

Juliusz SOŁKOWSKI

Politechnika Krakowska

PROPOZYCJA MODELU REOLOGICZNEGO TORU BEZSTYKOWEGO

Streszczenie. W referacie przedstawiono propozycję modelu reologicznego toru bezstykowego w kierunku podłużnym. Wprowadzono nowy, nieliniowy model podłużny toru oraz założono istnienie pewnego potencjału dyssypacyjnego równego pracy plastycznej oporu podłużnego. Na tej podstawie wyprowadzono równanie różniczkowe przemieszczeń podłużnych toru pod obciążeniem termicznym. Podano wstępne wyniki analizy oraz sformułowano wnioski co do dalszych prac.

PROPOSAL OF A RHEOLOGICAL MODEL OF CWR TRACK

Summary. In the paper a rheological model of the track in the longitudinal direction without damping was proposed assuming that the dissipation function is equal to the plastic work of longitudinal track resistance. The equation was derived and solved analytically. Preliminary analyses were carried out and directions for further research indicated.

1. Wstęp

Zagadnienia reologiczne związane z eksploatacją toru bezstykowego rzadko były analizowane, chociaż w wielu pracach pojawia się problem tzw. „trwałej” czy „dodatkowej” siły podłużnej w szynach. Kompleksowy opis reologiczny – o ile wiadomo autorowi – nie istnieje. Można tutaj wspomnieć prace [2, 6], w których podjęto próbę opisu zmian siły podłużnej w szynach toru bezstykowego w trakcie eksploatacji. Zaproponowano równanie „przewodnictwa”:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \kappa^2 \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (1)$$

gdzie: N - siła podłużna w szynach, $\kappa^2 = \frac{\mu}{EA}$, w którym μ - współczynnik oporu wiskotycznego oraz EA - sztywność podłużna szyn oraz równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \zeta^2 \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}, \quad (2)$$

gdzie $\zeta^2 = \frac{\rho}{EA}$ przy zaproponowaniu nowej stałej reologicznej ρ takiej, że opór podłużny toru jest proporcjonalny do przyspieszenia przemieszczenia podłużnego.

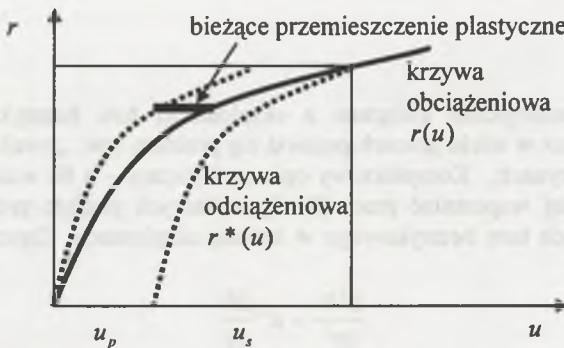
Równanie (1) było także przedmiotem analizy w pracy [1], gdzie podjęto próbę weryfikacji doświadczalnej. Natomiast równanie (2) nie było do tej pory szerzej rozważane. Obydwa równania stanowią próbę opisu reologicznego „z zewnątrz”, tzn. są próbą aproksymacji rozkładów siły podłużnej w szynach uzyskanych w długotrwałych badaniach doświadczalnych. Abstrahują one więc od konkretnej charakterystyki oporu podłużnego toru i jej zmienności w trakcie eksploatacji. Ponadto, rozwiązaniem ogólnym równania (1) jest funkcja, w której występuje mnożnik $\exp(-\kappa \cdot t)$, co powoduje, że ogranicza on analizę do „wygaszania” siły podłużnej w czasie eksploatacji, co jest sprzeczne z samą naturą siły podłużnej, charakteryzującą się właśnie koncentracją na pewnych odcinkach. W równaniu (2), natomiast, nie bierze się pod uwagę własności tłumiących nawierzchni.

W niniejszym referacie podjęto próbę przewyżczenia wyżej wymienionych niedostatków. Inspiracją było przekonanie, że zagadnienia reologiczne można rozpatrywać tak jak zagadnienia dynamiczne, wyrażone np. w pracach [4, 5]. Jako punkt wyjścia przyjęto nieliniową charakterystykę oporu podłużnego, a następnie zaproponowano funkcję dyssypacji energii układu. Sformułowano funkcjonal Hamiltona dla rozważanego układu oraz wyprowadzono równanie różniczkowe równowagi. Uwzględniono jedynie wybrane obciążenie termiczne nawierzchni.

2. Model oporu podłużnego

Model oporu w kierunku podłużnym przedstawiono na rys.1. Przyjęto następujące założenia:

- układ jest jednowymiarowy (rozważane są tylko przemieszczenia podłużne, a zmienną niezależną jest współrzędna wzdłuż toru x),
- szyny stanowią jedną liniowo-sprężystą belkę pryzmatyczną,
- przytwierdzeń nie brano w ogóle pod uwagę,
- opór podłużny jest ciągły na długości toru.



Rys.1. Model oporu w kierunku podłużnym
Fig.1. Model of resistance in the longitudinal direction

Opór podłużny toru – w ogólnym podejściu – może być opisany równaniem:

$$r = r[u(x, t), \dot{u}(x, t), t], \quad (3)$$

gdzie $u = u(x, t)$ - przemieszczenie podłużne szyn (belki torowej). Zakładając tymczasowo, że charakterystyka ta nie zależy jawnie od czasu oraz od prędkości przemieszczenia, wprowadza się następującą $\dot{u} = \dot{u}(x, t)$ funkcję (por. rys.1):

$$r(u) = r_{\max} \left(1 - e^{-\frac{k_0 u}{r_{\max}}} \right), \quad (4)$$

$$k(u) = k_0 e^{-\frac{k_0 u}{r_{\max}}} \quad \text{lub} \quad r(u) = r_{\max} \left(1 - \frac{k(u)}{k_0} \right) \quad (5)$$

Opór podłużny może też być przedstawiony jako:

$$r(u) = r(u_s + u_p) = r_{\max} \left(1 - e^{-\frac{k_0 (u_s + u_p)}{r_{\max}}} \right) = r_{\max} \left(1 - \frac{k(u_s) \cdot k(u_p)}{k_0^2} \right), \quad (6)$$

gdzie u_s , u_p - przemieszczenie sprężyste oraz przemieszczenie plastyczne,

r_{\max} - opór maksymalny.

Proces odciążania jest nieliniowy i jest modelowany z wykorzystaniem pewnego współczynnika sterującego η , dzięki któremu styczna odciążeniowa jest określona jako

$$k^* = (1 - \eta) \cdot k_0 + \eta \cdot k(u), \quad (7)$$

gdzie k_0 - styczna początkowa jak przy obciążaniu, $k(u)$ - styczna bieżąca jak przy obciążaniu oraz $\eta \in [0+1]$. Współczynnik $\eta = 0$ oznacza odciążanie liniowe (największa dyssypacja energii), natomiast gdy $\eta = 1$, wtedy odciążanie odbywa się po tej samej krzywej co obciążanie i dyssypacja wynosi zero. W przedziale $[0+1]$ odbywa się zatem sterowanie odciążaniem, a tym samym dyssypacją energii. Aby określić energię dysypowaną dla danego przemieszczenia podłużnego istotne jest określenie przemieszczenia plastycznego dla bieżącego przemieszczenia całkowitego. Po przekształceniach można pokazać, że wyrażenie na przemieszczenie plastyczne jest postaci:

$$u_p = (1 - \eta^2)u + (\eta^2 - 1) \frac{r(u)}{k_0} \quad (8)$$

lub (dokładniej):

$$u_p = u - \frac{r_{\max}}{k_0} \left[1 - \frac{1}{1 - \eta} \left(\frac{k(u)}{k_0} - \eta \frac{k(u)}{k(u_p)} \right) \right] \quad (9)$$

Wykorzystując (8) w (9) można określić przemieszczenie plastyczne. W celu określenia ilości energii dyssypowanej, najpierw zostanie określona ilość pracy plastycznej na jednostkę długości toru:

$$W_p = \int_0^{u_p} r(u) du \quad (10)$$

Wstawiając do powyższego wzoru wyrażenie (4) oraz wykonując całowanie otrzymuje się

$$W_p = r_{\max} \left[u + \frac{r_{\max}}{k_0} e^{-\frac{k_0 u}{r_{\max}}} \right]_{u=0}^{u_p} = r_{\max} \left[u_p + \frac{r_{\max}}{k_0} \left(e^{-\frac{k_0 u_p}{r_{\max}}} - 1 \right) \right] = r_{\max} \left(u_p - \frac{r(u_p)}{k_0} \right) \quad (11)$$

3. Wyprowadzenie równania reologicznego

Wymuszenie kinematyczne pochodzi od belki torowej, która podlega zmiennemu polu termicznemu. Częściowo energia sprężysta jest gromadzona w belce torowej, częściowo jest uwalniana podczas przemieszczeń podłużnych. Przemieszczeniom podłużnym belki przeciwdziałają opór podłużny podłoża. Wykonywana jest wtedy praca, która składa się z pracy sprężystej oraz z pracy plastycznej. Dla pewnego odcinka belki torowej mamy:

$$\int_{x_0}^{x_1} (U - W) dx = 0, \quad (12)$$

gdzie:

U - gęstość energii sprężystej belki torowej (tzn. na jednostkę długości toru),
 W - gęstość pracy oporu podłużnego (łącznie pracy sprężystej oraz plastycznej),
 $x_0 < x_1$ - dowolne dwie współrzędne wzdłuż osi toru.

Szybkość pracy plastycznej równa jest szybkości utraty energii całkowitej $E_{\text{całk}}$ przez układ oraz jest określona jako:

$$\frac{\partial E_{\text{całk}}}{\partial t} = \frac{\partial W_p}{\partial t} = r_{\text{max}} \left[\dot{u}_p - \frac{1}{k_0} \left(\frac{\partial r(u_p)}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial u_p}{\partial t} \right) \right] = r_{\text{max}} \left(1 - \frac{k(u_p)}{k_0} \right) \cdot \dot{u}_p \quad (13)$$

Postuluje się następnie występowanie pewnego potencjału dyssypacyjnego. Posiada on wymiar energii i jest funkcją szybkości przemieszczenia. Jest to potencjał przypadający na jednostkę długości toru. Zostaje wprowadzony przez analogię do tzw. potencjału dyssypacyjnego Rayleigha, mianowicie:

$$D = \frac{1}{2} \rho \cdot \dot{u}_p^2, \quad (14)$$

gdzie ρ - pewna stała reologiczna układu.

Uogólnione siły dyssypatywne w układzie są definiowane jako:

$$Q_p = \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_p} = \rho \cdot \dot{u}_p \quad (15)$$

Siły te można określić biorąc pod uwagę fakt, że szybkość zmiany całkowitej energii układu $E_{\text{całk}}$ jest równa mocy sił dyssypatywnych. Natomiast zmiana energii całkowitej układu wynika z wykonanej pracy plastycznej. W związku z tym można napisać:

$$\frac{\partial E_{\text{całk}}}{\partial t} = \frac{\partial W_p}{\partial t} = Q_p \cdot \dot{u}_p \quad \text{oraz} \quad Q_p = r(u_p) \quad (16)$$

Gęstość pracy oporu podłużnego, uwzględniając tę siłę dyssypatywną jest określona jako:

$$W(u_s, \dot{u}_p) = \int_0^{u_s} r(u) du + \int_0^{\dot{u}_p} \rho \cdot \dot{u} \cdot du \quad (17)$$

gdzie całkowanie przebiega do przemieszczenia sprężystego u_s oraz plastycznego. Jak można pokazać, szybkość straty energii układu, tj. szybkość pracy plastycznej, jest równa podwojnemu potencjałowi dyssypacyjnemu. W ten sposób zagadnienie reologiczne nabiera cech analogicznych do zagadnienia dynamicznego. Jednakże nie pojawia się tutaj siła inercjalna, gdyż z założenia prędkości (oraz przyspieszenia) przemieszczeń są małe. Rolę energii kinetycznej układu przejmuje natomiast potencjał dyssypacyjny. Równanie ruchu układu jest wyznaczone z warunku minimum funkcjonału Hamiltona, zawierającego potencjał dyssypacyjny. Mianowicie:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (\delta U - \delta W) dx dt = 0 \quad \text{lub} \quad \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\delta U - \delta(W_s + D)] dx dt = 0. \quad (18)$$

gdzie:

- U - gęstość energii sprężystej belki torowej,
- W - gęstość całkowitej pracy oporu podłużnego,
- W_s - gęstość pracy sprężystej oporu podłużnego,
- D - gęstość potencjału dyssypacyjnego,
- δ - wariacja,
- $t_0 < t_1$ - dowolne dwa momenty w trakcie eksploatacji,
- $x_0 < x_1$ - dowolne dwie współrzędne wzdłuż osi toru.

Gęstość energii sprężystej belki torowej przy jednoosiowym ściskaniu/rozciąganiu z uwzględnieniem obciążenia termicznego określona jest jako:

$$U = \frac{1}{2} EA \cdot \varepsilon^2 \quad \text{oraz} \quad \varepsilon = u' - \alpha \cdot \Delta T, \quad (19)$$

gdzie:

- ε - odkształcenie osi belki, w którym:
- u' - pochodna przemieszczenia podłużnego wzdłuż osi podłużnej toru x ,
- α - współczynnik rozszerzalności termicznej stali szynowej,
- $\Delta T = \Delta T(x, t)$ - przyrost temperatury szyny ponad temperaturę przytwierdzenia.

Uwzględniając (19) przy pominięciu wyrazu $\alpha^2 \Delta T^2$ jako małego, otrzymuje się:

$$U = \frac{1}{2} EA (u'^2 - 2u' \cdot \alpha \cdot \Delta T), \quad (20)$$

którego całka z wariacji jest obliczona jako:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \delta U dx &= \frac{1}{2} EA \int_{x_0}^{x_1} \delta (u'^2 - 2u' \cdot \alpha \cdot \Delta T) dx = EA \int_{x_0}^{x_1} (u' \delta u' - \delta u' \cdot \alpha \cdot \Delta T) dx = \\ &= EA \int_{x_0}^{x_1} (-u'' \delta u + \delta u \cdot \alpha \cdot \Delta T) dx = EA \int_{x_0}^{x_1} (-u'' + \alpha \cdot \Delta T) \delta u dx, \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie zastosowano całkowanie przez części oraz założono, że wariacje przemieszczenia podłużnego na końcach przedziału równe są zero. Można to założyć, ponieważ odcinek może być dowolnie długi, a w dalszych rozważaniach będzie brana pod uwagę tylko strefa centralna toru bezстыkowego. Wariacja gęstości pracy sprężystej oporu podłużnego jest obliczona jako:

$$\delta W_s(u_s) = \frac{\partial W_s}{\partial u_s} \delta u_s = r_{\max} \left(1 - \frac{k(u_s)}{k_0} \right) \cdot \delta u_s = r(u_s) \cdot \delta u_s, \quad (22)$$

oraz jego całka

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta W(u_s) dx dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} r(u_s) \cdot \delta u_s \cdot dx dt, \quad (23)$$

gdzie wstawiono znak minus z uwagi na fakt, że opór podłużny wykonuje pracę ujemną, gdyż zawsze działa przeciw przemieszczeniu podłużnemu belki torowej, będącemu wymuszeniem. Pozostaje jeszcze obliczyć całkę z wariacji gęstości potencjału dyssypacyjnego. Wygląda ona następująco (zamieniono kolejność całkowania oraz zastosowano całkowanie przez części):

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta D(\dot{u}_p) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \rho \cdot \dot{u}_p \cdot \delta \ddot{u}_p \cdot dx dt = \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \rho \left(\dot{u}_p \cdot \delta u_p \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} (\ddot{u}_p \cdot \delta u_p) dt \right) dx \right] dx, \quad (24)$$

zatem

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta D(\dot{u}_p) dx dt = - \rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (\ddot{u}_p \cdot \delta u_p) dx dt \quad (25)$$

Na podstawie (8) obliczona zostaje druga pochodna przemieszczenia plastycznego oraz jego wariacja:

$$\ddot{u}_p = (1 - \eta^2) \ddot{u} + (\eta^2 - 1) \frac{\ddot{r}(u)}{k_0} \quad (26)$$

Przyjmując następnie założenie $\ddot{r}(u) \approx k(u) \cdot \ddot{u}$ oraz dokonując kilku przekształceń we wzorze (26) otrzymuje się wyrażenie (przybliżone) na drugą pochodną przemieszczenia plastycznego

$$\ddot{u}_p = (1 - \eta^2) \cdot \left(1 - \frac{k(u)}{k_0} \right) \cdot \ddot{u} \quad \text{lub} \quad \ddot{u}_p = \gamma \cdot \ddot{u}, \quad (27)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $\gamma = (1 - \eta^2) \cdot \left(1 - \frac{k(u)}{k_0} \right)$. Podobnie otrzymuje się wzór

określający wariację przemieszczenia plastycznego. Zważywszy, że

$u_p = u_p(u)$, czyli $\delta u_p = \frac{\partial u_p}{\partial u} \delta u$ oraz $\delta \ddot{r}(u) = \frac{\partial \ddot{r}}{\partial u} \delta u = k(u) \delta u$, otrzymuje się:

$$\delta u_p = (1 - \eta^2) \cdot \left(1 - \frac{k(u)}{k_0} \right) \cdot \delta u \quad \text{lub} \quad \delta u_p = \gamma \cdot \delta u \quad (28)$$

Można zatem podać wzór na całkę wariacji potencjału dyssypacyjnego jako:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta D(\dot{u}_p) dx dt = - \rho \cdot \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (\ddot{u} \cdot \delta u) dx dt \quad (29)$$

Biorąc ponadto pod uwagę, że wariacja przemieszczenia całkowitego oraz wariacja przemieszczeń sprężystego i plastycznego wyrażone są przez $\delta u = \delta u_s + \delta u_p$, otrzymuje się $\delta u_s = \delta u - \delta u_p = (1 - \gamma) \cdot \delta u$. Ostatecznie więc można podać wyrażenie określające wariację funkcjonału Hamiltona dla rozważanego układu:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [EA(-u'' + \alpha \cdot \Delta T') \delta u + r(u_s)(1 - \gamma) \delta u + \rho \cdot \gamma^2 \ddot{u} \cdot \delta u] dx dt = 0 \quad (30)$$

oraz po wyciągnięciu δu przed nawias i przekształceniach otrzymuje się równanie różniczkowe Eklera, będące równaniem reologicznym rozważanego układu:

$$EAu'' - \rho \cdot \gamma^2 \ddot{u} - (1 - \gamma)r(u_s) = EA\alpha \cdot \Delta T' \quad (31)$$

lub po wykorzystaniu wzoru na $r(u_s)$ równanie powyższe jest przepisane w postaci:

$$EAu'' - \rho \cdot \gamma^2(u) \cdot \ddot{u} - (1 - \gamma(u))(1 - \lambda(u))r_{\max} = EA\alpha \cdot \Delta T' \quad (32)$$

oraz po wprowadzeniu następujących oznaczeń:

$$\psi(u) = \gamma^2(u), \quad \lambda(u) = \frac{k(u)}{k(u_p)} \quad \text{oraz} \quad \varphi(u) = (1 - \gamma(u))(1 - \lambda(u)) \quad (33)$$

otrzymuje się przekształcone równanie reologiczne o postaci:

$$u'' - \frac{\rho}{EA} \psi(u) \cdot \ddot{u} - \frac{r_{\max}}{EA} \varphi(u) = \alpha \cdot \Delta T' \quad (34)$$

Warunki brzegowe oraz początkowe są określone jako:

$$\begin{aligned} u(x = x_1, t) = u_1(t) \wedge u(x = x_2, t) = u_2(t) \\ u(x, t = 0) = u_o(x) \wedge \dot{u}(x, t = 0) = v_o(x), \end{aligned} \quad (35)$$

gdzie:

x_1, x_2 - początek i koniec rozważanego odcinka toru,

$u_o(x)$ - przemieszczenie początkowe (np. powstałe po ułożeniu toru),

$v_o(x)$ - prędkość początkowa przemieszczenia podłużnego,

$\Delta T' = \frac{\partial \Delta T(x, t)}{\partial x}$ - funkcja ta stanowi obciążenie układu.

Przyrost temperatury jest określony jako różnica pomiędzy temperaturą bieżącą szyn a temperaturą przytwierdzenia $\Delta T(x, t) = T_{bież}(x, t) - T_{przytw}(x, t_o)$, gdzie t_o chwila początkowa (np. przytwierdzenie szyn).

4. Dyskusja uzyskanego równania reologicznego

Przed rozwiązaniem niniejszego równania zbadane zostaną jego szczególne przypadki (przypadki graniczne). W tym celu ustalony zostanie zakres zmienności funkcji $\gamma(u)$, $\psi(u)$ oraz $\varphi(u)$, które zależą od parametrów sterujących modelu: sztywności początkowej k_o , oporu maksymalnego (asymptotycznego) r_{\max} oraz współczynnika odciążenia η :

$$\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{dla } \eta = 1 \quad \text{Odciążenie nieliniowe po tej samej krzywej co} \\ & \text{obciążenie, brak dyssypacji, } u_p = 0 \\ 1 - \frac{k(u)}{k_o} & \text{dla } \eta = 0 \quad \text{Odciążenie liniowe, największa dyssypacja} \\ & u_p \rightarrow \max \end{array} \right\} \quad (36)$$

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{k(u)}{k_o} & \text{dla } \eta = 1 \quad u_p = 0 \Rightarrow k(u_p) = k_o \\ \frac{k(u)}{k(u_p)} & \text{dla } \eta = 0 \quad u_p \rightarrow \max \end{array} \right\} \quad (37)$$

W związku z tym funkcja $\varphi(u)$ przyjmuje następujące wartości:

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1 - \frac{k(u)}{k_o} & \text{dla } \eta = 1 \\ \frac{k(u)}{k_o} \left(1 - \frac{k(u)}{k(u_p)} \right) & \text{dla } \eta = 0 \end{cases} \quad (38)$$

Biorąc pod uwagę, że $k(u) \leq k_o \Rightarrow \frac{k(u)}{k_o} \leq 1$ oraz $k(u) \leq k(u_p)$, bo $u_p \leq u \Rightarrow$

$\frac{k(u)}{k(u_p)} = \lambda \leq 1$, otrzymuje się zakres zmienności funkcji $\varphi(u) \in [0 \div 1]$. Wartość zero funkcja

ta przyjmuje tylko dla zerowych przemieszczeń (np. na początku ruchu układu). Podobnie funkcja $\psi(u) \in [0 \div 1]$. Można także pokazać, że równanie reologiczne staje się albo zwykłym równaniem równowagi w kierunku podłużnym dla przypadku liniowo-sprężystego

$$u'' - \frac{k_o}{EA} u = \alpha \cdot \Delta T', \text{ albo równaniem nieliniowym } u'' - \frac{r_{\max}}{EA} \left(1 - \frac{k(u)}{k_o} \right) = \alpha \cdot \Delta T' \quad (39)$$

5. Rozwiązanie

Zaproponowane równanie reologiczne będzie rozwiązane w następujących etapach:

- sformułowanie przyrostowe oraz ustalenie wartości początkowych $\psi(u)$ oraz $\varphi(u)$,
- rozwiązanie metodą Fouriera dla przyjętego przyrostu obciążenia,
- obliczenie poprawek dla funkcji nieliniowych na podstawie wstępnie uzyskanej funkcji przemieszczenia oraz ponowne rozwiązywanie równania (jest to proces iteracyjny kończący się w momencie uzyskania zakładanej dokładności),
- uaktualnienie przemieszczeń oraz przejście do następnego kroku obciążenia (tzn. ustalenie wartości funkcji nieliniowych i powrót do kroku pierwszego procedury rozwiązywania) itd. aż do zrealizowania całego programu obciążenia.

Najpierw jest obliczony przyrost $\varphi(u)$ oraz wprowadzone są nowe funkcje:

$$\Delta \varphi_i \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u_i} \Delta u_i = \Phi_i^* \cdot \Delta u_i, \quad \text{oraz } \Phi_i = \frac{r_{\max}}{EA} \Phi_i^*, \quad \Psi_i = \frac{\rho}{EA} \psi(u_i) \quad (40)$$

Otrzymuje się równanie przyrostowe równowagi dla jednego kroku obciążenia i :

$$\Delta u_i'' - \Psi_i \cdot \Delta \ddot{u}_i - \Phi_i \cdot \Delta u_i = \Delta \delta_i(t) \cdot \text{grad} T_\alpha(x), \quad (41)$$

gdzie Ψ_i oraz Φ_i jako wartości funkcji $\psi(u_i)$ oraz pochodnej $\varphi(u_i)$ będą podlegały poprawkom iteracyjnym zgodnie z procedurą zbliżoną do metody Newtona-Raphsona.

Funkcja obciążenia jest dana jako $\text{grad} T_\alpha(x) = \alpha \cdot \frac{\partial \Delta T}{\partial x}$, a $\Delta \delta_i(t)$ jest przyrostem jego amplitudy dla danego kroku obciążenia, przy czym wymaga się, aby $\text{grad} T_\alpha(x) \in [0 \div 1]$ w celu sterowania jedynie parametrem $\Delta \delta_i(t)$. Równanie reologiczne cząstkowe jest rozwiązane z wykorzystaniem metody funkcji własnych dla danego kroku obciążenia:

$$\Delta u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(t) \cdot X_n(x)}{\int_0^l X_n^2(x) dx}, \quad (42)$$

gdzie $X_n(x)$ są liniowo niezależnymi funkcjami własnymi równania powstałego po

rozdzieleniu zmiennych $\Delta u_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$, spełniającymi równanie $X_n'' + \lambda_n^2 X_n = 0$ oraz warunki brzegowe $X_n(0) = X_n(l) = 0$.

Po przekształceniach otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne na wyznaczenie funkcji $u_n(t)$:

$$\ddot{u}_n + k_n^2 \cdot u_n = -\frac{2}{l \cdot \Psi_i} \Delta \delta_i(t) \int_0^l \text{grad} T_\alpha X_n dx, \quad (43)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $k_n^2 = \frac{\Phi_i + \lambda_n^2}{\Psi_i}$. Indeks i oznacza krok obciążenia.

Powyższe równanie różniczkowe jest równaniem zwyczajnym o stałych współczynnikach, które może być rozwiązane np. metodą uzmienniania stałych. Parametr obciążenia termicznego δ_i oraz jego przyrost $\Delta \delta_i$ dla ustalonej chwili czasu t , są określone jako:

$$\delta_i = A_T \frac{1}{2} \left[1 + \sin \left(\omega t_i - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (44)$$

gdzie A_T jest amplitudą temperatury a ω częstością kołową zmian temperatury oraz

$$\Delta \delta_i = \delta_i - \delta_{i-1} = A_T \frac{1}{2} \left[\sin \left(\omega t_i - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\omega t_{i-1} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (45)$$

6. Przykłady obliczeń

Przyjęto następujący rozkład temperatury we współrzędnej x :

$$\Delta T(x) = \left. \begin{array}{l} 1 \quad \text{dla} \quad x \in [0 \div x_o - \Delta x] \\ \frac{-x + x_o + \Delta x}{2\Delta x} \quad \text{dla} \quad x \in [x_o - \Delta x \div x_o + \Delta x] \\ 0 \quad \text{dla} \quad x \in (x_o + \Delta x \div l] \end{array} \right\}, \quad (46)$$

gdzie „środek” obciążenia termicznego jest w punkcie $x = x_o$, zakres zmian temperatury wynosi $2\Delta x$. Gradient obciążenia termicznego można napisać jako:

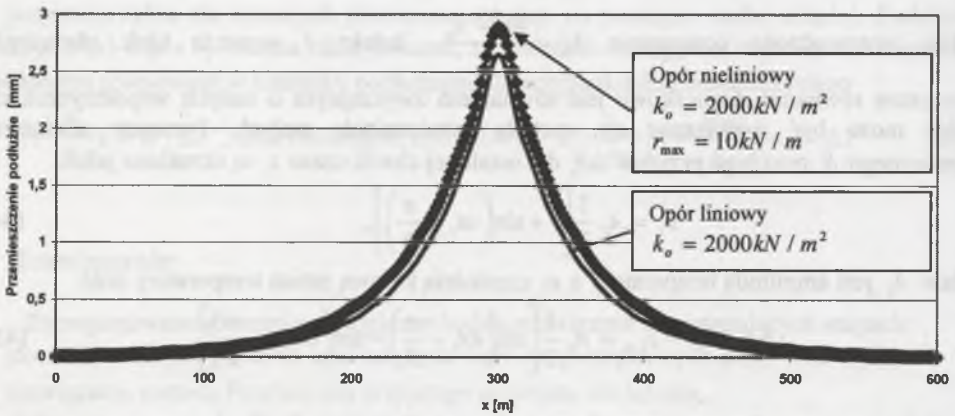
$$\text{grad} T_\alpha = \alpha \frac{\partial \Delta T(x)}{\partial x} = \left. \begin{array}{l} 0 \quad \text{dla} \quad x \in [0 \div x_o - \Delta x] \\ -\frac{\alpha}{2\Delta x} \quad \text{dla} \quad x \in [x_o - \Delta x \div x_o + \Delta x] \\ 0 \quad \text{dla} \quad x \in (x_o + \Delta x \div l] \end{array} \right\} \quad (47)$$

Dla podanego obciążenia wykonano szereg obliczeń. Dane zestawiono w tabl.1.

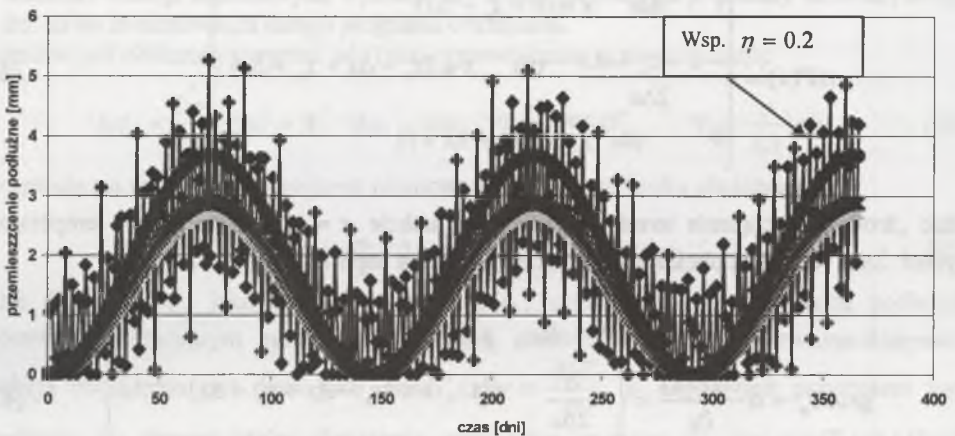
Tablica 1

Dane do obliczeń

Szyny: UIC 60				
Opór podłużny				
$k_o = 1000 + 4000 \text{ kN/m}^2$	$r_{\max} = 10 \text{ kN/m}$	$\eta = 0.2 + 0.8$	$\rho = 1.67 \cdot 10^{10} \text{ Ns/m}^2$	
Obciążenie termiczne				
$A_T = 10^\circ \text{C}$	$x_o = 300 \text{ m}$	$\Delta x = 0 + 10 \text{ m}$	przyrost $\delta\Delta T = 1 + 0.3^\circ \text{C}$	$T = 1 + 365 \text{ dni}$
Długość odcinka $l = 600 \text{ m}$				
Krok $dx = 1 + 2 \text{ m}$, liczba wyrazów szeregu: $n_{\max} = 60$				



Rys.2. Przemieszczenie podłużne szyn dla obciążenia termicznego
Fig.2. Longitudinal displacement of railway tracks for thermal load



Rys.3. Zmiany maksymalnego przemieszczenia podłużnego w ciągu roku
Fig.3. Changes of maximum longitudinal displacement during a year

Na rysunku 3 pokazano rozkład przemieszczenia podłużnego wzdłuż osi toru dla dwóch przypadków: oporu liniowego (mniejsze przemieszczenie) oraz dla oporu nieliniowego. Rozkłady te wykonano bez uwzględnienia własności reologicznych układu (niejako „statycznie”). W zakresie liniowym dokonano także obliczeń porównawczych z rozwiązaniami podanymi w [3]. Stwierdzono zgodność wyników z dokładnością do 5%. Na rys.4 pokazano zmiany przemieszczenia maksymalnego dla danych jak na rys.3 (opór nieliniowy) ale z uwzględnieniem własności reologicznych układu (niejako „dynamicznie”). Pojawiają się cykliczne zmiany przemieszczenia podłużnego (maksymalnego) o okresie ok. 150 dni. Dla porównania wykonano obliczenia przy różnych współczynnikach sztywności początkowej k_0 oraz współczynnika odciążenia η . Zwiększenie sztywności początkowej wpływa na zmniejszenie amplitudy przemieszczenia podłużnego a dla małych wartości współczynnika odciążenia ($\eta=0.2$, duża dyssypacja energii) pojawiają się dodatkowe „drgania” wokół położenia równowagi. Okres zmian przemieszczenia nie ulega zmianie.

7. Wnioski

W referacie przedstawiono wstępny model reologiczny toru bezстыkowego oraz wykonano szereg jakościowych analiz. Uzyskano falowe równanie różniczkowe belki torowej z nieliniowym oporem podłużnym bez tłumienia. Równanie uzyskano postulując wprowadzanie pewnej funkcji dyssypacji energii układu równej pracy plastycznej oporu podłużnego. Pojawiła się nowa stała reologiczna, której natura ani wartości nie były dotąd analizowane. Wymaga ona - w związku z tym - interpretacji (a także weryfikacji doświadczalnej) oraz powinien być także określony jej związek z innymi znanymi stałymi reologicznymi. Model powinien także uwzględniać własności tłumiące nawierzchni. Ponadto, w dalszym etapie konieczne jest uwzględnienie charakterystyki przytwierdzeń na pracę nawierzchni. Jeśli chodzi o obciążenie termiczne, konieczne jest wykonanie analiz dla przypadków mających znaczenie praktycznie. Oczywiście, należy także uwzględnić ruch pociągów w bardziej kompleksowym opisie reologicznym. Reasumując, wydaje się, że ogólne podejście do problemu reologicznego jak do problemu dynamicznego prowadzi nieuchronnie do konieczności zastosowania analiz jak dla układów dynamicznych, a szczególnie układów samowzbudnych (np. określenie cykli granicznych).

Literatura

1. Czyżuła W., Jamka M., Sołkowski J.: Wpływ zmienności oporu podłużnego na rozkład sił osiowych w szynach toru bezстыkowego. Monografie Politechniki Krakowskiej, nr 141, Kraków 1992, str. 81-92
2. Czyżuła W., Sołkowski J.: Development of PKP and TU-Kraków computer program for CWR track state analysis, ERRI D202 Report, Utrecht, 1995
3. Czyżuła W.: Tor bezстыkowy. Politechnika Krakowska, Kraków, 2002, str. 82-83
4. Milasinovic D.: Rheological-dynamical analogy: predicting of buckling of columns, *Int.J.Solids and Structures*, no. 37, 2000, p. 3965-4004
5. Milasinovic D.: Rheological-dynamical analogy: modeling of fatigue behaviour. *Int.J.Solids and Structures*, no. 40, 2003, p. 187-217
6. Nowakowicz W.: Reologia bezстыkowo puti, *Žel. Dorogi Mira*, No.12, 1987, str. 5-11