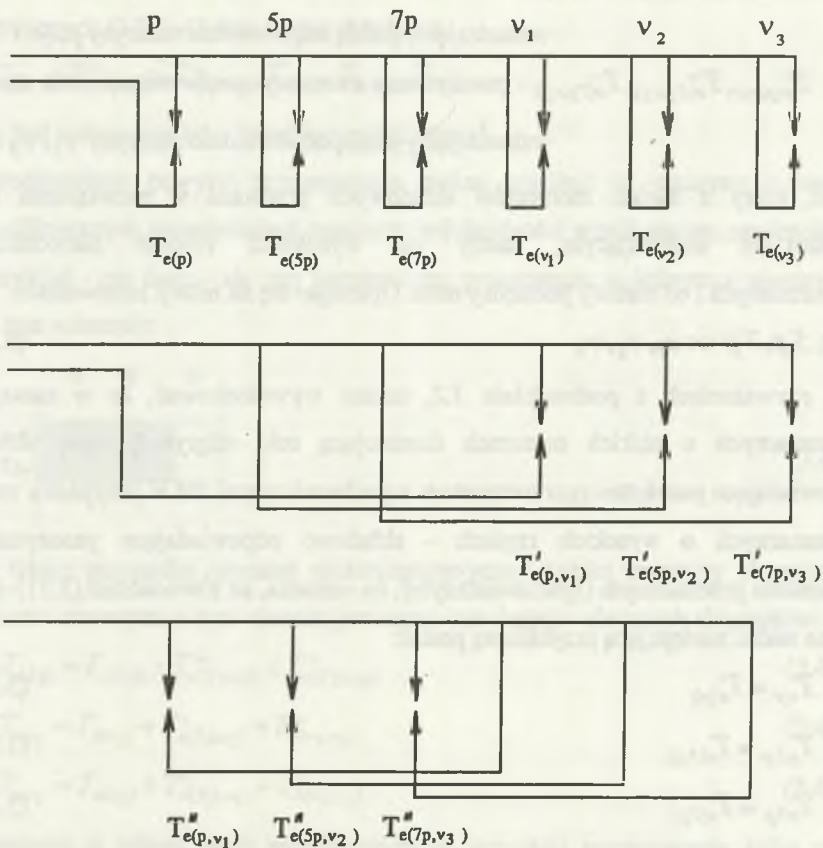
$$T_{e5p} = T_{e(5p)} + T''_{e(5p,v_2)} \quad (3.32)$$

$$T_{e7p} = T_{e(7p)} + T''_{e(7p,v_3)} \quad (3.33)$$

$$T_{ev_1} = T_{e(v_1)} + T'_{e(p,v_1)} \quad (3.34)$$

$$T_{ev_2} = T_{e(v_2)} + T'_{e(5p,v_2)} \quad (3.35)$$

rzędy harmonicznych przestrzeni (numery maszyn elementarnych)



Rys. 3.4. Schematyczne zestawienie torów generowania pasożytniczych momentów I rzędu

Fig. 3.4. Schematic arrangement of paths for generating parasitic torques of I order

$$T_{ev_3} = T_{e(v_3)} + T'_{e(7p,v_3)} \quad (3.36)$$

gdzie:

$T_{e(p)}$  - asynchroniczny moment główny,

$T_{e(5p)}$ ,  $T_{e(7p)}$ ,  $T_{e(v_1)}$ ,  $T_{e(v_2)}$ ,  $T_{e(v_3)}$  - pasożytnicze momenty asynchroniczne,

$T'_{e(p,v_1)}, T'_{e(5p,v_2)}, T'_{e(7p,v_3)}$  - pasożytnicze momenty przemienne (rolę maszyny  
wzbudzającej pełnią odpowiednio maszyny  $p, 5p$ , i  $7p$ ),

$T''_{e(p,v_1)}, T''_{e(5p,v_2)}, T''_{e(7p,v_3)}$  - pasożytnicze momenty synchroniczne (rolę maszyny  
wzbudzającej pełnią odpowiednio maszyny  $v_1, v_2$  i  $v_3$ ),

To, który z dwóch momentów składowych przeważa w rozwiązaniu i jest składnikiem dominującym, zależy od wysokości rzędów harmonicznych przestrzennych i od różnicy pomiędzy nimi. Opierając się na relacji nierówności:

$$p, 5p, 7p \ll v_1, v_2, v_3 \quad (3.37)$$

oraz rozważaniach z podrozdziału 3.2, można wywnioskować, że w maszynach elementarnych o niskich numerach dominującą rolę odgrywać będą składowe odpowiadające pasożytniczym momentom asynchronicznym, zaś w przypadku maszyn elementarnych o wysokich rzędach - składowe odpowiadające pasożytniczym momentom przemienным (synchronicznym), co oznacza, że równościom (3.31)+(3.36) można nadać następującą przybliżoną postać:

$$T_{ep} \approx T_{e(p)} \quad (3.38)$$

$$T_{e5p} \approx T_{e(5p)} \quad (3.39)$$

$$T_{e7p} \approx T_{e(7p)} \quad (3.40)$$

$$T_{ev_1} \approx T'_{e(p,v_1)} \quad (3.41)$$

$$T_{ev_2} \approx T'_{e(p,v_2)} \quad (3.42)$$

$$T_{ev_3} \approx T'_{e(p,v_3)} \quad (3.43)$$

Relacje (3.48), (3.39) i (3.40) są tym dokładniej spełnione, im mniejszy jest numer maszyny elementarnej, a większy numer współdziałającej z nią maszyny wzbudzającej.

Relacje (3.41), (3.42) i (3.43) są tym prawdziwsze - im większy jest numer maszyny elementarnej.

W przypadku bardzo wysokiej wartości rzędu otrzymujemy praktycznie "czysty" moment przemienny (synchroniczny).

W kontekście powyższych rozważań, składowe momentów pominięte w relacjach przybliżonych (3.38)-(3.43), a więc składowe:

$$T''_{e(p,v_1)}, T''_{e(s p, v_2)}, T''_{e(s p, v_3)}, T_{e(v_1)}, T_{e(v_2)}, T_{e(v_3)}$$

mogą być traktowane jako "przebiegi zakłócające".

Przedstawione powyżej rozumowanie można uogólnić na maszyny o bardziej skomplikowanych wypełnieniach macierzy indukcyjności wirnik-stojan, zawierających na przykład - nie dwie - ale trzy harmoniczne przestrzenne w jednym z wierszy (np. w 5p-tym wierszu):

$$\begin{array}{ccc}
 & \alpha & \beta & 0 \\
 \vdots & & & \vdots \\
 \alpha_{5p} & \text{shaded box} & & \\
 \beta_{5p} & \text{shaded box} & & \\
 \vdots & & & \vdots
 \end{array}
 \quad (3.44)$$

W takim przypadku moment elektromagnetyczny każdej maszyny elementarnej o numerze zawartym w tym wierszu jest sumą - nie dwóch - ale trzech składników:

$$T_{e5p} = T_{e(s p)} + T''_{e(s p, v_1)} + T''_{e(s p, v_2)} \quad (3.45)$$

$$T_{ev_1} = T_{e(v_1)} + T'_{e(s p, v_1)} + T''_{e(v_1, v_2)} \quad (3.46)$$

$$T_{ev_2} = T_{e(v_2)} + T'_{e(s p, v_2)} + T'_{e(v_1, v_2)} \quad (3.47)$$

Nie zmienia to jednak istoty przedstawionego wcześniej rozumowania, które znów pozwala - znając wartości rzędów harmonicznym przestrzennych i wzajemne relacje między nimi - wyodrębnić po jednym dominującym składniku momentu w każdej z trzech sum (3.45), (3.46) i (3.47):

$$T_{e5p} \approx T_{e(s p)} \quad (3.48)$$

$$T_{ev_1} \approx T'_{e(s p, v_1)} \quad (3.49)$$

$$T_{ev_2} \approx T'_{e(s p, v_2)} \quad (3.50)$$

Jeśli liczba harmonicznym przestrzennych w którymś z wierszy wypełnienia wynosi  $k$ , momenty elektromagnetyczne maszyn elementarnych związanych z tym

wierszem dadzą się przedstawić w postaci sumy  $k$  elementów, ale również i w tym przypadku analiza jakościowa schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne umożliwia wyróżnienie składnika dominującego.

Ta możliwość traktowania momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych jako różnych składowych momentów asynchronicznych lub synchronicznych związanych ze ściśle określonymi harmonicznymi przestrzennymi, ma istotne znaczenie dla analizy modeli poliharmonicznych, ponieważ podstawowe własności tych składowych mogą być łatwo określone w graficzny sposób na podstawie schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne, a następnie - w celu stwierdzenia poprawności modelu poliharmonicznego i programu - zestawione i porównane z własnościami wynikającymi z obliczeń symulacyjnych na komputerze.

W ustalonym sinusoidalnym stanie symetrycznym, charakterystyki mechaniczne momentów asynchronicznych związanych z harmonicznymi przestrzennymi  $\nu=p, 5p, 7p, 11p, \dots$  mają postać, jak na rys. 3.5 i przyjmują wartości zero dla prędkości:

$\frac{\omega_e}{p}, \frac{-\omega_e}{5p}, \frac{\omega_e}{7p}, \frac{-\omega_e}{11p}, \dots$  Wzory pozwalające obliczyć przebiegi charakterystyk

mechanicznych poszczególnych pasożytniczych momentów asynchronicznych podane są między innymi w pracy [19, str. 132, tab. 3.3].

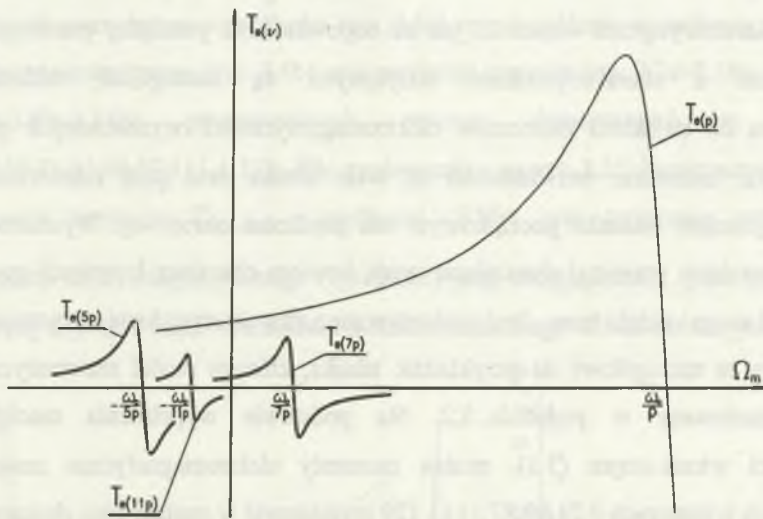
Pasożytnicze momenty przemienne są w ustalonym stanie sinusoidalnym scharakteryzowane za pomocą obwiedni amplitud [19, rozdz. 2.5 i 3.6]. Miejsce zerowe obwiedni pasożytniczego momentu przemiennego  $T'_{e(\nu, \rho)}$  odpowiada prędkości, przy której prąd w  $\nu$ -tej maszynie elementarnej (spełniającej rolę maszyny wzbudzającej) jest równy zero, a więc prędkości:

$$\Omega_m = \pm \frac{\omega_e}{\nu}, \quad (3.51)$$

zaś miejsce zerowe obwiedni momentu  $T''_{e(\nu, \rho)}$  - prędkości, przy której prąd w  $\rho$ -tej maszynie elementarnej (spełniającej rolę maszyny wzbudzającej) jest równy zero, czyli prędkości:

$$\Omega_m = \pm \frac{\omega_0}{p} \quad (3.52)$$

Ponadto w obu przypadkach wartości momentów przemiennych są zbliżone do zera przy prędkości synchronicznej  $\frac{\omega_0}{p}$ , przy której prąd stojana (równy prądowi "twornika" odpowiednio  $p$ -tej i  $v$ -tej elementarnej maszyny synchronicznej) osiąga wartość minimalną.



Rys. 3.5. Charakterystyki mechaniczne momentów asynchronicznych  
 Fig. 3.5. Torque-speed curves for asynchronous torques

Pulsacje pasożytniczych momentów przemiennych są opisane wzorem (2.17), przy czym wartości prędkości synchronicznej  $\Omega_{ms}$ , wynikają ze schematu rozkładu na maszyny elementarne (rys. 3.1) oraz z tabeli z rys. 2.18. Wzory pozwalające na dokładne obliczenie kształtu charakterystyk obwiedni poszczególnych pasożytniczych momentów przemiennych są zamieszczone w pracy [19, 83+84, tab. 3.1].

Wróćmy teraz do modelu dynamicznego indukcyjnej maszyny klatkowej. Jednym z możliwych sposobów stwierdzenia formalnej poprawności układu równań

różniczkowych, opisujących stan dynamiczny maszyny oraz opartego na nim programu komputerowego jest porównanie wyników otrzymanych na drodze komputerowej symulacji rozruchu silnika z charakterystykami statycznymi i stwierdzenie występowania na uzyskanych przebiegach czasowych momentów elektromagnetycznych oraz na trajektoriach momentów elektromagnetycznych w funkcji prędkości obrotowej - tych wszystkich charakterystycznych cech, które dadzą się wywieść ze schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne. Te wszystkie charakterystyczne własności, jak też odpowiedniość pomiędzy przebiegami dynamicznymi a charakterystykami statycznymi są szczególnie widoczne w odniesieniu do trajektorii momentów elektromagnetycznych wyznaczonych przy powiększonym momencie bezwładności na wale silnika oraz przy odpowiednio dobranym ujemnym warunku początkowym dla prędkości obrotowej. Wyznaczone w takich warunkach przebiegi dynamiczne mają bowiem charakter krzywych quasi-statycznych i mogą - dzięki temu - być porównywane z charakterystykami statycznymi.

Rozważmy to szczegółowo na przykładzie silnika, którego model matematyczny został sformułowany w podrozdz. 3.2. Na podstawie wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan (3.1), można momenty elektromagnetyczne maszyn elementarnych o numerach 3,21,69,87,111 i 129 przedstawić w postaci sum złożonych z trzech składników, a momenty maszyn o numerach 15 i 51 w postaci sum złożonych z dwóch składników, a następnie - bazując na wcześniejszych rozważaniach oraz schemacie rozkładu maszyny z rys. 3.1 i tab. 3.1, wyodrębnić wśród nich składniki dominujące:

$$T_{e3} = T_{e(3)} + T_{e(3,69)}'' + T_{e(3,129)}'' \approx T_{e(3)} \quad (3.53)$$

$$T_{e15} = T_{e(15)} + T_{e(15,51)}'' \approx T_{e(15)} \quad (3.54)$$

$$T_{e21} = T_{e(21)} + T_{e(21,87)}'' + T_{e(21,111)}'' \approx T_{e(21)} \quad (3.55)$$

$$T_{e51} = T_{e(51)} + T_{e(15,51)}'' \approx T_{e(15,51)}' \quad (3.56)$$

$$T_{e69} = T_{e(69)} + T_{e(3,69)}' + T_{e(3,129)}'' \approx T_{e(3,69)}' \quad (3.57)$$

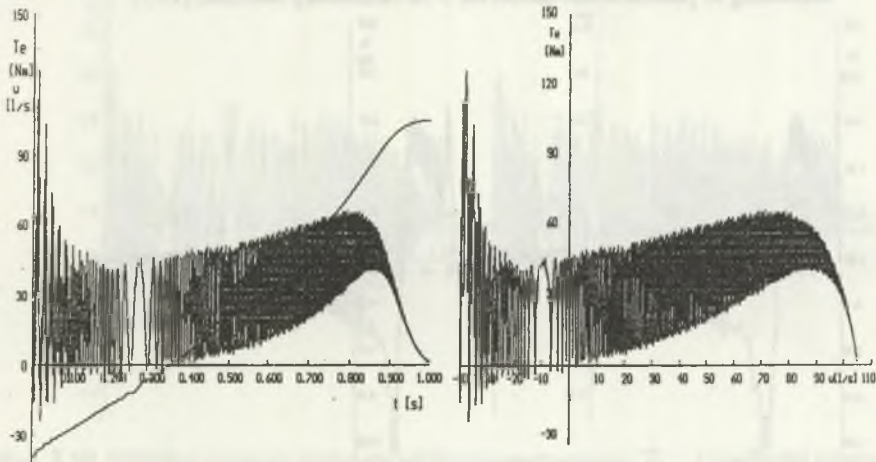


$$T_{e87} = T_{e(87)} + T'_{e(21,87)} + T_{e(87,111)} \approx T'_{e(21,87)} \quad (3.58)$$

$$T_{e111} = T_{e(111)} + T'_{e(21,111)} + T'_{e(87,111)} \approx T'_{e(21,111)} \quad (3.59)$$

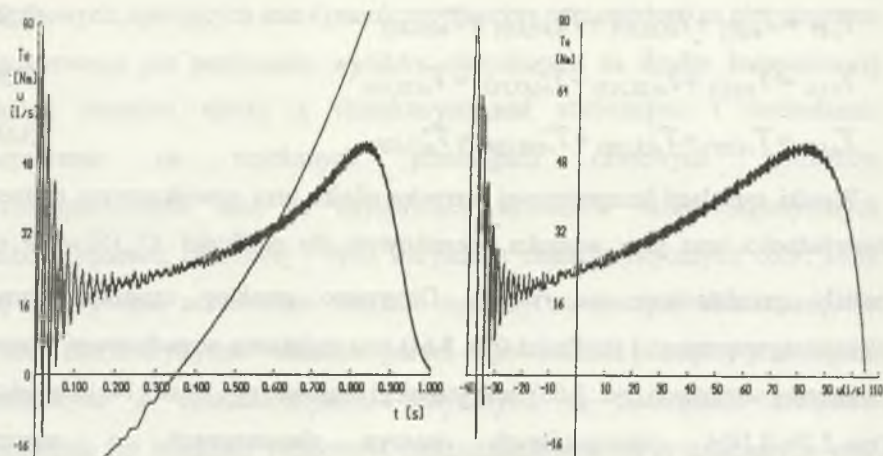
$$T_{e129} = T_{e(129)} + T'_{e(3,129)} + T'_{e(69,129)} \approx T'_{e(3,129)} \quad (3.60)$$

Wyniki symulacji komputerowej rozruchu silnika przy powiększonym momencie bezwładności oraz przy warunku początkowym dla prędkości  $\Omega_m(0) = -40$  rad/s zostały przedstawione na rys.3.6. Otrzymano przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prędkości (rys. 3.6a) oraz trajektorię wypadkowego momentu elektromagnetycznego (rys. 3.6b) oraz przebiegi czasowe (rys. 3.7a+3.14a) i trajektorie (rys. 3.7b+3.14b) poszczególnych maszyn elementarnych o numerach  $v=3,15,21,51,69,87,111$  i 129. Dla porównania - na rys. 3.15 zamieszczono przebieg czasowy momentu  $T_{e(mono)}$  i prędkości (3.15a) oraz trajektorię wypadkowego momentu elektromagnetycznego (rys. 3.15b) przy uwzględnieniu tylko harmonicznej głównej  $v=p=3$ , a więc - dla modelu monoharmonicznego silnika indukcyjnego.



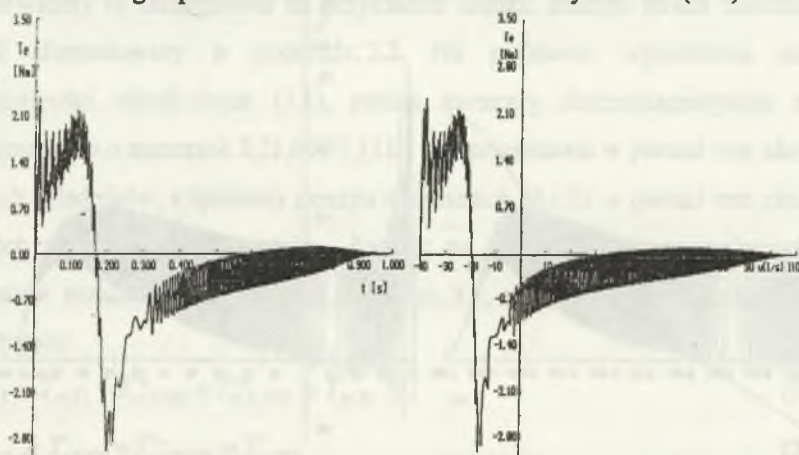
Rys. 3.6. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego:  $v=3,15,21,51,69,87,111,129$

Fig. 3.6. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model:  $v=3,15,21,51,69,87,111,129$



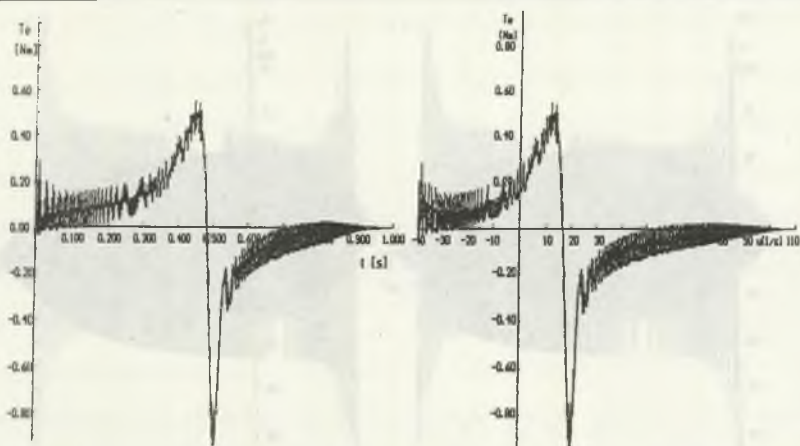
Rys. 3.7. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e3}$  i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e3}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 3 maszyny elementarnej ( $v=3$ )

Fig. 3.7. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 3-rd elementary machine ( $v=3$ )



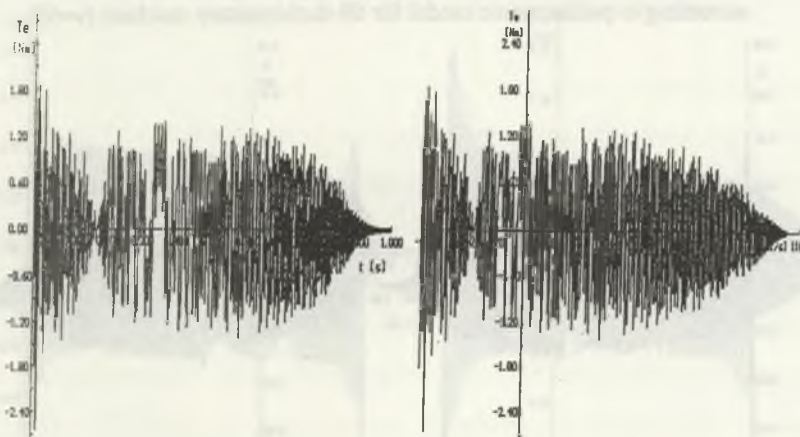
Rys. 3.8. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e15}$  i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e15}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 15 maszyny elementarnej ( $v=15$ )

Fig. 3.8. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 15-th elementary machine ( $v=15$ )



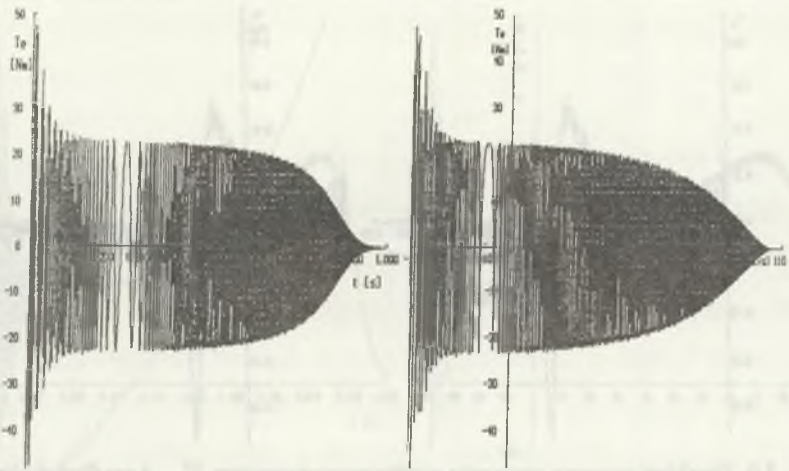
Rys. 3.9. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e21}$  i prędkości obrotowej (a) trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e21}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 21 maszyny elementarnej ( $v=21$ )

Fig. 3.9. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 21-th elementary machine ( $v=21$ ).



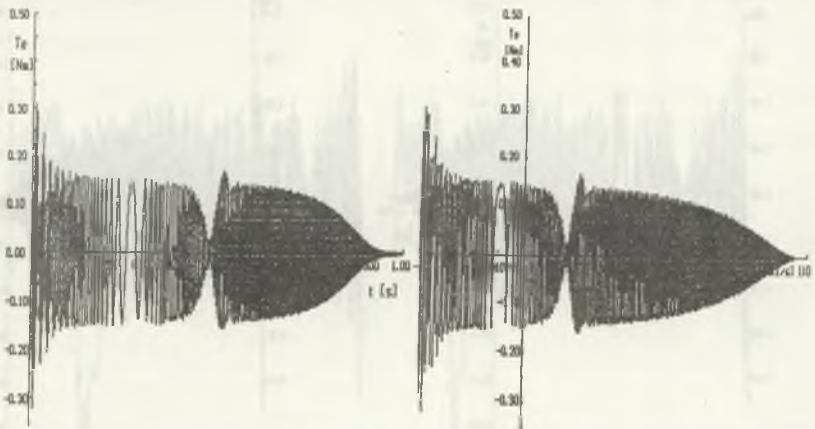
Rys. 3.10. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e51}$  i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e51}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 51 maszyny elementarnej ( $v=51$ )

Fig. 3.10. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 51-th elementary machine ( $v=51$ )



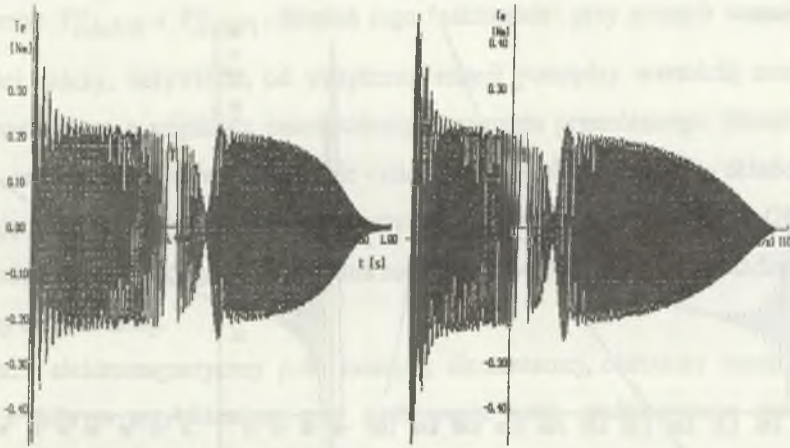
Rys. 3.11. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e69}$  i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e69}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 69 maszyny elementarnej ( $v=69$ ).

Fig. 3.11. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 69-th elementary machine ( $v=69$ ).



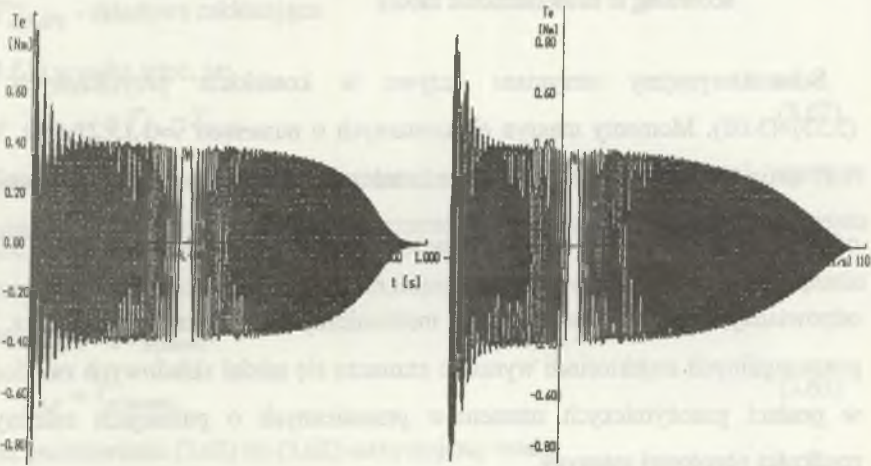
Rys. 3.12. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e87}$  i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e87}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 87 maszyny elementarnej ( $v=87$ )

Fig. 3.12. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 87-th elementary machine ( $v=87$ )



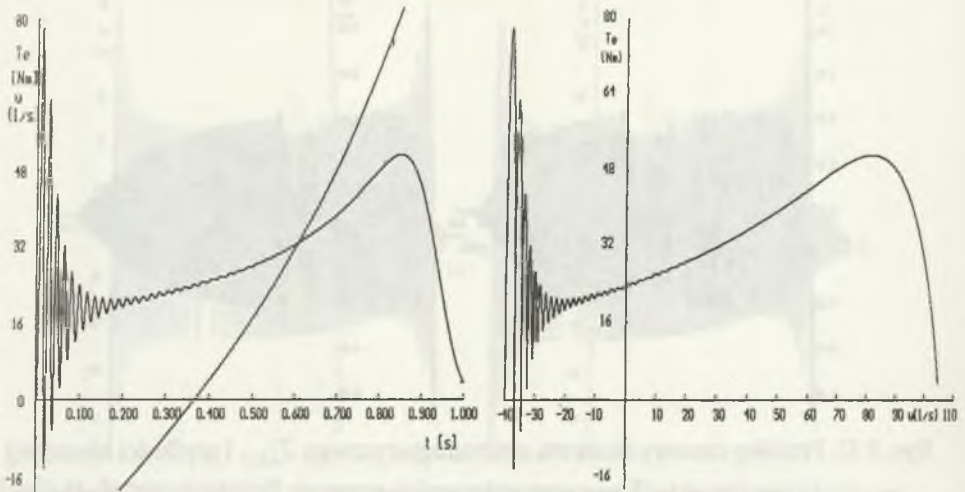
Rys. 3.13. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego  $T_{e111}$  i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego  $T_{e111}$  w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu poliharmonicznego dla 111 maszyny elementarnej ( $v=111$ )

Fig. 3.13. Torque and speed v. time curves (a) and torque v. speed curve (b) at starting according to poliharmonic model for 111-th elementary machine ( $v=111$ ).



Rys. 3.14. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika ( $v=129$ )

Fig. 3.14. Torque and velocity v. time curves (a) and torque v. velocity curve (b) at starting



Rys. 3.15. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prędkości obrotowej (a) oraz trajektoria momentu elektromagnetycznego w funkcji prędkości obrotowej (b) podczas rozruchu silnika wg modelu monoharmonicznego  
Fig. 3.15. Torque and velocity v. time curves (a) and torque v. velocity curve (b) at starting according to monoharmonic model

Scharakteryzujemy otrzymane krzywe w kontekście przybliżonych relacji (3.53)+(3.60). Momenty maszyn elementarnych o numerach  $v=3,15,21$  (rys. 3.7, 3.8, 3.9) mają charakter momentów asynchronicznych o prędkościach synchronicznych odpowiednio  $\frac{\omega_0}{p}$ ,  $-\frac{\omega_0}{5p}$ ,  $\frac{\omega_0}{7p}$ . Postacie trajektorii przedstawione na rys. 3.7a÷3.9a odpowiadają kształtom charakterystyk mechanicznych uwidocznionych na rys. 3.5. Na poszczególnych trajektoriach wyraźnie zaznacza się udział składowych zakłócających w postaci pasożytniczych momentów przemiennych o pulsacjach zależnych od prędkości obrotowej maszyny.

W przypadku 3 maszyny elementarnej składową zakłócającą jest przede wszystkim pasożytniczy moment przemienny  $T''_{e(3,69)}$ , w przypadku 15 maszyny elementarnej - moment przemienny  $T''_{e(15,52)}$ , zaś w przypadku 21 maszyny elementarnej - momenty

przemienne  $T''_{e(21,111)}$  i  $T''_{e(21,87)}$ . Stopień tego "zakłócenia" przy różnych wartościach prędkości zależy, oczywiście, od wzajemnej relacji pomiędzy wartością momentu asynchronicznego a amplitudą pasożytniczego momentu przemienne. Nasuwa się pytanie, czy jest możliwe wyodrębnienie - choćby w przybliżony sposób - składowych zakłócających z momentów elektromagnetycznych maszyn elementarnych. Okazuje się, że tak, a sposób takiego postępowania zostanie przedstawiony na przykładzie p-tej maszyny elementarnej.

Moment elektromagnetyczny p-tej maszyny elementarnej, określony sumą (3.53) można z dobrym przybliżeniem, przy zachowaniu istoty analizowanego zjawiska, wyrazić jako sumę dwóch tylko składników:

$$T_{e,p} \cong T_{e(p)} + T''_{e(3,69)} \quad (3.61)$$

gdzie:

$T_{e(p)}$  - składowa dominująca, decydująca o charakterze przebiegu (zgodnie z (3.53)),  
 $T''_{e(3,69)}$  - składowa zakłócająca.

Z (3.61) wynika więc, że:

$$T''_{e(3,69)} \cong T_{e,p} - T_{e(p)} \quad (3.62)$$

Można przyjąć, że przebieg momentu elektromagnetycznego p-tej maszyny elementarnej  $T_{e,p}$  w modelu poliharmonicznym jest zbliżony do przebiegu momentu elektromagnetycznego dla modelu monoharmonicznego, uwzględniającego wyłącznie harmoniczną p-tą  $T_{e(mono)}$ :

$$T_{e,p} \approx T_{e(mono)} \quad (3.63)$$

Przez podstawienie (3.63) do (3.62) otrzymujemy wzór:

$$T''_{e(3,69)} \cong T_{e,p} - T_{e(mono)} \quad (3.64)$$

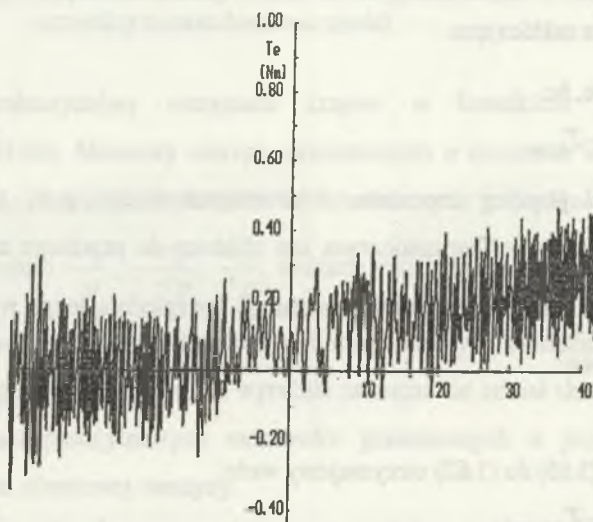
charakteryzujący sposób wyodrębniania z momentu elektromagnetycznego p-tej maszyny elementarnej - pasożytniczego momentu przemienne  $T''_{e(3,69)}$ . Moment ten

jest równy różnicy przebiegu momentu elektromagnetycznego p-tej maszyny elementarnej z rys. 3.7 oraz przebiegu momentu elektromagnetycznego dla modelu monoharmonicznego z rys. 3.15 i jest przedstawiony na rys. 3.16. O poprawności otrzymanego wyniku świadczy właściwa wartość prędkości synchronicznej:

$$\Omega_{ms} = -\frac{2\omega_0}{66} = -9.515 \text{ rad/s}, \quad (3.65)$$

którą można określić poprzez zestawienie przebiegu momentu przemiennego z rys. 3.16 z przebiegiem prędkości obrotowej z rys. 3.6a.

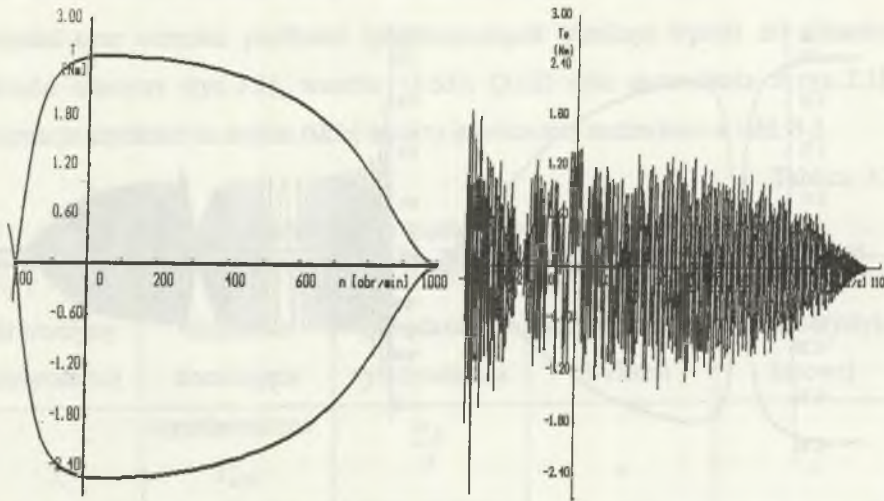
Momenty maszyn elementarnych o numerach  $v=51, 69, 87, 111$  i  $129$  (rys. 3.10÷3.14) mają charakter pasożytniczych momentów przemiennych. Obwiednie maksymalnych i minimalnych wartości momentów przemiennych widoczne na trajektoriach (rys. 3.10b÷3.14b) odpowiadają obwiedniom pasożytniczych momentów przemiennych wyznaczonych dla stanu ustalonego wg wzorów w pracy [19, s. 89, wzory (3.47), (3.48)].



Rys. 3.16. Przebieg czasowy pasożytniczego momentu przemiennego  $T_{e''(3,69)}$

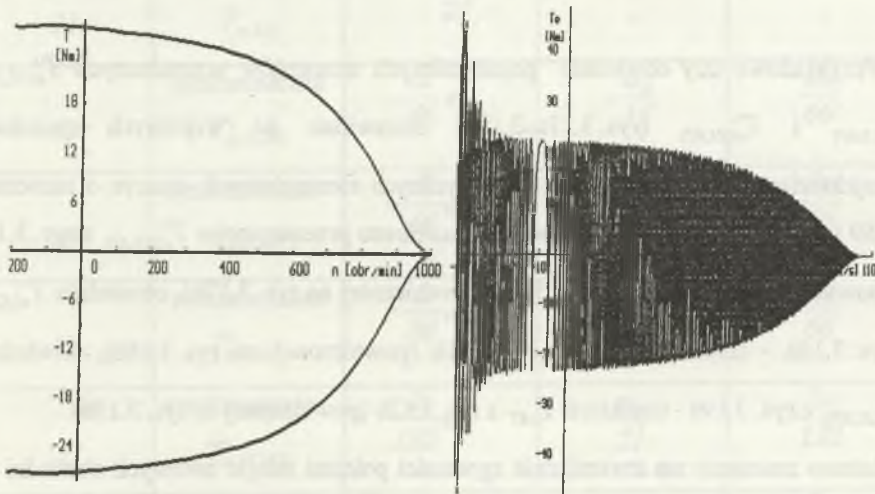
Fig. 3.16. Pulsating torque  $T_{e''(3,69)}$  v. time





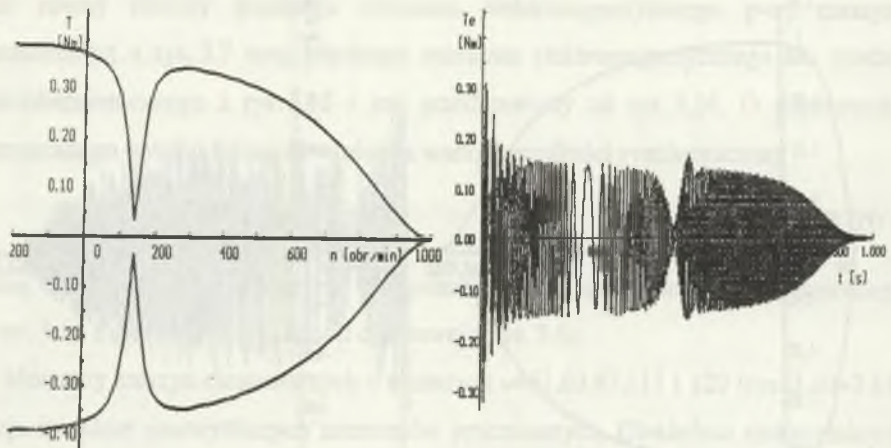
Rys. 3.17. Obwiednia pasożytniczego momentu przemiennego  $T'_{e(15,51)}$  (a) i trajektoria momentu elektromagnetycznego 51 maszyny elementarnej  $T_{e51}$  (b)

Fig. 3.17. Envelope of pulsating parasitic torque  $T'_{e(15,51)}$  (a) and trajectory of electromagnetic torque for the 51-st elementary machine  $T_{e51}$  (b)



Rys. 3.18. Obwiednia pasożytniczego momentu przemiennego  $T'_{e(3,69)}$  (a) i trajektoria momentu elektromagnetycznego 69 maszyny elementarnej  $T_{e69}$  (b)

Fig. 3.18. Envelope of pulsating parasitic torque  $T'_{e(3,69)}$  (a) and trajectory of electromagnetic torque for the 69-th elementary machine  $T_{e69}$  (b)



Rys. 3.19. Obwiednia pasożytniczego momentu przemiennego  $T'_{e(21,87)}$  (a) i trajektoria momentu elektromagnetycznego 87 maszyny elementarnej  $T_{e87}$  (b)

Fig. 3.19. Envelope of pulsating parasitic torque  $T'_{e(21,87)}$  (a) and trajectory of electromagnetic torque for the 87-th elementary machine  $T_{e87}$  (b)

Przykładowo trzy obwiednie pasożytniczych momentów przemiennych  $T'_{e(15,51)}$ ,  $T'_{e(3,69)}$  i  $T'_{e(21,87)}$  (rys. 3.17a÷3.19a) zestawiono na wspólnych rysunkach z trajektoriami momentów elektromagnetycznych elementarnych maszyn o numerach 51,69 i 87 (rys. 3.17b÷3.19b). Obwiednia momentu przemiennego  $T'_{e(15,51)}$  z rys. 3.17a odpowiada trajektorii  $T_{e51}$  z rys. 3.10b (powtórzonej na rys. 3.17b), obwiednia  $T'_{e(3,69)}$  z rys. 3.18a - trajektorii  $T_{e69}$  z rys. 3.11b (powtórzonej na rys. 3.18b), obwiednia  $T'_{e(21,87)}$  z rys. 3.19a - trajektorii  $T_{e87}$  z rys. 3.12b (powtórzonej na rys. 3.19b).

Istotne znaczenie ma stwierdzenie zgodności położenia miejsc zerowych obwiedni na trajektoriach z rys. 3.10b÷3.14b oraz wartości prędkości synchronicznych wskazywanych na przebiegach dynamicznych przez punkty maksymalnego "rozrzedzenia" składowej przemiennnej. Takie sprawdzenie nie wymaga przeprowadzania żadnych obliczeń dodatkowych, albowiem wartości miejsc zerowych

obwiedni oraz wartości prędkości synchronicznych wynikają wprost ze schematu rozkładu maszyny (rys. 3.1), wzorów (3.51), (3.52) oraz zestawienia z rys. 2.18. Informacje uzyskane na drodze takiej analizy jakościowej zestawiono w tabl. 3.3.

Tablica 3.3

Wybrane własności momentów pasożytniczych.

Nr maszyny elementarnej	Składowa dominująca	Prędkość synchroniczna	Miejsce zerowe obwiedni	Okres charakterystyki kątowej
3	asynchroniczna $T_{e(3)}$	$\frac{\omega_0}{3}$	-	-
15	asynchroniczna $T_{e(15)}$	$-\frac{\omega_0}{15}$	-	-
21	asynchroniczna $T_{e(21)}$	$\frac{\omega_0}{21}$	-	-
51	synchroniczna $T'_{e(15,51)}$	$-\frac{2}{66}\omega_0$	$\frac{\omega_0}{15}$	$\frac{2\pi}{66}$
69	synchroniczna $T'_{e(3,69)}$	$-\frac{2}{66}\omega_0$	$\frac{\omega_0}{3}$	$\frac{2\pi}{66}$
87	synchroniczna $T'_{e(21,87)}$	$-\frac{2}{66}\omega_0$	$\frac{\omega_0}{21}$	$\frac{2\pi}{66}$
111	synchroniczna $T'_{e(21,111)}$	$\frac{2}{132}\omega_0$	$\frac{\omega_0}{21}$	$\frac{2\pi}{132}$
129	synchroniczna $T'_{e(3,129)}$	$\frac{2}{132}\omega_0$	$\frac{\omega_0}{3}$	$\frac{2\pi}{132}$

Zgodność danych odczytanych z dynamicznych trajektorii momentów elektromagnetycznych z danymi zawartymi w tabl.3.3 może być traktowana jako istotny dowód na poprawność modelu dynamicznego oraz - bazującego na nim - programu komputerowego.

Interesującym eksperymentem numerycznym jest również sprawdzenie wartości okresów charakterystyk kątowych pasożytniczych momentów synchronicznych. Przebiegi czasowe oraz kształt trajektorii pasożytniczych momentów przemiennych zależą - w przeciwieństwie do przebiegów czasowych oraz kształtów trajektorii pasożytniczych momentów asynchronicznych - od wartości początkowego kąta położenia wirnika. Oznacza to, że w maszynach elementarnych o numerach 3,15 i 21 zmiana kąta początkowego położenia praktycznie nie pociąga za sobą istotniejszych zmian w przebiegach dynamicznych, natomiast w maszynach o numerach 51,69,87,111,129 - przebiegi stanów nieustalonych dla różnych kątów położenia wirnika są różne i powtarzają się tylko dla wartości początkowych różniących się o okres lub wielokrotność okresu charakterystyki kątowej pasożytniczego momentu synchronicznego, czyli dla kątów  $(\vartheta_0 + c \frac{2\pi}{66})$  - w przypadku maszyn o numerach 51,69, 87 oraz dla kątów  $(\vartheta_0 + c \frac{2\pi}{132})$  w przypadku maszyn o numerach 111, 129.

Dla wszystkich innych wartości kątów początkowych położenia wirnika przebiegi dynamiczne różnią się między sobą, a różnice te są najwyraźniej widoczne w przedziale początkowym (różne wartości i rozkłady maksimów przebiegów) oraz w otoczeniu prędkości synchronicznej dla pasożytniczego momentu przemiennego (różne sposoby przechodzenia przez prędkość synchroniczną).

W opisany powyżej sposób, dokonując symulacji rozruchu dla różnych kątów początkowych położenia wirnika i wyszukując najbliższe sobie położone wartości kąta, dla których przebiegi momentów elektromagnetycznych odpowiednich maszyn elementarnych są takie same, można - opierając się na modelu dynamicznym -

wyznaczyć okresy charakterystyk kątowych poszczególnych składowych pasożytniczych momentów synchronicznych, a przez porównanie ich z wartościami okresów otrzymanymi na podstawie schematu rozkładu maszyny i tablicy z rys. 2.20 - uzyskać kolejny dowód potwierdzający poprawność modelu.

Przedstawiony problem zależności charakteru stanów dynamicznych od kąta położenia wirnika, ujawnia się również w innej postaci, a mianowicie - jako zależność przebiegów stanów nieustalonych od początkowego kąta fazowego napięcia  $\alpha_0$  (kąta fazowego w chwili włączenia silnika do sieci) przy takich samych początkowych kątach położenia wirnika.

### 3.5. CHARAKTERYSTYCZNE WŁASNOŚCI DYNAMICZNE MODELI POLIHARMONICZNYCH

W badaniach dynamiki układów napędowych, jak też i własności dynamicznych samych maszyn indukcyjnych, wykorzystuje się powszechnie najprostszy z modeli - model monoharmoniczny. Okazuje się, że w wielu zagadnieniach technicznych modele monoharmoniczne są zbyt ubogie, a założenie o uwzględnieniu tylko harmonicznej głównej jest zbyt daleko idącym uproszczeniem, nie pozwalającym na opisanie w dostatecznie wyczerpujący sposób możliwych zachowań dynamicznych maszyny bądź układu elektromechanicznego.

Przyjęcie założenia o monoharmoniczności pola magnetycznego jest dopuszczalne tylko w silnikach, w których pasożytnicze momenty synchroniczne - oznaczane na statycznych charakterystykach mechanicznych za pomocą odcinków równych podwójnym amplitudom momentu - są pomijalnie małe. Okazuje się, że w wielu silnikach produkowanych seryjnie amplitudy pasożytniczych momentów synchronicznych przyjmują - zwłaszcza w zakresie pracy hamulcowej - znaczące wartości. Pomimo tego, że znane są różne metody ograniczania pasożytniczych

momentów synchronicznych, często względy natury ekonomicznej bądź technologicznej nie pozwalają ich zastosować. Najczęściej zredukowanie wartości pasożytniczych momentów synchronicznych wymagałoby nowych wykrojników blach magnetycznych dla zmienionych liczb żłobków bądź wprowadzenia dodatkowego pierścienia zwierającego w środku pakietu blach wirnika. Te, a nie inne liczby żłobków stojana i wirnika są więc najczęściej wynikiem kompromisu między różnymi kryteriami związanymi z minimalizacją kosztów produkcji a dążeniami do optymalnych własności eksploatacyjnych (między innymi - do ograniczenia pasożytniczych momentów synchronicznych, drgań i hałasu, zmniejszenia strat dodatkowych itp.). Pasożytnicze momenty synchroniczne, niezależnie od tego, w jakim zakresie pracy maszyny się znajdują, jeśli tylko osiągną odpowiednio duże wartości, prowadzą do odmiennych własności dynamicznych maszyny i tyczy się to także - wbrew utartym przekonaniom - przypadków, gdy maszyna jest wykorzystywana w układzie napędowym jako silnik, a pasożytnicze momenty synchroniczne występują wyłącznie w zakresie pracy hamulcowej. Istotne konsekwencje występowania pasożytniczych momentów synchronicznych w odniesieniu do dynamiki maszyny oraz zasadnicze różnice w zakresie i możliwościach modelowania różnych zjawisk i własności przebiegów wykorzystując modele monoharmoniczne oraz modele poliharmoniczne - są zestawione poniżej.

Tablica 3.4

MODEL MONOHARMONICZNY	MODEL POLIHARMONICZNY
1	2
Moment rozruchowy nie zależy od kąta początkowego położenia wirnika	Moment rozruchowy zależy od kąta początkowego położenia wirnika (jeżeli w maszynie powstają pasożytnicze momenty synchroniczne przy prędkości $\Omega_m = 0$ )

1	2
Przebieg stanu nieustalonego rozruchu nie zależy od kąta początkowego położenia wirnika oraz od kąta fazowego napięcia zasilającego	Przebieg stanu nieustalonego rozruchu zależy od kąta początkowego położenia wirnika oraz od kąta fazowego napięcia zasilającego
Maksymalny udar momentu elektromagnetycznego po włączeniu silnika do sieci jest zawsze taki sam i występuje po około 0.01 s	Maksymalny udar momentu elektromagnetycznego po włączeniu silnika do sieci zależy od początkowego kąta położenia wirnika oraz kąta fazowego napięcia zasilającego i może wystąpić w różnych początkowych chwilach czasowych
W momencie elektromagnetycznym nie występuje składowa przemienna o pulsacji zależnej od prędkości wirnika	W momencie elektromagnetycznym występuje składowa przemienna o pulsacji zależnej od prędkości wirnika, wywołująca drgania skrętne wału oraz stwarzająca niebezpieczeństwo powstawania rezonansu mechanicznego w układzie obciążenia
Czas i charakter rozruchu silnika zależą tylko od momentu bezwładności i momentu obciążenia	Czas i charakter rozruchu silnika zależą nie tylko od momentu bezwładności i momentu obciążenia silnika, ale również od początkowego kąta położenia wirnika i początkowego kąta fazowego napięcia zasilającego. Możliwe są przypadki, że nieznaczne zwiększenie momentu bezwładności lub momentu obciążenia ułatwia przeprowadzenie rozruchu

cd. tablicy 3.4

1	2
W trakcie rozruchu nie występują kołysania wirnika	W trakcie rozruchu przy przechodzeniu silnika przez prędkość synchroniczną pasożytniczego momentu synchronicznego mogą wystąpić oscylacje prędkości i kołysania wirnika
Przebieg stanu nieustalonego nie zależy od układu połączeń uzwojeń stojana (przy założeniu liniowości obwodu magnetycznego)	Przebieg stanu nieustalonego może być różny dla różnych układów połączeń uzwojeń stojana (trójkąt, gwiazda bez przewodu zerowego lub gwiazda z przewodem zerowym)

Należy wyraźnie zaznaczyć, że wszystkie wymienione tu własności modeli poliharmonicznych (poza ostatnią) ujawniają się już w modelu 2-harmonicznym, a ostatnia z cech - w modelu 3-harmonicznym (3.12a) lub 4-harmonicznym (3.12b).

W celu zilustrowania opisanych własności modelu poliharmonicznego dokonano symulacji komputerowej rozruchu przykładowego silnika z podrozdz.3.2, przy założeniu takiego skosu żłobków wirnika ( $b_{sq} = 0.2$ ), aby amplituda dominującego pasożytniczego momentu synchronicznego, powstającego w zakresie pracy hamulcowej przy prędkości  $\Omega_{ms} = -\frac{2\omega_0}{66}$ , wyniosła około 55% momentu rozruchowego silnika (amplituda momentu synchronicznego - około 11 Nm, moment rozruchowy - około 20 Nm).

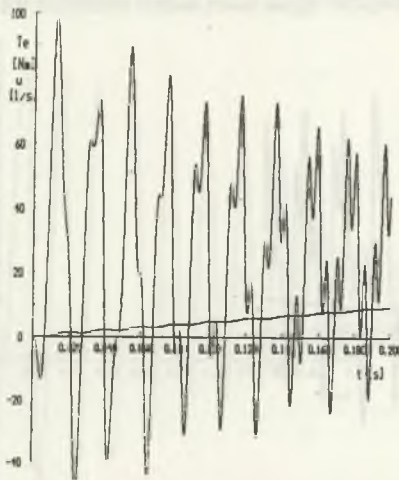
Przebieg momentu elektromagnetycznego w początkowym przedziale rozruchu dla modelu poliharmonicznego dla różnych początkowych kątów położenia wirnika (zawartych w przedziale kąta odpowiadającego okresowi charakterystyki kątowej  $2\pi/66$  dominujących momentów synchronicznych) przedstawiono na rys. 3.20a+d, zaś



dla porównania na rys.3.21 przytoczono przebieg tego momentu dla modelu monoharmonicznego.

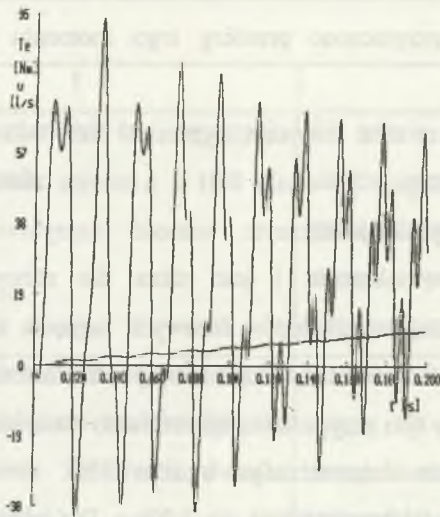
W modelu monoharmonicznym udar momentu wynosi 80 Nm (4-krotna wartość momentu rozruchowego) i występuje po około 0.01 s, a kolejne maksima maleją monotonicznie. W modelu poliharmonicznym wartość szczytowa momentu elektromagnetycznego ulega powiększeniu i jest różna dla różnych położeń początkowych wirnika (lub początkowych kątów fazowych napięcia zasilającego). Najniekorzystniejszy przypadek, odpowiadający kątowi  $\vartheta(0)=0.85 \times 2\pi/66$  przedstawia rys. 3.20d. Udar momentu uległ w tym przypadku zwiększeniu do wartości 100.97 Nm, a więc - w stosunku do modelu monoharmonicznego - o około 25%.

Inne charakterystyczne przypadki przedstawiają rys. 3.20b,c. Dla tych przypadków maksymalne możliwe udary momentu nie są związane z pierwszym, ale z trzecim maksimum. Przykładowo przy kącie początkowym wirnika  $\vartheta(0)=0.5 \times 2\pi/66$  udar momentu wynosi 93.8 Nm i występuje po około 0.037 s.



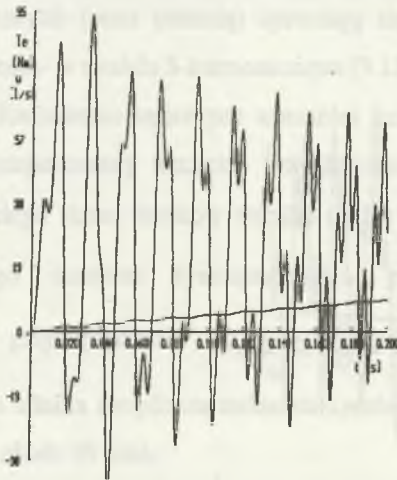
Rys. 3.20a. Początkowy przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego oraz prędkości podczas rozruchu silnika dla różnych początkowych kątów położenia wirnika  $\vartheta(0)=0$

Fig. 3.20a. Initial period of electromagnetic torque and speed v. time curves at starting for different initial rotor angle  $\vartheta(0)=0$



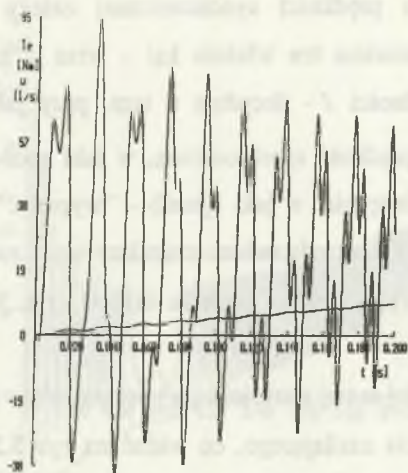
Rys. 3.20b. Początkowy przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego oraz prędkości podczas rozruchu silnika dla różnych początkowych kątów położenia wirnika  $\vartheta(0)=0.3 \times 2\pi/66$

Fig. 3.20b. Initial period of electromagnetic torque and speed v. time curves at starting for different initial rotor angle  $\vartheta(0)=0.3 \times 2\pi/66$



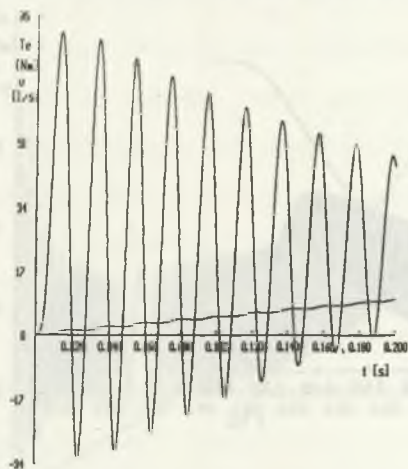
Rys. 3.20c. Początkowy przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego oraz prędkości podczas rozruchu silnika dla różnych początkowych kątów położenia wirnika  $\vartheta(0)=0.5 \times 2\pi/66$

Fig. 3.20c. Initial period of electromagnetic torque and speed v. time curves at starting for different initial rotor angle  $\vartheta(0)=0.5 \times 2\pi/66$



Rys. 3.20d. Początkowy przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego oraz prędkości podczas rozruchu silnika dla różnych początkowych kątów położenia wirnika  $\vartheta(0)=0.85 \times 2\pi/66$

Fig. 3.20d. Initial period of electromagnetic torque and speed  $v$ . time curves at starting for different initial rotor angle  $\vartheta(0)=0.85 \times 2\pi/66$

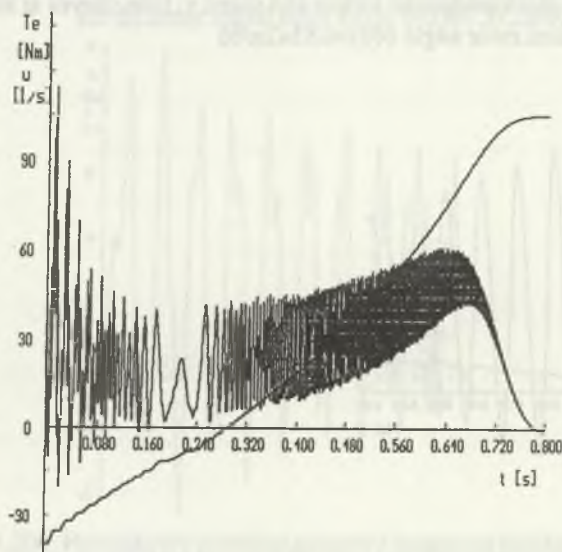


Rys. 3.21. Początkowy przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego oraz prędkości podczas rozruchu silnika wg modelu monoharmonicznego

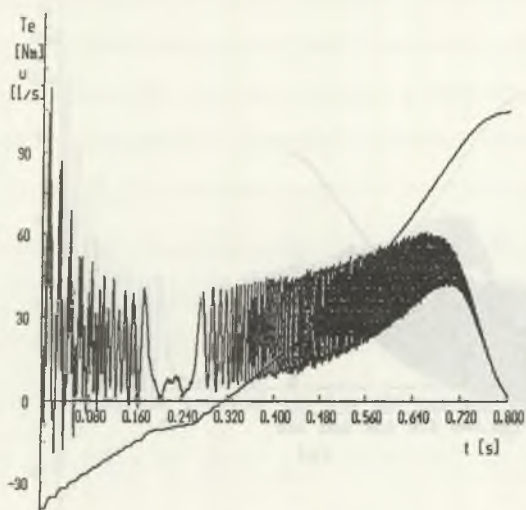
Fig. 3.21. Initial period of electromagnetic torque and speed  $v$ . time curves at starting according to monoharmonic model

Charakter przebiegu w otoczeniu prędkości synchronicznej zależy od kąta początkowego położenia wirnika, albowiem ten właśnie kąt - wraz z momentem obciążenia  $T_m$  i momentem bezwładności  $J$  - decyduje o tym, przy jakim kącie położenia wirnika maszyna osiągnie prędkość synchroniczną, w jaki sposób będzie "wchodzić" w stan synchronizmu, a następnie, w jaki sposób - "wypadać" z niego. Ilustrują to rys. 3.22 i rys. 3.23, na których przedstawiono charakterystyki rozruchowe silnika dla dwóch różnych początkowych położań wirnika  $\vartheta(0)=0$  (rys. 3.22) oraz  $\vartheta(0)=0.008$  rad (rys. 3.23).

Taki sam wpływ - przy zachowaniu tej samej wartości kąta początkowego położenia wirnika - wywiera kąt fazowy napięcia zasilającego, co widać na rys. 3.24 i 3.25, przedstawiających charakterystyki rozruchowe obliczone przy tym samym położeniu wirnika, a różnych kątach fazowych napięcia  $\alpha_0$  (rys. 3.24 - kąt  $\alpha_0=0.001$  rad, rys. 3.25 - kąt  $\alpha_0=1$  rad).

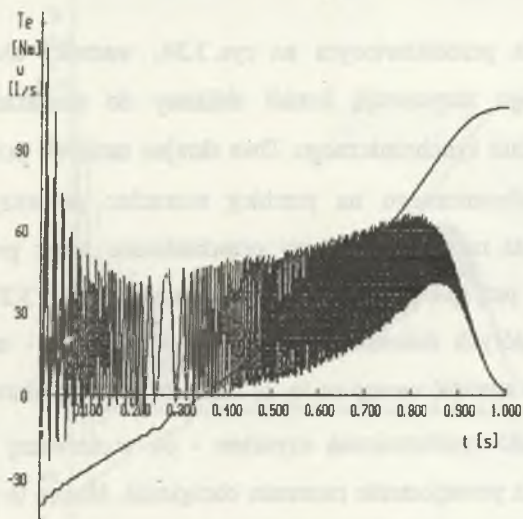


Rys. 3.22. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)  
Fig. 3.22. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)



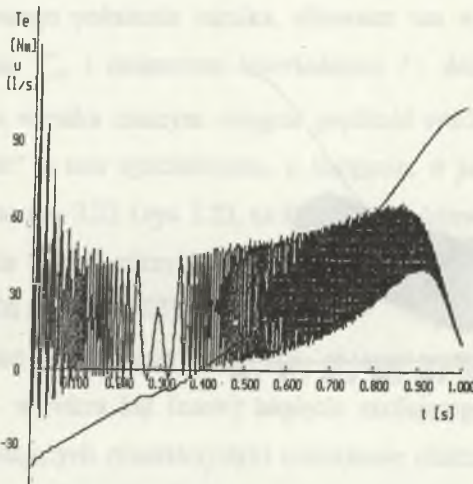
Rys. 3.23. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0.008$  rad,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)

Fig. 3.23. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0.008$  rad,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)



Rys. 3.24. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0.001$  rad,  $T_m=0$ ,  $J=0.2$  kg·m<sup>2</sup>)

Fig. 3.24. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0.001$  rad,  $T_m=0$ ,  $J=0.2$  kg·m<sup>2</sup>)

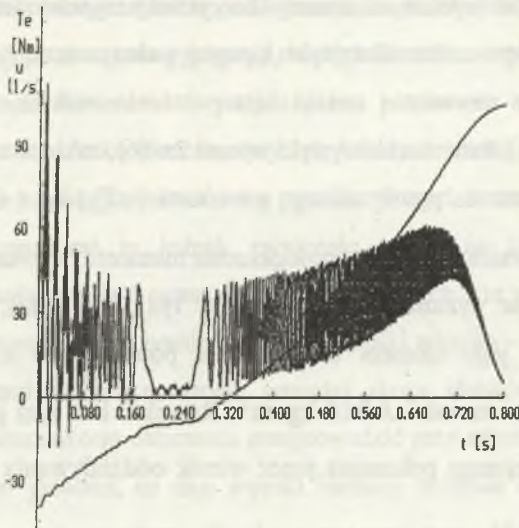


Rys. 3.25. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=1$  rad,  $T_m=0$ ,  $J=0.2$  kg·m<sup>2</sup>)

Fig. 3.25. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=1$  rad,  $T_m=0$ ,  $J=0.2$  kg·m<sup>2</sup>)

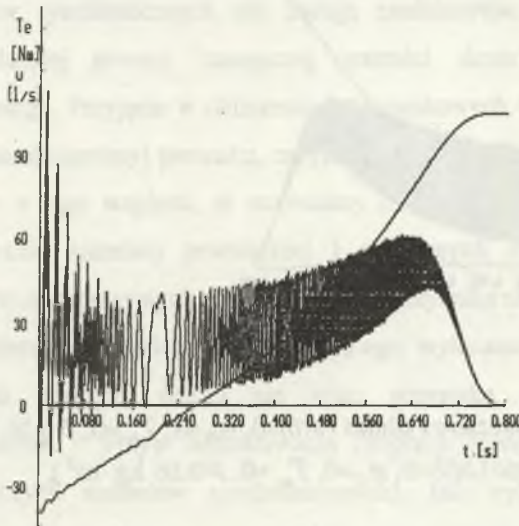
W szczególnym przypadku przedstawionym na rys.3.24, wartości chwilowe momentu elektromagnetycznego zarysowują kształt zbliżony do charakterystyki kątowej pasożytniczego momentu synchronicznego. Dwa skrajne możliwe przypadki oddziaływania momentu synchronicznego na przebieg rozruchu: pierwszy, gdy moment synchroniczny opóźnia ruch wirnika przy przechodzeniu przez prędkość synchroniczną, oraz drugi, gdy przyspiesza jego ruch - prezentują rys. 3.26 i 3.27.

Porównując warunki, dla których dokonano obu symulacji (rys. 3.26 - moment obciążenia  $T_m=1$  Nm), należy zwrócić uwagę na to, że korzystną zmianę ułatwiającą przejście silnika przez prędkość synchroniczną uzyskano - co w pierwszej chwili wydaje się paradoksalne - przez powiększenie momentu obciążenia. Można to jednak łatwo wytłumaczyć, bowiem po nieznacznym powiększeniu momentu obciążenia silnik będzie się zbliżał do prędkości synchronicznej już przy innej wartości kąta położenia



Rys. 3.26. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0.01$  rad,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)

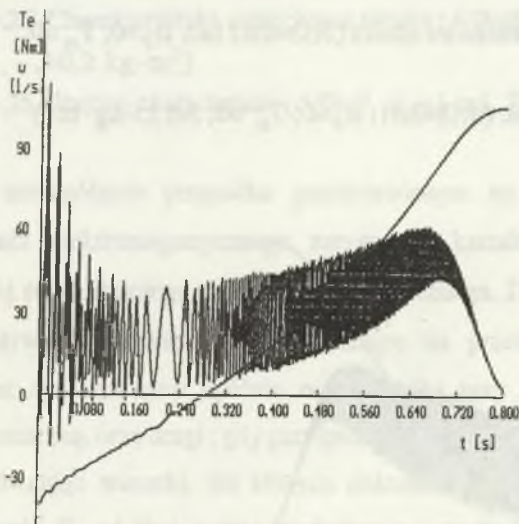
Fig. 3.26. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0.01$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)



Rys. 3.27. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=1$  Nm,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)

Fig. 3.27. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=1$  Nm,  $J=0.15$  kg·m<sup>2</sup>)

wirnika, a ta może odpowiadać zupełnie odmiennej - korzystniejszej wartości momentu synchronicznego. Faktycznie - z charakterystyki kątowej pasożytniczego momentu synchronicznego wynika, że nieznaczna zmiana kąta położenia wirnika, np. o 1/2 podziałki żłobkowej wirnika (okres charakterystyki wynosi  $2\pi/66$ ), może w zasadniczy sposób zmienić wartość momentu pasożytniczego z wartości  $(+T_{es})$  na  $(-T_{es})$ . Taki sam efekt może wywołać również nieznaczne powiększenie momentu bezwładności, co pokazuje rys. 3.28. Podczas symulacji pokazanej na rys. 3.28 silnik pozostał nieobciążony ( $T_m=0$ ), ale jego moment bezwładności powiększono z wartości  $J=0.15 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  (rys. 3.26) do wartości  $J=0.16 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Również i w tym przypadku przyczyniło się to do łatwiejszego pokonania przez wirnik oddziaływania momentu synchronicznego.



Rys. 3.28. Charakterystyka rozruchowa silnika ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.16 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ )  
Fig. 3.28. Starting characteristic ( $\vartheta(0)=0$ ,  $\alpha_0=0$ ,  $T_m=0$ ,  $J=0.16 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ )

Reasumując, *model poliharmoniczny charakteryzuje się specyficznymi własnościami dynamicznymi, odmiennymi od własności modelu monoharmonicznego.*



*Stosowanie takiego właśnie poliharmonicznego modelu jest więc konieczne zawsze wtedy, gdy w maszynie występują pasożytnicze momenty synchroniczne o znaczących amplitudach.* Stwierdzić to można przez pomiarowe wyznaczenie charakterystyki mechanicznej silnika (metodą statyczną lub dynamiczną) bądź też - przeprowadzając obliczenia amplitud momentów wg przedstawionych wzorów [19].

Konieczne jest tu jednak zwrócenie uwagi na to, że przy obliczeniowym wyznaczaniu amplitud momentów synchronicznych - ze względu na nieuwzględnienie prądów poprzecznych pomiędzy prętami klatki wirnika - nie powinno przeprowadzać się obliczeń dla rzeczywistych wartości skosu żłobków wirnika. Zaleca się, aby wstępne szacunkowe obliczenia przeprowadzić przy założeniu, że współczynnik skosu jest równy jedności, co daje wyniki bardziej zbliżone do wyników pomiarów, niż obliczenia przeprowadzone dla skosu rzeczywistego. Można to uzasadnić fizycznie w ten sposób, że nieuwzględnienie prądów poprzecznych pomiędzy prętami w znacznym stopniu niweluje działanie skosu, w wyniku czego wartości amplitud momentów synchronicznych nie zostają zredukowane do zera, ale do wartości odpowiadającej pewnej "zastępczej wartości skosu", będącej częścią skosu rzeczywistego. Przyjęcie w obliczeniach szacunkowych wartości skosu równej jeden (wirnik nieukosowany) prowadzi, co prawda, do zawyżenia wyników, jest to jednak korzystne z tego względu, że rozważany model nie uwzględnia również efektów uzłobkowania szczeliny powietrznej i związanych z tym tzw. pasożytniczych momentów reluktancyjnych. W wartości współczynnika skosu równej 1, przyjmowanej w odniesieniu do modelu uwzględniającego wyłącznie harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń, mieści się więc poprawka - uwzględniająca chociaż w przybliżeniu - wpływ uzłobkowania (poprzez powiększenie wartości amplitud pasożytniczych momentów synchronicznych). Jak wykazują badania, obliczenia dokonane przy wykorzystaniu modelu uwzględniającego wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu, a pomijającego prądy poprzeczne pomiędzy prętami - dają

w wielu przypadkach przy założeniu wartości współczynnika skosu równej 1 wyniki wyższe, ale zbliżone do wyników pomiarów.

### 3.6.0 MOŻLIWOŚCI STOSOWANIA

#### MODELI MINIMALNOHARMONICZNYCH

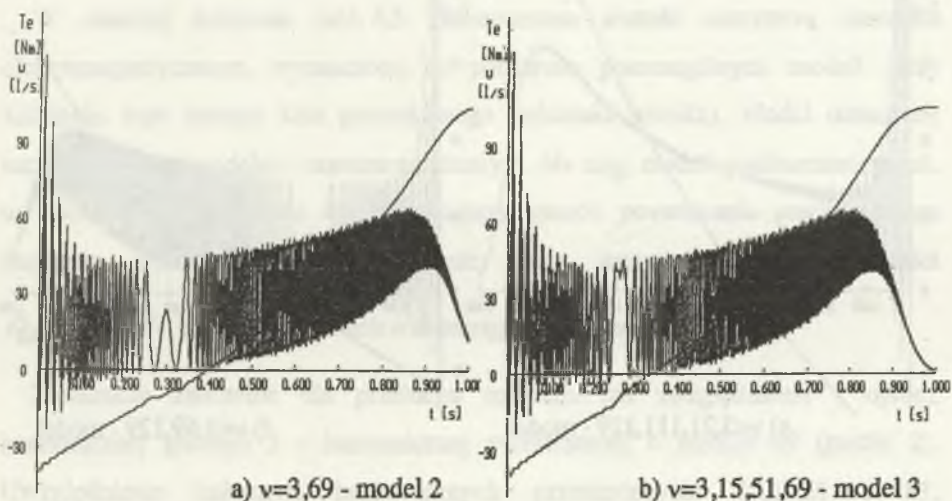
Analizując wypadkowe charakterystyki mechaniczne uwzględniające pasożytnicze momenty synchroniczne łatwo zauważyć, że w indukcyjnych silnikach klatkowych występuje zazwyczaj tylko jeden dominujący pasożytniczy moment synchroniczny, a pozostałe powstające w nim pasożytnicze momenty synchroniczne są z reguły mniejsze o co najmniej jeden rząd wielkości. Jeśli pasożytniczy moment synchroniczny pojawia się w zakresie pracy silnikowej bądź hamulcowej, to dominujący udział w powstawaniu tego momentu ma zazwyczaj tylko jedna para harmonicznych przestrzennych, a składowe związane z innymi parami harmonicznych przestrzennych są zdecydowanie mniejsze. Wyjątek stanowi przypadek, gdy pasożytniczy moment synchroniczny powstaje w maszynie przy zatrzymanym wirniku, albowiem wówczas uczestniczące w jego generowaniu pary harmonicznych przestrzennych (najczęściej 2,3, lub 4 pary) charakteryzują się zbliżonym udziałem. Te właśnie, wymienione wyżej, spostrzeżenia są przyczyną, dla której - przy formułowaniu dynamicznych modeli maszyn indukcyjnych - jest możliwe znaczne ograniczenie liczby uwzględnianych harmonicznych przestrzennych, a w wyniku tego - daleko idące uproszczenie struktury matematycznej modelu, bez znaczącego uszczerbku dla dokładności obliczeń i przy zachowaniu wszystkich wymienionych w poprzednim podrozdziale charakterystycznych cech modelu poliharmonicznego.

Model taki - zredukowany do kilku, a nawet do 2 harmonicznych - dostarcza dostatecznie dokładnych informacji o możliwych maksymalnych uderach momentu elektromagnetycznego, o amplitudach i pulsacjach pasożytniczych momentów przemiennych i o własnościach pasożytniczego momentu synchronicznego - i może

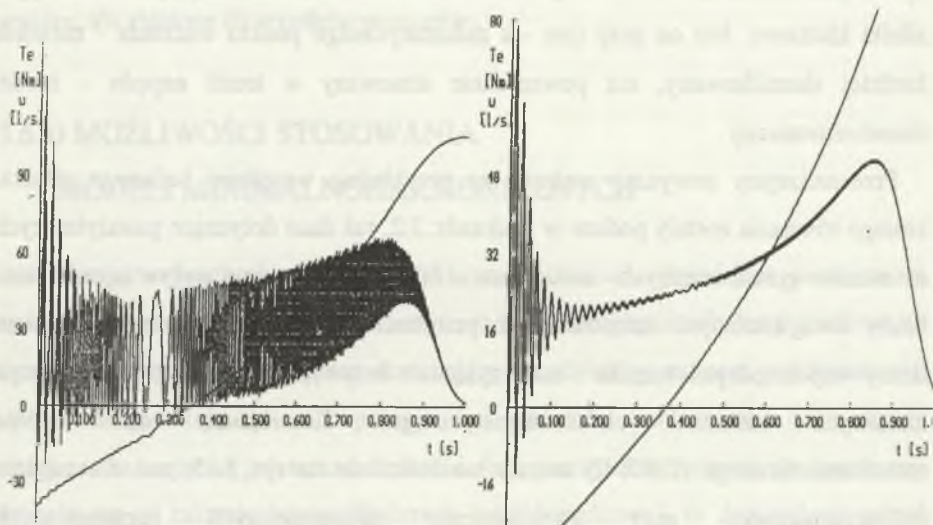
być z powodzeniem zastosowany w badaniach układów zawierających indukcyjne silniki klatkowe. Jest on przy tym - z matematycznego punktu widzenia - niewiele bardziej skomplikowany, niż powszechnie stosowany w teorii napędu - model monoharmoniczny.

Przeanalizujemy powyższy wniosek na przykładzie wcześniej badanego silnika, którego równania zostały podane w podrozdz. 3.2, zaś dane dotyczące pasożytniczych momentów synchronicznych - zestawione w tabl. 3.1. Rozważmy wpływ ograniczania liczby uwzględnianych harmoniczných przestrzenných, związany z ograniczaniem liczby współrzędnych wirnika - na przykładzie krzywych rozruchu (charakterystyk czasowych momentu elektromagnetycznego). Rozwiązanie dla modelu monoharmonicznego ( $LWR=2$ ) zostało uwidocznione na rys. 3.15, zaś dla modelu poliharmonicznego przy uwzględnieniu najistotniejszych harmoniczných przestrzenných ( $\nu=3,15,21,51,69,87,111,129$ ,  $LWR=6$ ) - na rys. 3.6a. Rozwiązania dla kolejnych pośrednich przypadków są przedstawione na rys. 3.29a+h.

Prezentowane wyniki obliczeń symulacyjnych odnoszą się do ciągu modeli poliharmoniczných zestawionych w tabl. 3.5.

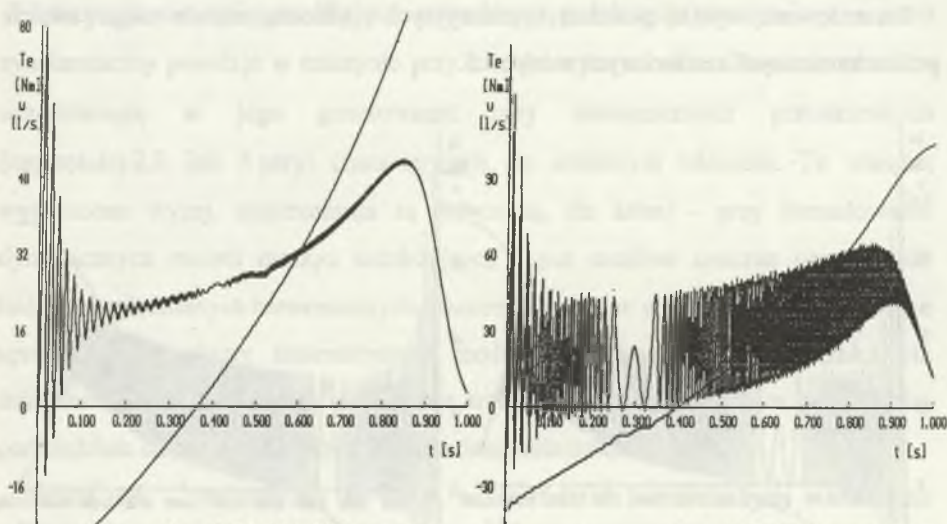


*Modelowanie 3-fazowych maszyn indukcyjnych  
przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu*



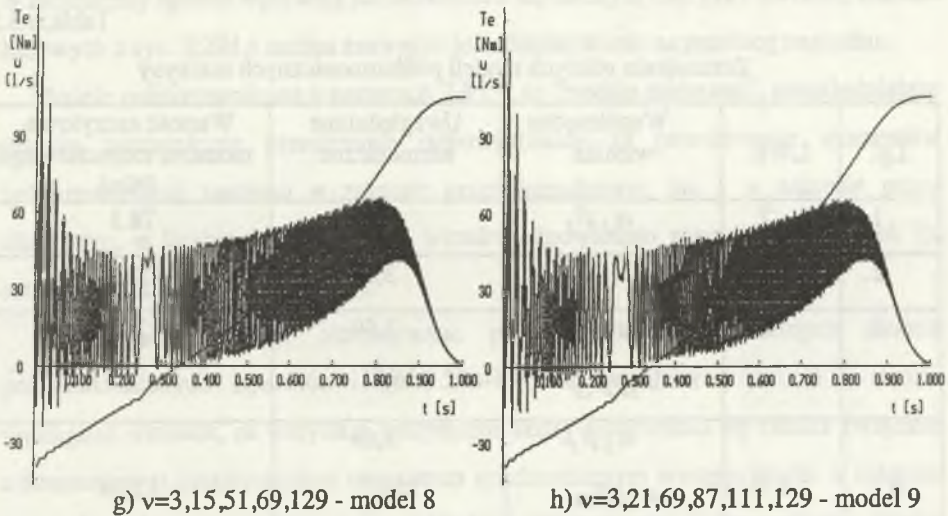
c)  $v=3,15,21,51,69,87$  - model

d)  $v=3,129$  - model



e)  $v=3,21,111,129$  - model

f)  $v=3,69,129$  - model



Rys. 3.29. Charakterystyki rozruchowe dla modeli poliharmonicznych uwzględniających harmoniczne przestrzenne

Fig. 3.29. Starting characteristic for poliharmonic models taking into account different higher space harmonics

W ostatniej kolumnie tabl. 3.5 zamieszczono wartość szczytową momentu elektromagnetycznego, wyznaczoną na podstawie poszczególnych modeli (przy założeniu tego samego kąta początkowego położenia wirnika). Model oznaczany numerem 1, jest modelem monoharmonicznym. Na ciąg modeli poliharmonicznych, uwzględniających w coraz to dokładniejszy sposób powstawanie pasożytniczego momentu synchronicznego w zakresie pracy hamulcowej przy prędkości

$$\Omega_{ms} = -\frac{2\omega_{\theta}}{66}, \text{ składają się modele o numerach porządkowych: 2, 3 i 4.}$$

Zasadnicze znaczenie dla przebiegu rozruchu ma uwzględnienie - oprócz harmonicznej głównej 3 - harmonicznej przestrzennej o rzędzie 69 (model 2). Uwzględnienie kolejnych harmonicznych przestrzennych: 15, 51, 21 i 87, uczestniczących w powstawaniu momentu synchronicznego w zakresie pracy

hamulcowej (modele 3 i 4) wpływa już tylko nieznacznie na charakter stanów dynamicznych i wartość szczytową momentu rozruchowego.

Tablica 3.5

Zestawienie różnych modeli poliharmonicznych maszyny

Lp.	LWR	Współrzędne wirnika	Uwzględnione harmoniczne	Wartość szczytowa momentu rozruchowego [Nm]
1.	2	$\alpha_3 \beta_3$	3	78.1
2.	2	$\alpha_3 \beta_3$	3,69	123.5
3.	4	$\alpha_3 \beta_3$ $\alpha_{15} \beta_{15}$	3,69 15,51	126.8
4.	6	$\alpha_3 \beta_3$ $\alpha_{12} \beta_{12}$ $\alpha_{15} \beta_{15}$	3,69 21,87 15,51	127.4
5.	2	$\alpha_3 \beta_3$	3,129	78.8
6.	4	$\alpha_3 \beta_3$ $\alpha_{12} \beta_{12}$	3,129 21,111	79.6
7.	2	$\alpha_3 \beta_3$	3,69,129	122.8
8.	4	$\alpha_3 \beta_3$ $\alpha_{15} \beta_{15}$	3,69,129 15,51	126.1
9.	4	$\alpha_3 \beta_3$ $\alpha_{12} \beta_{12}$ $\alpha_{15} \beta_{15}$	3,69,129 21,87,111 15,51	122.9

Modele o numerach 5 i 6, to modele poliharmoniczne uwzględniające harmoniczne przestrzenne: 129,21 i 111 odpowiedzialne za powstawanie pasożytniczego momentu

synchronicznego w zakresie pracy silnikowej przy  $\Omega_{ms} = \frac{2\omega_0}{132}$ . Harmoniczne te w nieznaczny sposób wpływają na zachowanie się maszyny, ale przy uważnej analizie krzywych z rys. 3.29d,e można zauważyć ich oddziaływanie na przebieg rozruchu.

Modele poliharmoniczne o numerach 7,8 i 9, to "modele mieszane", uwzględniające wyższe harmoniczne przestrzenne odpowiedzialne za powstawanie momentów synchronicznych zarówno w zakresie pracy hamulcowej, jak i w zakresie pracy silnikowej, o liczbie współrzędnych wirnika odpowiednio równej dwa (model 7), cztery (model 8) i sześć (model 9).

Porównując przebiegi otrzymywane przy wykorzystaniu różnych modeli poliharmonicznych (rys. 3.6a i rys. 3.29a-h) oraz wyników z tabl. 3.5, można wyciągnąć wniosek, że wszystkie specyficzne cechy zachowania się silnika związane z dominującym pasożytniczym momentem synchronicznym występującym w zakresie pracy hamulcowej wystarczająco dokładnie odwzorowuje 2-harmoniczny model o numerze 2, uwzględniający harmoniczną przestrzenną główną 3 i harmoniczną żłobkową o rzędzie 69. Proponuje się, aby taki uproszczony model określać mianem *modelu minimalnoharmonicznego*. W odniesieniu na przykład do wartości szczytowej momentu elektromagnetycznego błąd modelu minimalnoharmonicznego w stosunku do "pełnego" 8-harmonicznego modelu o numerze porządkowym 9 wynosi zaledwie 0.4%.

Samo "przechodzenie" przez prędkość synchroniczną wygląda, oczywiście, odmiennie dla każdego modelu z tabl. 3.5, co nie ma jednak w ogólnym przypadku większego znaczenia, bo przy odpowiedniej zmianie kąta początkowego położenia wirnika można uzyskać dla każdego z modeli praktycznie ten sam charakter przebiegu.

Jeśli ze względu na charakter rozpatrywanego zjawiska konieczne staje się uwzględnienie (pomimo nieznacznej amplitudy) pasożytniczego momentu synchronicznego powstającego w zakresie pracy silnikowej, to do modelu 2-harmonicznego należy dołączyć harmoniczną o rzędzie 129, przekształcając go w model 3-harmoniczny ( $\nu=3,69,129$ ), przy nie zmienionej liczbie współrzędnych

wirnika 2 ( $LWR=2$ ). Należy podkreślić, że wówczas powstają już w nim składowe przemienne momentu elektromagnetycznego o takich samych pulsacjach, co w "pełnym 8-harmonicznym modelu" o numerze porządkowym 9 ( $LWR=6$ ).

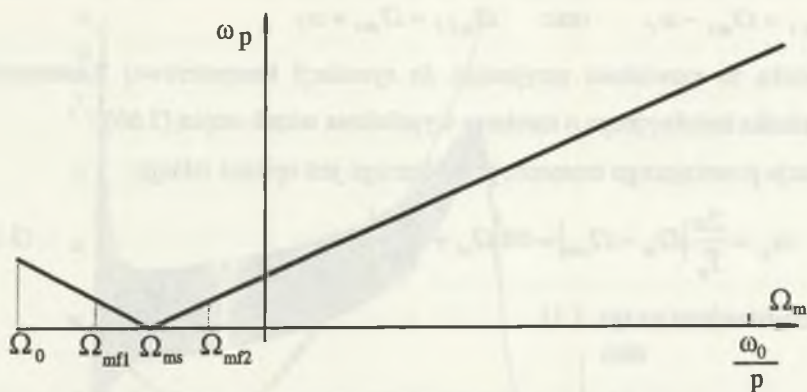
Wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan mają dla modelu 2-harmonicznego i 3-harmonicznego odpowiednio budowę:

$$\begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad 0 \\
 \left[ \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ \alpha_3 & 3,69 & \\ \beta_3 & & \\ \vdots & & \end{array} \right] \quad (3.66) \quad \begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad 0 \\
 \left[ \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ \alpha_3 & 3,69,129 & \\ \beta_3 & & \\ \vdots & & \end{array} \right] \quad (3.67)
 \end{array}
 \end{array}$$

a więc - znacznie prostszą od postaci (3.17). Powyższym postaciom wypełnień odpowiadają równania różniczkowe znacznie prostsze od układu równań (3.18÷3.21) i niewiele bardziej złożone od układu równań dla modelu monoharmonicznego.

Przykładowo 2-harmoniczny model maszyny indukcyjnej można zastosować do symulacji komputerowej zjawiska rezonansu mechanicznego, często obserwowanego przy zdejmowaniu charakterystyki mechanicznej silnika metodą dynamiczną z wykorzystaniem tensometrów umieszczonych na wale skrętnym (charakteryzującym się dużą sprężystością i niewielkim tłumieniem). Jeśli w badanym silniku występuje pasożytniczy moment synchroniczny przy prędkości  $\Omega_{ms}$ , to w trakcie rozruchu z nawrotu (przy zmianie prędkości od ujemnej wartości  $\Omega(0)$  do prędkości ustalonej), powstają w silniku momenty przemienne o pulsacji zmieniającej się wraz z prędkością wirnika (wzór (2.17)). Jeśli pasożytniczy moment synchroniczny powstaje w zakresie pracy hamulcowej (przypadek najczęściej spotykany w praktyce), to wykres pulsacji ma postać, jak na rys. 3.30.





Rys. 3.30. Wykres pulsacji momentu pasożytniczego przemiennego w funkcji prędkości obrotowej

Fig. 3.30. Angular frequency v. speed curve for pulsating parasitic torque

Dla układu mechanicznego składającego się z silnika o momencie bezwładności  $J_1$ , wałka skrętnego o sztywności  $k_w$  i współczynniku tłumienia  $c_w$  oraz urządzenia obciążającego o momencie bezwładności  $J_2$ , równania układu mechanicznego mają postać:

$$J_1 \frac{d\Omega_{m1}}{dt} = T_e - k_w(\vartheta_1 - \vartheta_2) - c_w(\Omega_{m1} - \Omega_{m2}) \quad (3.68)$$

$$J_2 \frac{d\Omega_{m2}}{dt} = -T_m + k_w(\vartheta_1 - \vartheta_2) + c_w(\Omega_{m1} - \Omega_{m2})$$

natomiast pulsacja rezonansowa  $\omega_f$  pomiarowego układu mechanicznego wynosi:

$$\omega_f = \sqrt{k_w \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)} \quad (3.69)$$

gdzie:

$\vartheta_1, \vartheta_2$  - kąty położenia wirnika oraz urządzenia napędzanego.

Podczas rozruchu z nawrotu może wówczas dwukrotnie dojść do zjawiska rezonansu mechanicznego przy prędkościach:

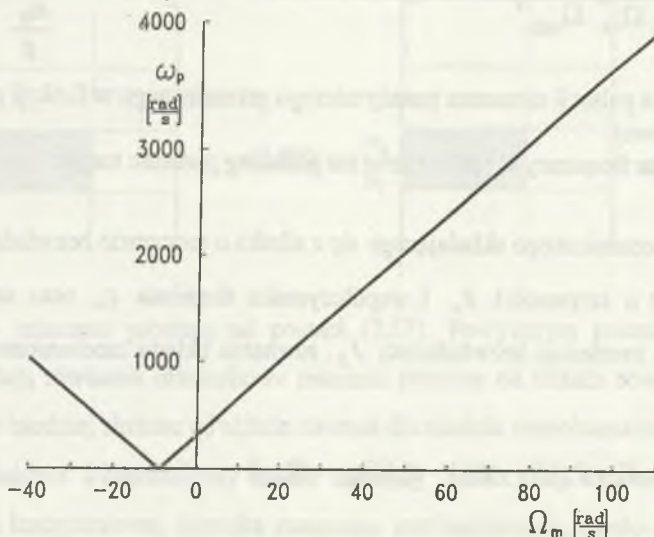
$$\Omega_{mf1} = \Omega_{ms} - \omega_r \quad \text{oraz} \quad \Omega_{mf2} = \Omega_{ms} + \omega_r$$

Zjawisko to rozważono przyjmując do symulacji komputerowej 2-harmoniczny model silnika indukcyjnego o macierzy wypełnienia wirnik-stojan (3.66).

Pulsacja powstającego momentu przemiennego jest opisana relacją:

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_s} |\Omega_m - \Omega_{ms}| = 66 \left| \Omega_m + \frac{2\omega_0}{66} \right| \quad (3.70)$$

i jest przedstawiona na rys. 3.31.

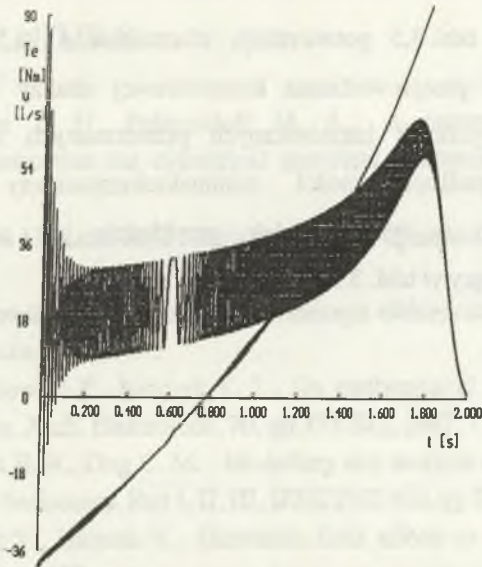


Rys. 3.31. Wykres pulsacji momentu przemiennego  $T_{e(3,69)}$  (model 2) w funkcji prędkości obrotowej

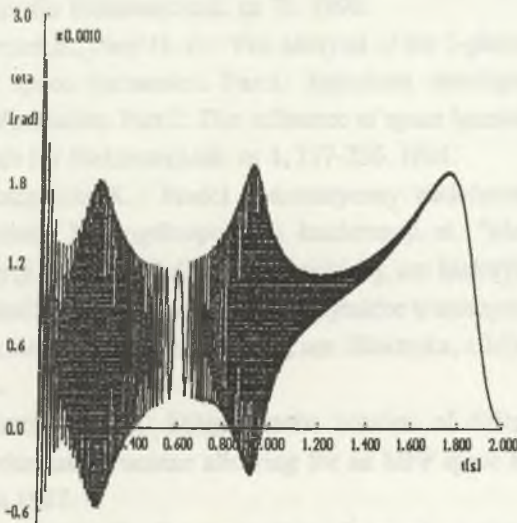
Fig. 3.31. Angular frequency v. Speed curve for pulsating torque  $T_{e(3,69)}$  (model 2)

W wyniku symulacji komputerowej uzyskano przebiegi czasowe momentu elektromagnetycznego i prędkości kątowej przedstawione na rys. 3.32 oraz wykres kąta skręcenia wału skrętnego (rys. 3.33), na którym widoczne jest zjawisko rezonansu mechanicznego przy dwóch prędkościach obrotowych.

### 3. Komputerowa analiza dynamiki maszyn indukcyjnych



Rys. 3.32. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prędkości obrotowej  
Fig. 3.32. Electromagnetic torque v. Speed time and angular speed v. Time curves



Rys. 3.33. Przebieg czasowy kąta skręcenia wału skrętnego  
Fig. 3.33. Angle of shaft torsion v. time

Rozważony przykład oraz tabl. 3.5 potwierdzają sformułowane na początku rozdziału stwierdzenie, że do przeprowadzenia komputerowej analizy dynamiki maszyny z uwzględnieniem wyższych harmonicznych przestrzennych wystarcza w wielu praktycznych przypadkach model minimalnoharmoniczny (nawet 2-harmoniczny. W rozważanym w tym rozdziale przykładzie jest to model minimalnoharmoniczny posiadający w tabl. 3.5 numer 2.

## LITERATURA

1. Barton T. H., Poloujadoff M. A.: A generalized symmetrical components transformation for cylindrical electrical machines. IEEE PAS 91, pp.1781-1986, 1972.
2. Boldea I., Nasar S.A.: Electric machine dynamic. Macmillan Publishing Company, 1986.
3. Dąbrowski M.: Projektowanie maszyn elektrycznych prądu przemiennego. WNT. Warszawa 1988.
4. Drozdowski P., Sobczyk T. J.: On mathematical model of squirrel-cage induction motors. Arch. Elektrotech, 70, pp.371-382, 1987.
5. Fudeh H. R., Ong C. M.: Modelling and analysis of induction machines containing space harmonics. Part I, II, III, IEEE PAS 102, pp.1608-1628, 1983.
6. Heller V., Hamata V.: Harmonic field effects in induction machines. Amsterdam, Elsevier 1977.
7. Hickiewicz J., Łukaniszyn M., Szymaniec S., Wach P.: On reducing the vibration and noise level of induction motors with integral and fractional slot windings. Archiv für Elektrotechnik, nr 73, 1990.
8. Hommes E., Paap G. C.: The analysis of the 3-phase squirrel-cage induction motor with space harmonics. Part1: Equations developed by a new time-dependent transformation. Part 2: The influence of space harmonics on the transient behaviour. Archiv für Elektrotechnik, nr 4, 217-236, 1984.
9. Kluszczyński K.: Model matematyczny wielofazowej maszyny asynchronicznej. Materiały XX ogólnopolskiej konferencji nt. "Maszyny Elektryczne", Sulejów, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, ser. Elektryka, z.74, Łódź 1983.
10. Kluszczyński K.: Momenty pasożytnicze w maszynach asynchronicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.102 (praca habilitacyjna). Gliwice 1986.
11. Kluszczyński K.: Diagrammatic notation of differential equations of polyphase asynchronous machine allowing for an MFF space harmonics. Proc. of BICEM'87, Pekin 1987.
12. Kluszczyński K.: Decomposition of current vector into active- and zero-component in magnetic circuits. Proc. of ECCTD, Paryż 1987.
13. Kluszczyński K., Malicki P.: Wpływ prądów poprzecznych w wirniku indukcyjnego silnika klatkowego na momenty pasożytnicze. Archiwum Elektrotechniki, z. 2, PWN, Warszawa 1994.

14. Kluszczyński K., Malicki P.: Model matematyczny indukcyjnego silnika klatkowego z dodatkowym pierścieniem w wirniku. *Archiwum Elektrotechniki*, z.1, PWN, Warszawa 1994.
15. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Pakiet programów dydaktycznych do analizy własności maszyny indukcyjnej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych. *Materiały konferencyjne: Mikrokomputery w edukacji*. Zakopane 1991.
16. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Uniwersalny program komputerowy do obliczania pasożytniczych momentów w silnikach indukcyjnych klatkowych. *Materiały VIII Sympozjum: Mikromaszyny i serwomotory*, Książ 1992.
17. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Squirrel-cage motor with additional ring in rotor. *Electric Machines and Power Systems* 21, 1993.
18. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Program komputerowy do analizy momentów pasożytniczych w indukcyjnych silnikach klatkowych. *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrycznego Politechniki Gdańskiej. Materiały seminarium "Zastosowanie komputerów w dydaktyce"* Gdańsk 1993.
19. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Momenty pasożytnicze w indukcyjnych silnikach klatkowych. *Prace Sekcji Maszyn Elektrycznych i Transformatorów Komitetu Elektrotechniki PAN*, t. I, PTETiS Warszawa-Gliwice 1993.
20. Krause P.C.: *Analysis of electric machinery*. McGraw-Hill Book Company, 1986.
21. Nasar S. A.: Elektromagnetic energy conversion in n,m-winding double cylindrical structures in the presence of space harmonics. *IEEE Trans. PAS* 87, pp.1099-1106, 1968.
22. Oberretl K.: Stromverteilung im Käfig von Asynchronmaschinen in Abhängigkeit von der Rotorstellung. *Arch. Elektrotech.* 70, 217-225, 1987.
23. Paap G. C.: The influence of space harmonics on the electromechanical behaviour of asynchronous machines. *Praca doktorska*. Politechnika Łódzka, Łódź 1988.
24. Paszek W.: *Stany nieustalone w maszynach elektrycznych prądu przemiennego*. WNT, Warszawa 1986.
25. Puchała A.: *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*. WNT, Warszawa 1977.
26. Rawicki S.: Dynamiczny model trójfazowej maszyny indukcyjnej z wirnikiem pierścieniowym z uwzględnieniem wyższych harmonicznych rozkładu przestrzennego pola. *Archiwum Elektrotechniki*, t.XXXII, z. 3/4, 1985.
27. Sobczyk T. J.: Infinitely- dimensional linear and quadratic forms of electric machines. *Rozprawy Elektrotechniczne*, vol. 29, z. 3, 697-707, 1983.

28. Sobczyk T. i inni : Modelowanie matematyczne zjawisk elektromagnetycznych. Politechnika Krakowska. Seria: Inżynieria Elektryczna. Monografia 169, Kraków 1994.
29. Stepina J. : Space vector analysis of synchronising torques in squirrel-cage induction motors. Acta Technica CSAV, nr 6, 685-701, 1967.
30. Stepina J. : Raumzeiger in Matrizendarstellung in der Theorie der elektrischen Maschinen. Archiv für Elektrotechnik, z. 55, 91-97, 1972.
31. Śliwiński T., Głowacki A. : Parametry rozruchowe silników indukcyjnych. PWN, Warszawa 1982.
32. Taegen F., Hommes E. : Die Theorie des Käfigläufermotors unter Berücksichtigung der Ständer - und Läufermagnetung. Archiv für Elektrotechnik, z. 56, 21-31, 331-339, 1974.
33. Turowski J. : Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.
34. Van der Merve F. S. : The analysis of an electric machine with a smooth air-gap allowing MFF harmonics. Part1: The basic space vector component machine equations. Application of the basic equations to steady-state and transient conditions. Archiv für Elektrotechnik, z. 58, 283-303, 1976.
35. Van der Merve F. S. : The basic voltage and torque equations for squirrel-cage induction motors allowing for all MFF and permeance harmonics. Archiv für Elektrotechnik, z. 64, 251-261, 1982.
36. Willems J. L. : The analysis of induction machines with space harmonics. ETZ-A 93, pp.415-418, 1972.

# MODELOWANIE 3-FAZOWYCH MASZYN INDUKCYJNYCH PRZY UWZGLĘDNIENIU WYŻSZYCH HARMONICZNYCH PRZESTRZENNYCH PRZEPŁYWU

## STRESZCZENIE

W rozdz.1 przedstawiono model matematyczny indukcyjnej maszyny klatkowej przy uwzględnieniu wyższych harmonicznym przestrzennym przepływu uzwojeń stojana i wirnika (model poliharmoniczny) we współrzędnych fazowych, a następnie - we współrzędnych  $\alpha\beta$ . Omówiono graficzną reprezentację poliharmonicznego modelu  $\alpha\beta$  w postaci tzw. schematów rozkładu maszyny indukcyjnej na maszyny elementarne oraz przedstawiono tok postępowania umożliwiające sformułowanie układu równań różniczkowych we współrzędnych  $\alpha\beta$  na podstawie mnemotechnicznie narysowanego schematu rozkładu. Wprowadzono pojęcie wypełnienia macierzy indukcyjności wirnik-stojan charakteryzującego w zwięzły sposób ogólną budowę układu równań różniczkowych i stanowiącego formę uproszczonego i symbolicznego zapisu równań, a następnie przedstawiono, bazując na schematach rozkładu i wypełnieniach macierzy, problem redukcji liczby współrzędnych i współczynników matematycznego modelu poliharmonicznego.

W rozdz.2 omówiono zagadnienie powstawania w maszynie indukcyjnej pasożytniczych momentów elektromagnetycznych, przemiennych, synchronicznych i asynchronicznych oraz scharakteryzowano podstawowe własności tych momentów. Opisano tzw. tory generowania momentów pasożytniczych umożliwiające wyodrębnianie i określanie własności różnych składowych momentów elektromagnetycznych oraz wyszukiwanie dominujących składowych momentów pasożytniczych bez rozwiązywania równań różniczkowych. Wskazano na istotne znaczenie takiej jakościowej analizy równań różniczkowych, pozwalającej z jednej strony na formułowanie modeli poliharmonicznych o z góry zadanych własnościach, z drugiej zaś strony - na daleko idące uproszczenie budowy modeli poliharmonicznych, poprzez uwzględnienie w nich tylko tych równań i współrzędnych, które są związane z dominującymi składowymi momentów.

Rozdz.3 poświęcono komputerowej symulacji dynamiki maszyn indukcyjnych. Opierając się na wypełnieniach macierzy wirnik-stojan, dokonano ogólnej klasyfikacji modeli poliharmonicznych. Omówiono procedury formułowania modeli poliharmonicznych o minimalnej liczbie równań i współczynników oraz opisano eksperymenty numeryczne sprawdzające poprawność opracowanych programów komputerowych. Przeanalizowano charakterystyczne własności dynamiczne maszyn, wynikające z uwzględnienia poliharmoniczności przepływu magnetycznego uzwojeń i wskazano na istotne różnice w dynamicznym zachowaniu się maszyn opisywanych modelami monoharmonicznymi oraz modelami poliharmonicznymi. Uzasadniono możliwość stosowania w analizie układów poliharmonicznych modeli minimalnoharmonicznych, uwzględniających wyłącznie 2 lub 3 poprawnie wybrane harmoniczne przestrzenne.



## MODELLING OF 3-PHASE INDUCTION MACHINE INCLUDING HIGHER MFF SPACE HARMONICS.

### ABSTRACT

In chapter 1 a mathematical model of a squirrel-cage machine including higher MFF stator and rotor space harmonics (poliharmonic model) is presented in phase coordinates, and - in  $\alpha\beta$  coordinates. Graphical representation of  $\alpha\beta$  poliharmonic model in the form of the so-called diagram of decomposition of induction motor into elementary machines is described as well as procedure enabling to formulate system of differential equations on the basis of mnemotechnically-drawn diagram of decomposition is presented.

Furthermore, the idea of fitting of rotor-stator inductance matrix is defined which is well helpfull in the description of the general form of differential equation system. The fittings can be counted as simplified and symbolic notation of the differential equations. With the help of diagram of decomposition and fittings of rotor-stator inductance matrix, the problem of reducing number of coordinates and coefficients of poliharmonic model is discussed.

In chapter 2 problem of generating parasitic electromagnetic torques in induction motor: pulsating, synchronous and asynchronous is considered and basic properties of these torques are described. Then, the so-called paths of generating parasitic torques allowing to select and to determine properties of different electromagnetic torque components without solving differential equations - are presented. It has been stressed that such a qualitative analysis of differential equations is very useful because enables us to formulate poliharmonic model having properties given in advance and on the other hand allows to simplify the form of poliharmonic model by taking into account only equations and coefficients related to predominant torque compoments.

Chapter 3 is devoted to computer simulation of induction motor dynamics. Basing on fittings of rotor-stator inductance matrix, a general classification of poliharmonic model is proposed. The procedure of formulating poliharmonic model including minimal number of equations and coefficients is presented as well as numerical experiments for testing created computer programmms are described. Individual dynamic properties of a machine resulting from poliharmonic character magnetomotive forces of windings are analysed and the fundamental differences by monoharmonic model and by poliharmonic model are listed. Possibilities of applying minimal harmonic model taking into account only 2 or 3 correctly chosen space harmonics are considered.

## Моделирование трехфазных асинхронных машин с учётом высших пространственных гармоник магнитодвижущей силы

Пезюме

В гл. 1 представлена математическая модель короткозамкнутой асинхронной машины учитывающая высшие пространственные гармоники магнитодвижущей силы обмоток статора и ротора (полигармоническая модель) в системе фазовых координат, затем - в системе координат  $\alpha\beta$ . Обсуждается графическое представление полигармонической  $\alpha\beta$  модели в виде т. н. схем разложения асинхронной машины, а также представлен ход действий ведущий к формулировке системы дифференциальных уравнений в системе координат  $\alpha\beta$  на основе мнемотехнически нарисованной схемы разложений. Введено понятие заполнения матрицы индуктивностей ротор-статор, которое характеризует общую структуру системы дифференциальных уравнений и является формой упрощенной и символической записи уравнений. Затем на основе схем разложения и заполнения матрицы, представлена проблема редуцирования числа составляющих и коэффициентов математической полигармонической модели.

В гл. 2 обсужден вопрос возникновения в асинхронной машине паразитных электромагнитных моментов - переменных, синхронных и асинхронных, а также схарактеризованы основные свойства этих моментов. Описаны т. н. цепи генерирования паразитных моментов, которые делают возможным выделение и определение свойств разных составляющих электромагнитных моментов, а также отыскивание доминирующих составляющих паразитных моментов без решения дифференциальных уравнений. Указывается на существенное значение такого качественного анализа дифференциальных уравнений, который позволяет с одной стороны на формулировку полигармонической модели о заранее определённых свойствах, с другой стороны - на далеко идущие упрощения структуры полигармонических моделей, через учёт в них только этих уравнений и составляющих, которые связаны с доминирующими составляющими моментов.

Глава 3 посвящена численному моделированию динамики асинхронных машин. На основе заполнения матрицы ротор-статор, совершена общая классификация полигармонических моделей. Обсуждены процедуры формулировки полигармонических моделей с минимальным числом уравнений и коэффициентов, а также описаны численные эксперименты проверяющие корректность разработанных компьютерных программ. Проанализированы характерные динамические свойства машин, вытекающие из учёта полигармоничности магнитодвижущей силы обмоток и указаны существенные различия в динамическом поведении машин описанных моногармоническими и полигармоническими моделями. Доказана возможность применения в анализе минимальногармонических систем упрощенных моделей, учитывающих исключительно 2 или 3 правильно избранные пространственные гармоники.

P.3347/95/142

*Zamierzeniem monografii jest przybliżenie zagadnień modelowania maszyn indukcyjnych (z uwzględnieniem wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu uzwojeń) badaczom, projektantom oraz użytkownikom maszyn elektrycznych oraz układów napędowych.*

*Praca zapoznaje w sposób usystematyzowany z zagadnieniami dotyczącymi struktury matematycznej modeli poliharmonicznych, analizą jakościową równań różniczkowych oraz upraszczaniem ich postaci przez redukcję liczby współrzędnych i współczynników, koncepcją wypełnień macierzy i wynikającymi z niej mnemotechnicznymi procedurami formułowania układów równań, techniką opracowywania programów komputerowych, sprawdzania ich poprawności oraz strategią użytkowania. Analizuje i systematyzuje własności dynamiczne maszyn, wynikające z poliharmoniczności przepływu uzwojeń i podaje przykłady praktycznych zastosowań modeli.*