ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

MAREK BRODZKI

OD POJĘĆ MOCY DO METOD OPTYMALIZACYJNYCH W TEORII OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

50 - LECIE
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

P. 3347/96

ELEKTRYKA

z. 146

GLIWICE
1996

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1299

POLITECHNIKA ŚLĄSKA Biblioteka Główna w Gliwicach

P.3347/96

Marek BRODZKI

OD POJĘĆ MOCY DO METOD OPTYMALIZACYJNYCH W TEORII OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

GLIWICE 1996

OPINIODAWCY

Prof. dr hab. Jerzy Klamka
Doc. dr hab. Stanisław Krzemiński

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski
REDAKTOR DZIAŁU – Doc. dr inż. Zofia Cichowska
SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

PL ISSN 0072 - 4688

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44 - 100 Gliwice

Nakł. 110+53 Ark. wyd. 7 Ark druk. 5,75 Papier offset. kl. III 70 x 100, 80 g
Oddano do druku 12. 02. 1996 Podpis. do druku 12. 02. 1996 Druk ukończ. w lutym 1996
Cena 3,50 (35. 000)

Fotokopie, druk i oprawę wykonał " ROLEK", Gliwice, ul. Kazimierza Wielkiego 4

Pracę poświęcam pamięci

moich Rodziców

SPIS TREŚCI

Przedmowa 7

1. Moc chwilowa. Zasada zachowania 9
2. Moc czynna. Potrzeba jej wprowadzenia 11
3. Zagadnienie strat na rezystorze ΔR włączonym szeregowo z odbiornikiem w przypadku przebiegów sinusoidalnych jego prądów i napięć. Moc bierna 14
4. Zagadnienie opisane w punkcie 3 rozpatrywane dla przebiegów odkształconych. Teoria Budeanu wykorzystująca przestrzeń $L_T^{2,C}$. Teoria Czarneckiego związana z przestrzenią L_T^2. Rozkłady ortogonalne funkcji prądów odbiornika. Zagadnienie kompensacji prądu $_ri$ 22
5. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia minimalizacji strat na rezystorze ΔR (p. punkt 3) w przypadku odbiornika dwuzaciskowego i przestrzeni prądowo-napięciowej L_T^2. Przypadek odbiornika (n+1) - zaciskowego 33
6. Łączne potraktowanie zagadnień strat i kształtu prądu odbiornika dwuzaciskowego z zastosowaniem przestrzeni L_T^2 oraz przestrzeni Sobolewa $W_T^{2,\lambda}$. Przebiegi prawie okresowe prądów i napięć odbiornika - przestrzenie B^2, $B^{2,\lambda}$ 44
7. Generalizacja rozważań z punktu 6 na przypadek dowolnej pary sygnałowych przestrzeni Hilberta H, I 54
8. Zakres stosowalności teorii rozważanych mocy 58
9. Układ o m wydajnikach, n odbiornikach wraz z kompensatorami dołączonymi równolegle oraz elemencie przekazującym energię do odbiorników. Przypadek łącznego potraktowania strat układu przekazującego energię oraz kształtu prądów odbiorników z użyciem dowolnych hilbertowskich przestrzeni sygnałowych. Postawienie problemu 64
10. Układ rozpatrywany w punkcie 9 z kompensatorami łączonymi łańcuchowo wraz z odbiornikami. Oddzielna minimalizacja strat i odstępstw od napięć wzorcowych na odbiornikach. Postawienie problemu 75
11. Podsumowanie oraz uwagi o innych zastosowaniach metod optymalizacyjnych w teorii obwodów 81

Literatura 84

CONTENTS

Preface 7

1. Instantaneous power. The principle of power conservation 9
2. Active power - the necessity of introducing it 11
3. Problems of power losses in a resistor ΔR connected to a load in series for sinusoidal waveforms of currents and voltages of this resistor. Reactive power 14
4. Problem described in item 3 for distorted waveforms. Budeanu theory using the space $L_T^{2,C}$. Czarnecki's theory related to the space L_T^2. Orthogonal distributions of the function of load currents. Problem of current ,i compensation 22
5. Stating and solving a minimization problem of power losses in the resistor ΔR (see item 3) in case of two-terminal load and the current-voltage space L_T^2. The case of (n+1) - terminal load 33
6. Joint treatment of problems dealing with two-terminal load current shape and power losses using L_T^2 and Sobolev $W_T^{2,\lambda}$ spaces. Waveforms of load currents and voltages almost periodic - the spaces B^2 and $B^{2,\lambda}$ 44
7. Generalization of considerations from item 6 in case of any pair of signal Hilbert spaces H, I. 54
8. Range of application of the theory formulated for the considered powers 58
9. Network with m sources, n loads with compensators connected in parallel and an element transferring energy to the loads. The case of joint treatment of the element power losses and the shape of the load currents by applying any signal Hilbert spaces. Stating a problem 64
10. Network considered in item 9 with cascade connection of the compensators and loads. Separate minimization of losses and load voltage deviations from the standard values of voltages. Stating a problem. 75

11. Summary and some remarks on other applications of optimization methods in the electric circuit theory. 81

References 84

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

1. Мгновенная мощность. Принцип сохранения 9

2. Активная мощность - необходимость ее введения 11

3. Вопрос потерь на резисторе ΔR включенным последовательно с приемником в случае синусоидальных графиков его токов и напряжений. Реактивная мощность. 14

4. Вопрос описан в главе 3, рассматриваемый для деформированных графиков. Теория Будеану использующая пространство $L_T^{2,C}$. Теория Чарнецкого связанная с пространством L_T^2. Ортогональные распределения функций токов приемника. Вопрос компенсации тока 22

5. Постановка и решение вопроса минимизации потерь на резисторе ΔR (см. глава 3) в случае приемника с двумя зажимами и вольт-амперного пространства L_T^2. Случай приемника с $(n+1)$ зажимами 33

6. Совместное рассматривание вопроса потерь и формы тока приемника с двумя зажимами с применением пространства L_T^2 и пространства Соболева $W_T^{2,\lambda}$. Почти периодические графики токов и напряжений приемника - пространства B^2, $B^{2,\lambda}$ 44

7. Обобщение рассуждений с главы 6 на случай любой пары сигнальных пространств Гильберта H, I 54

8. Область применения теории рассуждаемых мощностей 58

9. Схема с m источниками, n приемниками вместе с параллельно подключенными компенсаторами и с элементом передающим энергию приемникам. Случай совместного рассматривания потерь схемы передающей энергию и формы токов приемников с применением любых гильбертовых сигнальных пространств. Постановка вопроса 64

10. Схема рассматриваемая в главе 9 с цепочно соединяемыми компенсаторами вместе с приемниками. Раздельная минимизация потерь и отклонений от эталонных напряжений на приемниках. Постановка вопроса 75

11. Подведение и замечания о других применениях оптимизационных методов в теории цепей 81

Литература 84

PRZEDMOWA

Zagadnienie definiowania rozmaitych mocy sięga początków teorii elektrotechniki. Najbardziej podstawowymi są moc chwilowa oraz moc czynna. Potrzeba ich wprowadzenia jest niewątpliwa i od nich też rozpoczniemy nasz wykład. Następnie pojawiły się zagadnienia strat występujących podczas przesyłu energii do odbiorników oraz jakości tej energii. W najprostszej wersji problem polega na zminimalizowaniu tych strat przy zadanej mocy czynnej, jaką pobiera odbiornik. Oczywiście, sformułowanie to wymaga uściślenia ze względu na rodzaj przebiegów napięć i prądów na zaciskach odbiornika oraz liczbę tych zacisków. Jest rzeczą zastanawiającą, jak wiele czasu potrzeba było, by sformułowanie to przełożyć z języka naturalnego na język matematyki! Sukcesy związane z zastosowaniem pojęć mocy chwilowej i czynnej skierowały uwagę większości elektryków na trop poszukiwania jakiejś w miarę uniwersalnej mocy odpowiedzialnej za minimalizację strat i być może jeszcze parę innych rzeczy. Po trosze wokół tego tematu potoczy się dalszy ciąg wykładu. Będzie on kierował uwagę Czytelnika na matematyczną formalizację pojawiających się problemów elektrotechniki. Wychodzimy z założenia, że matematyka jest językiem, którym posługują się elektrycy i szerzej - fizycy. Historia związana z definiowaniem rozmaitych mocy i zagadnieniami optymalizacyjnymi jest w pewnym sensie dowodem na to, że tak należy czynić. Natomiast rozwiązania postawionych problemów optymalizacyjnych pojawią się sporadycznie i tylko wówczas, gdy będą one proste. Wiążą się one z rozwiązywaniem równań (na ogół nieliniowych), których argumenty przebiegają pewne przestrzenie Hilberta. Jest to zagadnienie trudne i powikłane rachunki często zaciemniają prostotę postawionego zadania. W tym momencie odeślemy Czytelnika do prac habilitacyjnych J. Walczaka [25] i M. Paski [21], gdzie rozwiązywane są takie przykłady i podana jest dalsza bogata literatura przedmiotu. Podstawowym problemem, jaki się w takim momencie pojawia, byłoby podanie "rozsądnych" warunków wystarczających na to, by poszukiwane minimum (minima) istniało. Trudności jest tu wiele, a główne biorą się stąd, że nie dysponujemy porządną klasyfikacją operatorów nieliniowych działających w różnych przestrzeniach Banacha i Hilberta (a opisujących elementy rozpatrywanych sieci), ani też jakościową teorią wspomnianych równań.

Wykład można prowadzić zarówno w języku obwodowym, jak i polowym (próbka tego drugiego jest przedstawiona w pracy [3]). Tu ograniczymy się tylko do spraw obwodowych i sygnałów deterministycznych (o ile mi wiadomo, zagadnienia przedstawione w pracy nie

były formułowane dla sygnałów stochastycznych). Zakres matematyki potrzebnej do zrozumienia pracy w zasadzie ogranicza się do elementów teorii przestrzeni Banacha i Hilberta - jednakże wraz z rachunkiem różniczkowym uprawianym w tych przestrzeniach. Jest ciekawe, że pojawiają się tu problemy teorii obiektów geometrycznych występujących na nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta. O tych sprawach, należących do geometrii różniczkowej, jedynie wspomnimy. Nie mniej ciekawe jest, że optymalizacja rozumiana jako minimalizacja strat lub minimalizacja odstępstwa napięcia na odbiorniku od pożądanego wzorca stanowi fragment znacznie szerszej rodziny zagadnień optymalizacyjnych związanych z syntezą układów zarówno liniowych, jak i nieliniowych. Wystarczy wyobrazić sobie, że określamy odstępstwo w sensie normy lub ogólniej metryki pomiędzy funkcjami przejścia (elementów liniowych), czy też operatorami (elementów nieliniowych) działającymi w pewnych przestrzeniach Banacha lub Hilberta sygnałów wejściowych i wyjściowych. Jeden operator zadany jest poprzez postawienie samego zadania syntezy - tzn. chcemy go przynajmniej w przybliżeniu osiągnąć; drugi przybliżający go, realizowany jest poprzez dobór pewnych parametrów przebiegających np. przestrzeń R^n lub l^2. Zagadnienie optymalizacji polega na zminimalizowaniu tego odstępstwa w funkcji ww. parametrów, być może krępowanych pewnymi dodatkowymi warunkami. Aby rozumowanie to funkcjonowało poprawnie, trzeba, by przestrzeń operatorów (rozumiana jako pewna przestrzeń topologiczna) była przynajmniej metryzowalna. Jeszcze bardziej frapujące jest, jak poradzić sobie z tak rozumianą optymalizacyjną syntezą, gdy przestrzeń ta nie jest metryzowalna. Lecz w niniejszej pracy syntezą zajmować się nie będziemy, jakkolwiek pewne zagadnienia syntezy pojawią się w niej.

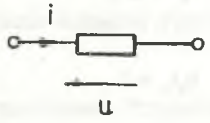
Źródła omawianych zagadnień mieszczą się, przynajmniej częściowo, w elektroenergetyce. Jednakże spoglądamy na nie z punktu widzenia teorii elektrotechniki i zastosowań analizy funkcjonalnej.

Praca przedstawiona Czytelnikowi powstała na podstawie mojego rękopisu ukończonego w 1991 r. i służącego (w kopiach kserograficznych) studentom za pomoc dydaktyczną w zgłębianiu wybranych działów teorii elektrotechniki. Z kolei rękopis ten poprzedziła współpraca z dr hab. J. Walczakiem, dr hab. M. Pasko i dr M. Bortliczkową w ramach pracy zleconej poświęconej częściowo opisywanym zagadnieniom optymalizacji. Wykaz literatury zawiera wyłącznie pozycje cytowane w tekście.

Gliwice, 1995 r.

1. MOC CHWILOWA. ZASADA ZACHOWANIA

Jedną z podstawowych wielkości natury energetycznej wprowadzanych w teorii obwodów jest moc chwilowa. Jeśli mamy element dwuzaciskowy (rys. 1) o napięciu opisanym funkcją u:R→R i prądzie i:R→R,



Rys.1. Element dwuzaciskowy

Fig.1. A two-terminal element

to przypisujemy mu moc chwilową

$$p=ui. \tag{1}$$

Kojarzy się ona z energią $W(t,t_0)$ pobraną przez ten element w pewnym przedziale czasu np. $<t_0;t>$

$$W(t,t_0)=\int_{t_0}^{t} u(\tau)\frac{dq}{dt}(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau,\quad \left(i(\tau)=\frac{dq}{dt}(\tau)\right), \tag{2}$$

jeśli tylko funkcja p jest lokalnie całkowalna na każdym przedziale domkniętym [23, s. 399, 404]. Różniczkując wzór (2) (funkcja $W(\cdot,t_0)$ jest bezwzględnie ciągła i różniczkowalna prawie wszędzie), mamy w punktach ciągłości funkcji p:

$$p(t)=\frac{dW(\cdot,t_0)}{dt}(t),\quad (W(\cdot,t_0)(t)=W(t,t_0)), \tag{3}$$

czyli możemy interpretować moc chwilową jako szybkość pobierania energii przez odbiornik.

Moc chwilowa jest wielkością zachowawczą. Dedukujemy to prosto z obu praw Kirchhoffa (por.[10, s. 42]). Zapiszmy mianowicie II prawo Kirchhoffa z użyciem macierzy oczkowej $\underset{t}{b}=[\underset{t}{b}_{kg}]$

$$b_{gk}u_g=0, \tag{4}$$

gdzie wskaźnik $g\in G$ numeruje gałęzie sieci i jest we wzorze (4) wskaźnikiem sumacyjnym (przyjmujemy tu umowę sumacyjną dla wskaźników powtarzających się w iloczynie), a wskaźnik $k\in K$ - oczka niezależne. Znak t przy macierzy b oznacza jej transpozycję.

Przemnóżmy równanie (4) przez funkcję I_k (prąd k-go oczka) sumując podług wskaźnika k. Mamy wówczas:

$$b_{gk} I_k u_g = 0. \tag{5}$$

Lecz prądy gałęziowe powiązane są z oczkowymi wzorem (I prawo Kirchhoffa w postaci parametrycznej)

$$i_g = b_{gk} I_k , \tag{6}$$

więc

$$u_g i_g = 0, \tag{7}$$

czyli

$$\sum_{g \in G} p_g = 0. \tag{8}$$

Wzór (8) stanowi, oczywiście, poszukiwaną zasadę zachowania mocy chwilowej. Mówimy o zasadzie zachowania, ponieważ moc ta jest wielkością addytywną i suma mocy chwilowych przypisywanych poszczególnym gałęziom jest dla każdego momentu czasu wielkością stałą (tu równą zeru). Taką postać mają zasady zachowania mechaniki. Addytywność jest bardzo wygodna, ponieważ pozwala bilansować moce chwilowe poszczególnych elementów. Na przykład gdyby podzielić elementy na wydajniki (napięcie orientuje gałąź zgodnie z prądem) i odbiorniki (przeciwnie, tzn. jak na rys. 1), to ze wzoru (8) otrzymujemy:

$$\sum_{g \in G_w} p_g = \sum_{g \in G_o} p_g , \tag{9}$$

gdzie zbiory G_w , G_o są zbiorami wskaźników oznaczających odpowiednio wydajniki i odbiorniki.

Moc chwilowa posiada swój pierwowzór polowy (pole wektorów Poyntinga), który informuje nie tylko o szybkości pobierania energii przez odbiornik, ale również o tym, ile energii w jednostce czasu przepływa przez element powierzchni ograniczającej odbiornik. Tym ujęciem polowym, jak i zasadami zachowania, które mu towarzyszą, nie będziemy się jednak w niniejszej pracy zajmować, odsyłając Czytelnika do prac polowych np.[11].

2. MOC CZYNNA. POTRZEBA JEJ WPROWADZENIA

Po lekturze punktu 1 spostrzegamy, że moc chwilowa daje nam pełne informacje (przynajmniej na gruncie stałych skupionych) o wymianie energii pomiędzy elementami sieci. Powstaje wobec tego pytanie: czym zajmuje się teoria mocy i po co ją uprawiać? W sporej mierze odpowiedź na to pytanie polega na tym, że nie tylko brak informacji o rozpatrywanym obiekcie uniemożliwia stworzenie rozsądnej jego teorii - czasem jej nadmiar potrafi też być szkodliwy.

Zilustrujemy to prostym przykładem. Przypuśćmy, że mamy pewien element, przez który przepływa prąd elektryczny i wydziela się w nim ciepło. Element ten pod względem termicznym traktujemy jako stałą skupioną (nie interesujemy się przestrzennym rozkładem jego temperatury). Sporządzamy bilans ciepła umożliwiający nam wyznaczenie temperatury elementu (w funkcji czasu). W bilansie tym bierze udział ciepło wydzielane podczas przepływu prądu w czasie Δt, ciepło zakumulowane w tym czasie oraz odprowadzone na zewnątrz na drodze przewodzenia. W znany sposób otrzymujemy więc równanie różniczkowe dla funkcji czasowej temperatury elementu τ: $R \rightarrow R$:

$$mc\frac{d(\Delta\tau)}{dt}(t) + k_p \Delta\tau(t) = p(t),$$
$$\Delta\tau(t) = \tau(t) - \tau_{ot}, \tag{10}$$

gdzie

m - masa elementu,

c - jego ciepło właściwe,

k_p - współczynnik przewodzenia ciepła do otoczenia,

τ_{ot} - temperatura otoczenia (stała).

Można by w tym momencie pomyśleć np. o żarówce, tylko wtedy należałoby uwzględnić ciepło oddawane na drodze promieniowania, czego nie chcemy czynić, aby uzyskać równanie różniczkowe liniowe. Przypuśćmy w dalszym ciągu, że prąd płynący przez włókno żarówki jest odkształcony (okresowy) i podany szeregiem trygonometrycznym

$$i(t) = J_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} J_h\, e^{jh\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{11}$$

(Ze względu na tradycję, dla wskaźników numerujących harmoniczne nie przyjmujemy umowy sumacyjnej.) Załóżymy, że:

$$|J_h| \le \frac{J}{h^\alpha}\ ,\ J \in R\ ,\ \alpha \in R\ ,\ \alpha > 1 \text{ dla } h \in N\ . \tag{12}$$

Założenie to umożliwia stosowanie zasady superpozycji odnośnie do harmonicznych (bez używania pojęcia dystrybucji) podczas rozwiązywania równania różniczkowego (10) (por. [10, s. 92-98]). Wówczas jeśli mamy do czynienia z liniowym opornikiem o rezystancji R, to:

$$p(t) = R\Big(\sum_{h=0}^{\infty} |J_h|^2 + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h \ne k}}^{\infty} |J_h||J_k| \cos\big((h-k)\omega t + \varphi_h - \varphi_k\big) + \tag{13}$$

$$+ \sum_{h,k=1}^{\infty} |J_h||J_k| \cos\big((h+k)\omega t + \varphi_h + \varphi_k\big) + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2}\, J_0 |J_h| \cos\big(h\omega t + \varphi_h\big) \Big).$$

Wprowadzając wspólną numerację w drugiej i trzeciej sumie wzoru (13) zapisujemy go:

$$p(t) = R\Big(i_{sk}^{\,2} + \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{l=1}^{\infty} A_l\, e^{jl\omega t}\Big)\ . \tag{14}$$

Stosując zasadę superpozycji do równania (10) (łącznie z metodą symboliczną odnośnie do funkcji temperatury i mocy chwilowej) mamy:

$$\Delta\tau_0 = \tau_0 - \tau_{0t} = \frac{R\, i_{sk}^2}{k_p},$$

$$\Delta\tau_l = \tau_l = R\frac{A_l}{k_p} \frac{1}{1 + 2\pi l \frac{T_{ter}}{T} j}\ ,\ l \ge 1, \tag{15}$$

gdzie

$$T_{ter} = \frac{mc}{k_p}\ . \tag{16}$$

Jeśli teraz zajdzie przypadek:

$$\frac{T_{ter}}{T} >> 1\ ,\ \ J \approx |J_0|\ , \tag{17}$$

to mamy

$$|\Delta\tau_l| << \Delta\tau_0\ \ ,\ \ l \ge 1 \tag{18}$$

i w pomiarze temperatury można uwzględniać jedynie składową stałą $\Delta\tau_0$. Ta z kolei określona jest w pełni poprzez podanie wartości skutecznej prądu i. Wówczas niepotrzebna jest też znajomość mocy chwilowej p: R→R, a wystarczy znać tylko czynną $P \in R$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = R\, i_{sk}^2 \quad . \tag{19}$$

Czyli znajomość funkcji p zastąpiliśmy o wiele uboższą informacją, polegającą na znajomości stałej P. (Łatwo zorientować się, że istnieje nieskończenie wiele przebiegów mocy chwilowej, dla których moc czynna jest taka sama.) Oczywiście, gdyby warunek (17) nie był spełniony, nasze rozumowanie traci ważność. Istotą jego jest to, że bezwładność termiczna, wyrażająca się termiczną stałą T_{ter}, spełnia pierwszą część tego warunku. Czytelnik może przenieść istotę tego przykładu na rozmaite układy elektromechaniczne (o dostatecznie dużej bezwładności mechanicznej), w których obserwujemy np. prędkość kątową jakiegoś elementu.

Mamy więc pewną klasę przykładów uzasadniających potrzebę wprowadzenia mocy czynnej.

Zakładając, że mamy do czynienia z przebiegami okresowymi (o okresie T) o całkowalnych kwadratach funkcji prądów i napięć rozpatrywanych elementów i działając na obie strony równania (8) operacją $\frac{1}{T}\int_0^T$, mamy jako natychmiastowy wniosek stwierdzenie zachowawczości mocy czynnej. Czyli:

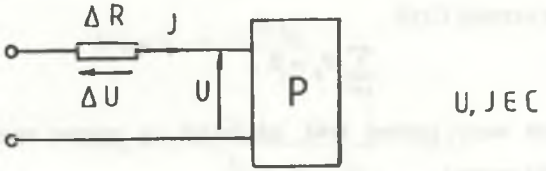
$$\sum_{g \in G} P_g = 0 \quad . \tag{20}$$

Motywacja pojęcia mocy czynnej tkwi, jak widać, w samym sposobie działania odbiorników energii elektrycznej.

3. ZAGADNIENIE STRAT NA REZYSTORZE ΔR WŁĄCZONYM SZEREGOWO Z ODBIORNIKIEM W PRZYPADKU PRZEBIEGÓW SINUSOIDALNYCH JEGO PRĄDÓW I NAPIĘĆ. MOC BIERNA

Powstaje teraz inny problem. Urządzenia doprowadzające energię do odbiornika powodują jej straty, które oczywiście, chcielibyśmy jak najbardziej ograniczyć. Aby to osiągnąć, trzeba znaleźć jakąś wygodną ich miarę i zdecydować, kiedy dostarczenie pewnej mocy czynnej do odbiornika powoduje najmniejsze straty.

Zacznijmy od analizy najprostszego przypadku. Mamy pojedynczy dwuzaciskowy odbiornik o przebiegach sinusoidalnych prądów i napięć na jego zaciskach pobierający moc czynną P. Wspomniane straty reprezentuje opornik o rezystancji ΔR włączony w szereg z odbiornikiem (rys. 2).



Rys.2. Dwuzaciskowy odbiornik energii z włączonym szeregowo rezystorem odpowiedzialnym za straty energii doprowadzanej do odbiornika

Fig.2. A two-terminal load with a resistor connected to it in series responsible for the losses of energy supplied to the load

("C" oznacza zbiór liczb zespolonych.)

Zakładamy, że napięcie ΔU spełnia nierówność

$$|\Delta U| << |U|, \tag{21}$$

tzn. zasilanie odbiornika traktujemy w przybliżeniu jako "sztywne" i zgodnie z tym

prowadzimy w dalszym ciągu rozważania tak, jak gdyby odbiornik zasilany był przez SEM. Napięcie i prąd wyrażamy poniżej :

$$u(t) = \sqrt{2}\, C \cos \omega t + \sqrt{2}\, D \sin \omega t, \quad U = C - jD, \tag{22}$$

$$i(t) = \sqrt{2}\, A \cos \omega t + \sqrt{2}\, B \sin \omega t, \quad J = A - jB. \tag{23}$$

Wówczas straty w oporniku o rezystancji ΔR wynoszą:

$$\Delta P = \Delta R\, |J|^2 = \Delta R(A^2 + B^2), \quad \Delta R > 0. \tag{24}$$

Nasz problem polega więc na minimalizacji funkcji o wartości

$$f(A, B) = A^2 + B^2 \tag{25}$$

przy warunku ubocznym

$$g(A,B)=P-CA-DB=0\,, \tag{26}$$

ponieważ korzystając z definicji (19) mocy czynnej otrzymujemy dla odbiornika

$$P=CA+DB\,. \tag{27}$$

Zagadnienie to rozwiążemy metodą nieoznaczonego czynnika Lagrange'a [17, s.151,152].

Warunkiem koniecznym występowania minimum związanego funkcji f w punkcie $M_0 = (A_0, B_0)$ jest spełnienie w tym punkcie równań

$$\partial_A f(M) + \lambda\, \partial_A\, g(M) = 0\,, \quad M = (A, B), \tag{28}$$

$$\partial_B\, f(M) + \lambda\, \partial_B\, g(M) = 0\,, \quad \lambda \in R \tag{29}$$

oraz warunku

$$g(M)=0\,. \tag{30}$$

Równania (28), (29) dają:

$$A = \lambda \frac{C}{2}\,, \tag{31}$$

$$B = \lambda \frac{D}{2}\,. \tag{32}$$

Warunek (30) pozwala na wyznaczenie "λ"

$$\lambda_0 = \frac{2P}{C^2 + D^2}\,. \tag{33}$$

Oczywiście zakładamy, że: $C^2+D^2>0$ (czyli, że odbiornik jest zasilany).

Po nieco dłuższych rachunkach, bazujących na obliczeniu w punkcie $M_0 = (A_0, B_0)$ drugich pochodnych cząstkowych funkcji f oraz g [17, s. 151] (które pomijamy), można przekonać się,

że mamy w tym punkcie istotnie do czynienia z minimum strat ΔP. Minimum to występuje dla argumentu prądowego

$$\underset{0}{J} = \frac{\underset{0}{\lambda}}{2} U = \underset{e}{G} U \ , \tag{34}$$

gdzie

$$\underset{e}{G} = \frac{P}{|U|^2} \tag{35}$$

oraz straty wówczas wynoszą

$$\Delta P_{min} = \Delta R \left|\underset{0}{J}\right|^2 \ . \tag{36}$$

Jeżeli odbiornik nie jest czysto rezystancyjny, współczynnik proporcjonalności pomiędzy wartościami zespolonymi skutecznymi jego napięcia i prądu nie musi być rzeczywisty (jak we wzorze (34)) i prąd co do modułu przekracza wówczas pożądaną wartość $\left|\underset{0}{J}\right|$. Spróbujemy znaleźć pewną miarę "odstrojenia" odbiornika od tego minimum prądu - miarę, która miałaby charakter mocy. W tym celu zdefiniujemy tzw. moc symboliczną S (dla przebiegów sinusoidalnych)

$$S = \frac{1}{2T} \int_0^T \underline{U}(t)\, \overline{\underline{J}}(t)\, dt \ , \tag{37}$$

gdzie

$$\underline{U}(t) = \sqrt{2}\, U\, e^{j\omega t} \ , \tag{38}$$

$$\underline{J}(t) = \sqrt{2}\, J\, e^{j\omega t} \ . \tag{39}$$

Wzór (37) daje:

$$S = U\overline{J} = |U||J|\cos\varphi + j|U||J|\sin\varphi \ , \tag{40}$$

$$\varphi = \arg U - \arg J \ .$$

Posługując się wzorem (19) widzimy, że:

$$P = |U||J|\cos\varphi \ . \tag{41}$$

Drugi składnik wzoru (40) oznaczamy literą Q i nazywamy mocą bierną.

$$Q = |U||J|\sin\varphi \ . \tag{42}$$

Mamy więc:

$$S=P+jQ \tag{43}$$

i

$$|S|^2 = |U|^2|J|^2 = P^2 + Q^2 \ . \tag{44}$$

Dysponując wzorem (44) widzimy, że występowaniu minimum "$|J|^2$" (przy stałym "$|U|$") towarzyszy zerowanie się mocy biernej Q. Moc ta stanowi właśnie ów "miernik", o który nam chodzi. Definiując najpierw moc bierną i uzyskując wyrażenie (44) spostrzegamy, że wyniku naszych rozważań minimalizacyjnych można było się domyśleć. Lecz nie zapominajmy, że rozpatrywany przykład jest prosty. W ogólności możemy mieć wiele odbiorników i złożony układ przekazujący do nich energię (w tym również nieliniowy). Przebiegi napięć i prądów nie muszą być sinusoidalne. Wówczas byłoby trudno domyśleć się czegokolwiek, a procedura miminalizacyjna daje się dość łatwo (jeśli chodzi o postawienie problemu) uogólnić na takie przypadki.

Spróbujmy nadać naszemu rozważaniu sens geometryczny. Utwórzmy przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R_c złożoną ze wszystkich funkcji sinusoidalnych napięć i prądów o ustalonej pulsacji ω (patrz wyrażenia (22), (23)), [15, s.11]. Oznaczymy ją $(SIN_\omega, R_c, +, \cdot)$, gdzie "+" oznacza dodawanie funkcji sinusoidalnych, a "$\cdot$" mnożenie ich przez liczby rzeczywiste. Wprowadźmy w tej przestrzeni iloczyn skalarny [15, s. 62, 63]

$$(\,|\,):SIN_\omega \times SIN_\omega \to R \tag{45}$$

z pomocą wzoru podobnego do wzoru (19)

$$(u|i) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt \ . \tag{46}$$

Uporządkowana para $((SIN_\omega, R_c, +, \cdot),(\,|\,))$ staje się wówczas przestrzenią unitarną (spełniającą aksjomatykę iloczynu skalarnego) oraz przestrzenią Hilberta (jest ona zupełna). Postawmy w tej przestrzeni następujące zadanie. Chcemy rozłożyć prąd odbiornika na składową równoległą $_\parallel i$ do napięcia u oraz prostopadłą doń $_\perp i$. Czyli:

$$i = {}_\parallel i + {}_\perp i, \tag{47}$$

$${}_\parallel i = ku, k \in R, , \tag{48}$$

$$(u|_\perp i) = 0 \ . \tag{49}$$

Stąd mnożąc skalarnie obie strony równania (47) przez "u" otrzymujemy (opierając się na wzorach (48), (49)):

$$k = \frac{(u|i)}{(u|u)} . \tag{50}$$

Lecz:

$$(u|i)=P \tag{51}$$

oraz

$$(u|u) = \|u\|^2 = |U|^2 , \quad (U \neq 0) . \tag{52}$$

Czyli:

$$k = \frac{P}{|U|^2} = G_e . \tag{53}$$

(Odwzorowaie o wartości $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$ nazywa się normą wprowadzoną przez iloczyn skalarny i jest identyczne z wartością skuteczną napięcia.) Widzimy więc, że prąd i_0 nazywany prądem aktywnym i oznaczany $_ai$ jest rzutem na kierunek funkcji napięcia u funkcji prądu odbiornika i.

$$_ai = G_e u . \tag{54}$$

Jeśli napiszemy:

$$i(t) = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}(J e^{j\omega t}) , \tag{55}$$

$$J = (G + jB)U , \tag{56}$$

to mamy

$$i(t)=_ai(t) + _ri(t) , \tag{57}$$

gdzie

$$_ai(t) = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\,(GUe^{j\omega t}) , \quad G = G_e , \tag{58}$$

$$_ri(t) = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\,(jBUe^{j\omega t}) . \tag{59}$$

Oczywiście, ponieważ spełnione są wzory (48), (49), to:

$$(_ai|_ri) = 0 , \tag{60}$$

czyli prądy te są do siebie prostopadłe.

Przestrzeń $((SIN_{\omega}, R_c, +, \cdot), (|))$ jest dwuwymiarowa [15, s.14) i przykład związany z rozkładem prądu jest prosty. Przestrzeń ta jest liniowo izometryczna z przestrzenią Hilberta $((R^2,R_c,+,\cdot),(|)_{R^2})$, w której elementami są uporządkowane pary liczb rzeczywistych, np.: (A,B), (C,D); dodawanie ich polega na dodawaniu kolejno pierwszych i drugich elementów par, a mnożenie przez liczby rzeczywiste - na pomnożeniu ich obu. Iloczyn skalarny jest standardowy:

$$((A,B)|(C,D))_{R^2} = AC + BD\,. \tag{61}$$

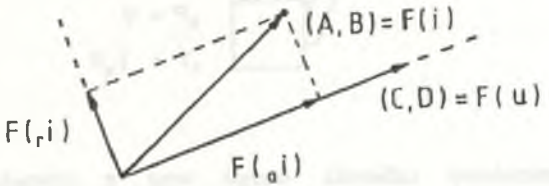
Termin liniowa izometria oznacza, że mamy liniowe odwzorowanie F pierwszej przestrzeni na drugą [15, s.16] przyporządkowujące funkcjom sinusoidalnym

$$SIN_{\omega} \ni \sqrt{2}A\cos\omega(\cdot) + \sqrt{2}B\sin\omega(\cdot) \xrightarrow{F} (A,B) \in R^2\,, \tag{62}$$

uporządkowane pary liczb rzeczywistych. Przyporządkowanie to zachowuje wartość iloczynu skalarnego (i normy), tzn. jeśli funkcje u,i określone są wzorami (22), (23), to:

$$(u|i) = ((C,D)|(A,B))_{R^2} \quad \text{dla} \quad (A,B) = F(i),\ (C,D) = F(u)\,. \tag{63}$$

To upoważnia nas do zilustrowania operacji rzutowania na płaszczyźnie.



Rys.3. Ilustracja operacji rzutowania wektora prądu na kierunek wektora napięcia w przestrzeni R^2

Fig.3. Illustrating the operation of current vector projection on to voltage vector direction in R^2 space

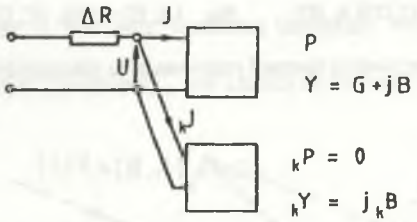
Okaże się, że podobną interpretację geometryczną związaną z wyznaczaniem prądów $_ai$, $_ri$ można będzie zachować w innych nieskończenie wymiarowych przestrzeniach funkcyjnych (np. dla przebiegów okresowych lub prawie okresowych). Wówczas, oczywiście, rys. 3 trzeba traktować mniej dosłownie (tylko jako pewną sugestię dla uprawianej procedury geometrycznej).

Warto zaznaczyć, że moce symboliczna oraz bierna są zachowawcze. Dowód tego faktu jest prawie dosłownym powtórzeniem wzorów od (4) do (8). Różnica polega na tym, że wzór (4) zapisujemy dla zespolonych wartości skutecznych napięć, a odpowiednik wzoru (5) otrzymujemy mnożąc obustronnie wzór (4) przez sprzężone wartości prądów oczkowych. Czyli:

$$\sum_{g\in G} S_g = 0, \tag{64}$$

$$\sum_{g\in G} P_g = 0, \quad \sum_{g\in G} Q_g = 0. \tag{65}$$

W ślad za wyznaczeniem pożądanego prądu odbiornika $_a i$ minimalizującego straty idzie, oczywiście, zagadnienie kompensacji niepotrzebnej części jego prądu. Chcemy ją uzyskać dołączając na zaciski odbiornika element kompensujący nie pobierający mocy czynnej (rys. 4).



Rys.4. Dwuzaciskowy odbiornik energii wraz z równolegle dołączonym kompensatorem

Fig.4. A two-terminal load with a compensator connected to it in parallel

Żądamy minimalizacji wyrażenia

$$\|i + {}_k i - {}_a i\|^2 \tag{66}$$

w funkcji parametru $_k B$. Czytelnik łatwo przeprowadzi odpowiednie rachunki, przekonując się, że minimum zachodzi przy spełnieniu warunku

$$ {}_k B = -B . \tag{67}$$

Jeśli odbiornik jest oporowo-indukcyjny i wówczas $B < 0$, to $_k B > 0$ i mamy wtedy pojemność kompensującą $_k C$

$$\omega {}_k C = |B| . \tag{68}$$

Na skutek zachowawczości mocy biernej widzimy, że całkowita moc bierna pobierana przez odbiornik i kompensator jest równa zeru. Wówczas też wyrażenie (66) przyjmuje wartość równą zeru.

Podsumowując stwierdzamy, że chodzi nam o osiągnięcie dwóch rzeczy: wyznaczyć pożądany prąd aktywny odbiornika i zminimalizować resztę (w sensie kwadratu normy) poprzez dołączenie kompensatora. To, co zostało przedstawione dla pojedyńczego dwuzaciskowego odbiornika z przebiegami sinusoidalnymi prądów i napięć zasilanego źródłem "niemal sztywnym", może być uogólnione na przypadki bardziej złożone. Jak już podkreśliliśmy w zagadnieniu wyznaczania prądu aktywnego, procedura minimalizacyjna przenosi się naturalnie na te przypadki. Czy przeniesie się równie naturalnie pojęcie mocy biernej lub też mocy "odpowiedzialnej" za osiągnięcie optymalnego stanu na zaciskach odbiornika? Zobaczymy, że niestety, na ogół nie.

4. ZAGADNIENIE OPISANE W PUNKCIE 3 ROZPATRYWANE DLA PRZEBIEGÓW ODKSZTAŁCONYCH. TEORIA BUDEANU WYKORZYSTUJĄCA PRZESTRZEŃ $L_T^{2,C}$. TEORIA CZARNECKIEGO ZWIĄZANA Z PRZESTRZENIĄ L_T^2. ROZKŁADY ORTOGONALNE FUNKCJI PRĄDÓW ODBIORNIKA. ZAGADNIENIE KOMPENSACJI PRĄDU $_r$i

Aby móc krótko objaśnić ideę rozumowania Budeanu oraz kontynuować główny nurt naszego wykładu, dobrze będzie (dla wygody Czytelnika) przypomnieć pojęcia przestrzeni unitarnych, unormowanych, metrycznych, Banacha oraz Hilberta. Oczywiście, ograniczymy się do definicji i cytowania pewnych twierdzeń z pominięciem dowodów, zwracając uwagę na potrzebne nam zastosowania.

Definicja 1 [15, s. 62]. Uporządkowaną parę $(H,(\,|\,))$, gdzie "H" oznacza przestrzeń liniową oraz

$$(|):\underline{H}\times\underline{H}\to C\,, \tag{69}$$

nazywamy przestrzenią unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x,y\in\underline{H}}((x|y)=\overline{(y|x)})\,, \tag{70}$$

$$\bigwedge_{x,y,z\in\underline{H}}((x+y|z)=(x|z)+(y|z))\,, \tag{71}$$

$$\bigwedge_{\lambda\in C}\bigwedge_{x,y\in\underline{H}}((\lambda\cdot x|y)=\lambda(x|y))\,, \tag{72}$$

$$\bigwedge_{x\in\underline{H}}((x\neq 0)\Rightarrow((x|x)>0))\wedge((0|0)=0)\,. \tag{73}$$

□

Podkreślenie litery H oznacza utworzenie samego zbioru $\underline{H}$ przestrzeni liniowej $H=(\underline{H},C_c,+,\cdot)$, gdzie "$C_c$" - ciało liczb zespolonych. W szczególności ciało to może być zastąpione ciałem liczb rzeczywistych R_c. Symbol 0 oznacza we wzorze (73) zarówno element zerowy przestrzeni liniowej H, jak i liczbę zero. Kreska pozioma we fragmencie $\overline{(y|x)}$ wzoru (70) oznacza sprzężenie liczby zespolonej. Odwzorowanie $(|)$ nazywamy iloczynem skalarnym.

Definicja 2 [15, s.35]. Uporządkowaną parę $(X,\|\,\|)$, gdzie "X" oznacza przestrzeń liniową oraz

$$\| \| : X \to R \,, \tag{74}$$

nazywamy przestrzenią unormowaną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in X} ((x \neq 0) \Rightarrow (\|x\| > 0)) \wedge (\|0\| = 0) \,, \tag{75}$$

$$\bigwedge_{x,y \in X} (\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|) \,, \tag{76}$$

$$\bigwedge_{\lambda \in C} \bigwedge_{x \in X} (\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \, \|x\|) \,. \tag{77}$$

□

Odwzorowanie $\| \|$ nazywamy normą. Łatwo wykazać [15, s.63], że jeśli w przestrzeni unitarnej zadefiniować odwzorowanie $\| \|$

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \,, \tag{78}$$

to spełnia ono aksjomaty przestrzeni unormowanej.

Definicja 3 [15, s.19]. Uporządkowaną parę (X,ρ), gdzie " X " oznacza pewien zbiór (niekoniecznie zaopatrzony w strukturę przestrzeni liniowej) oraz

$$\rho : X \times X \to R \tag{79}$$

nazywamy przestrzenią metryczną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x,y \in X} (((x \neq y) \Rightarrow (\rho(x,y) > 0)) \wedge (\rho(x,x) = 0)) \,, \tag{80}$$

$$\bigwedge_{x,y \in X} (\rho(x,y) = \rho(y,x)) \,, \tag{81}$$

$$\bigwedge_{x,y \in X} (\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)) \,. \tag{82}$$

□

Warunek (82) nazywamy nierównością trójkąta. Odwzorowanie ρ nazywamy odległością lub metryką.

Jeśli w przestrzeni unormowanej zdefiniować odwzorowanie ρ

$$\rho(x,y) = \|x - y\| \,, \tag{83}$$

to spełnia ono aksjomaty przestrzeni metrycznej.

Definicja 4 [15, s.25]. Ciąg (x_n) elementów przestrzeni metrycznej (x,ρ) spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_o \in N} \bigwedge_{n,m > n_o} (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon) \,. \tag{84}$$

"N" oznacza zbiór liczb naturalnych.

□

Definicja 5 [15, s.25]. Przestrzeń metryczną (X,ρ) nazywamy zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny do pewnego punktu tej przestrzeni.

□

Definicja 6 [15, s.43]. Przestrzeń unormowaną, która jest zupełna (metryka tej przestrzeni określona jest wzorem (83)), nazywamy przestrzenią Banacha.

□

Definicja 7 [15, s.63]. Przestrzeń unitarną (H,(|)), która jest zupełna (metryka jej określona jest wzorem (83), a norma wzorem (78)), nazywamy przestrzenią Hilberta.

□

Skonstruujmy teraz dwa przykłady przestrzeni Hilberta, które będą odgrywały dla nas podstawową rolę.

Pierwszy z nich dotyczyć będzie funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej okresowych (o okresie T), które będą miały całkowalny kwadrat na przedziale domkniętym $< 0;T >$. Chodzi tu o całkę w sensie Lebesgue'a [24, rozdz.VI, VII, VIII]. Czyli zakładamy, że:

$$\int_0^T f^2(t)dt < \infty \ . \tag{85}$$

Na podstawie nierówności $(f(t)+g(t))^2 \le 2(f^2(t)+g^2(t))$ wykazujemy, że jeśli funkcje f i g spełniają warunek (85), to i suma f+g spełnia go też. Oczywiście, iloczyn funkcji, spełniającej warunek (85), przez dowolną liczbę rzeczywistą też go spełnia. Czyli mamy do czynienia z przestrzenią liniową $(\underline{L}^2_T, R_c, +, \cdot)$. Iloczyn skalarny definiujemy wzorem

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt \ . \tag{86}$$

Na podstawie nierówności $|f(t)g(t)| \le \frac{1}{2}(f^2(t)+g^2(t))$ całka ta, dla funkcji f i g o całkowalnych kwadratach, istnieje. Czyli przy interpretacji "f " jako "u" oraz "g" jako "i" mamy wzór (46), określający moc czynną pobieraną przez element o napięciu u i prądzie i (rys. 1). Lecz teraz ważność wzoru (46) została rozszerzona na przebiegi okresowe o całkowalnym kwadracie. Powyższą interpretację napięciowo-prądową traktujemy bezwymiarowo. O możliwości pomijania wymiarów można dowiedzieć się z publikacji [2]. Łatwo przekonać się, że aksjomaty (70), (71), (72), przy takiej interpretacji elementów $(\underline{H}, C_c, +, \cdot)$, (|), są spełnione. Aby był spełniony aksjomat (73), należy zamiast funkcjami

operować klasami funkcji [f] różniących się na zbiorze miary (Lebesgue'a) zero, czyli równymi prawie wszędzie. Wówczas elementem zerowym naszej przestrzeni liniowej jest klasa [0] i pierwszy element koniunkcji występującej w aksjomacie (73) jest prawdziwy. Dla uproszczenia będziemy klasy funkcji oznaczać tak samo, jak poszczególne funkcje reprezentujące dane klasy. Można wykazać [15, s.66], że przestrzeń ta jest zupełna. Czyli mamy do czynienia z przestrzenią Hilberta oznaczaną $L_T^2 = ((\underline{L}_T^2, R_c, +, \cdot), (|))$. Nietrudno podać interpretację normy tej przestrzeni. Korzystając ze wzoru (78) mamy:

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} \ . \tag{87}$$

Oczywiście, dostrzegamy tu definicję dobrze znanej wartości skutecznej przebiegu f. W tym momencie dostrzegamy też możliwości zastosowań przestrzeni Hilberta w innych analogicznych przypadkach. W elektrotechnice operujemy nie tylko "sygnałami" okresowymi o całkowalnym kwadracie. Zmieniając zbiory sygnałów i bacząc, by iloczyn skalarny kojarzył się z mocą czynną, mamy wiele innych zastosowań przestrzeni Hilberta.

W tej chwili podamy jeszcze jedno, potrzebne do wyjaśnienia idei Budeanu. Wiąże się ono z zespolonymi funkcjami zmiennej rzeczywistej. Założymy o nich, że są okresowe o okresie T i mają całkowalny kwadrat modułu na przedziale $< 0;T >$.
Czyli:

$$\int_0^T |f(t)|^2 \, dt < \infty \ . \tag{88}$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie budujemy przestrzeń liniową. (Wykorzystujemy teraz nierówność $|f(t)|^2 \le 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$.) Iloczyn skalarny (zgodnie z nierównością $\left|f(t)\bar{g}(t)\right| \le \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$) definiujemy następująco:

$$(f|g)_C = \frac{1}{2T}\int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt \ . \tag{89}$$

Podtrzymując uczynioną umowę o klasach funkcji różniących się na zbiorach miary zero, łatwo stwierdzamy spełnienie aksjomatów przestrzeni unitarnej, która jest przestrzenią Hilberta. Przestrzeń tę oznaczamy $L_T^{2,C}$.

Ważnym momentem naszych rozumowań będzie teraz budowa tzw. funkcji symbolicznych przyporządkowanych funkcjom, które są elementami przestrzeni L_T^2. Chodzi

więc o konstrukcję pewnego odwzorowania przestrzeni L_T^2 w przestrzeń $L_T^{2,C}$. Jak tworzy się funkcję symboliczną dla funkcji będącej elementem przestrzeni SIN_ω - wiemy. Posługując się szeregiem Fouriera (względem bazy trygonometrycznej) funkcji $f \in L_T^2$ możemy uogólnić to postępowanie na przestrzeń L_T^2. Trzeba najpierw przypomnieć [15, s. 76-80], że jeśli mamy układ ortonormalny $\{e_k\}_{k\in N_0}$ w przestrzeni Hilberta H, to szereg Fouriera dowolnego elementu $x \in H$ jest zbieżny (w sensie normy $\|\ \|$ tej przestrzeni) i zachodzi wzór

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2 . \tag{90}$$

Liczby $(x|e_k)$ nazywają się współczynnikami Fouriera elementu x względem układu (e_k) (dla uproszczenia wypowiedzi ciąg (e_k) nazywamy, podobnie jak zbiór $\{e_k\}_{k\in N_0}$, układem ortonormalnym). Układ trygonometryczny

$$(1, \sqrt{2}\cos\omega(\cdot),\ \sqrt{2}\sin\omega(\cdot),\ldots,\sqrt{2}\cos h\omega(\cdot),\sqrt{2}\sin h\omega(\cdot),\ldots),\ \omega = \frac{2\pi}{T}, h \in N \tag{91}$$

jest w przestrzeni L_T^2 zamknięty (jest bazą), tzn. dla dowolnego elementu $x \in H$ zachodzi:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 . \tag{92}$$

W przestrzeni $L_T^{2,C}$ rolę taką odgrywa układ

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}e^{\pm jq(\cdot)},\ldots,\sqrt{2}e^{\pm jh\omega(\cdot)},\ldots),\ h \in N. \tag{93}$$

Niech więc dany będzie szereg Fouriera funkcji $f \in L_T^2$

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \sum_{h=1}^{\infty} (\sqrt{2}\, a_h \cosh\omega(\cdot) + \sqrt{2}\, b_h \sinh\omega(\cdot)) = \\ &= f_0 + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2} f_h \cos(h\omega(\cdot) + \psi_h). \end{aligned} \tag{94}$$

Przypominamy, że szereg ten nie musi być zbieżny do "f(t)" w poszczególnych punktach t. Jego zbieżność do "f " oznacza, że zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0 , \tag{95}$$

gdzie "s_n" jest n-tą sumą cząstkową szeregu (95). Utwórzmy szereg stowarzyszony

z szeregiem (93) definiujący funkcję $\underset{s}{f}$

$$\underset{s}{f} = \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2}\, f_h \sin(h\omega(\cdot) + \psi_h) \,. \tag{96}$$

Łatwo zauważyć, że jeśli $f \in \underline{L}_T^2$, to szereg ten (zbieżny w sensie normy $\| \|$) definiuje też funkcję $\underset{s}{f} \in \underline{L}_T^2$. Tworzymy z kolei funkcję symboliczną $\underline{F}$

$$\underline{F} = f + j\underset{s}{f} = \underset{0}{f} + \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{2}\, \underline{F}_h\, e^{jh\omega(\cdot)} \,,\quad \underline{F}_h = f_h\, e^{j\psi_h} \,. \tag{97}$$

Jej współczynnikami Fouriera względem bazy (93) są liczby $\underline{F}_h \in C$. Gdyby wziąć pod uwagę jedynie pierwszą harmoniczną, to przytoczona konstrukcja funkcji symbolicznej pokrywa się z dobrze znaną dla przebiegów sinusoidalnych.

Zastosujmy teraz tę samą procedurę rozkładu prądu odbiornika $\underline{J} \in \underline{L}_T^{2,C}$ (rys.1) na kierunek jego napięcia $\underline{U} \in \underline{L}_T^{2,C}$ oraz prostopadły doń, która była już pokazana we wzorach (47),(48),(49), dotyczących przestrzeni funkcji sinusoidalnych (por. [20, s. 10 -13]). Czyli mamy:

$$\underline{J} = {}_{|}\underline{J} + {}_{\perp}\underline{J} \,, \tag{98}$$

$${}_{|}\underline{J} = k\underline{U} \,,\quad k \in C \,, \tag{99}$$

$$(\underline{U}\,|_{\perp}\,\underline{J})_C = 0 \,. \tag{100}$$

Naśladując postępowanie towarzyszące wzorom (47), (48), (49) otrzymujemy:

$$k = \frac{\bar{\underline{S}}}{\|\underline{U}\|_C^2} = \frac{P}{\|u\|^2} - j\frac{Q}{\|u\|^2} \,,\quad \|\underline{U}\|_C = \|u\| \,, \tag{101}$$

gdzie funkcja $\underline{U}$ jest symboliczna w stosunku do funkcji u, norma $\| \|$ zdefiniowana jest za pomocą iloczynu skalarnego (86) oraz moc symboliczna S=P+jQ zdefiniowana jest w sprzestrzeni $\underline{L}_T^{2,C}$ wzorami (37), (89). Czyli:

$${}_{|}\underline{J} = {}_{a}\underline{J} + {}_{r}\underline{J} \,, \tag{102}$$

$${}_{a}\underline{J} = \underset{e}{G}\underline{U} \,, \tag{103}$$

$${}_{r}\underline{J} = -j\underset{s}{B}\underline{U} \,, \tag{104}$$

$$\underset{e}{G} = \frac{P}{\|\underline{U}\|_C^2} \,, \tag{105}$$

$$\underset{e}{B} = \frac{Q}{\|\underline{U}\|_C^2} \,. \tag{106}$$

"$_a\underline{J}$" - oznacza prąd aktywny Fryzego,

"Q" - moc bierną w sensie Budeanu,

"$_\perp\underline{J}$" - tzw. prąd deformacji oznaczany inaczej symbolem $_d\underline{J}$.

Z rozkładu tego widać, że prąd aktywny jest nośnikiem mocy czynnej($(\underline{U}|_a \underline{J})_C = P$), prąd reaktancyjny Budeanu $_r\underline{J}$ - biernej ($(\underline{U}|_r \underline{J})_C = jQ$), zaś prąd deformacji nie przenosi mocy symbolicznej ($(\underline{U}|_d \underline{J})_C = 0$).

Zastosowany rozkład jest szczególnym przypadkiem twierdzenia o rzucie ortogonalnym [15, s.69], powiadającego, że jeśli w przestrzeni Hilberta dana jest podprzestrzeń liniowa i domknięta, to każdy element tej przestrzeni da się jednoznacznie rozłożyć na składnik należący do ww. podprzestrzeni i składnik prostopadły doń.

W naszym przypadku rolę podprzestrzeni liniowej i domkniętej odgrywa prosta zespolona wyznaczona kierunkiem wektora $\underline{U} \in \underline{L}_T^{2,C}$. Mnożąc skalarnie wektor $\underline{J}$ przez siebie oraz korzystając z prostopadłości składników $_I\underline{J}$ i $_\perp\underline{J}$ ($(_I\underline{J}|_\perp \underline{J})_C = 0$)

mamy

$$\|\underline{J}\|_C^2 = \|_I\underline{J}\|_C^2 + \|_\perp\underline{J}\|_C^2 \,. \tag{107}$$

Definiując moc pozorną P_m (w publikacji [20] nazywana jest ona modułową)

$$P_m = \|\underline{U}\|_C \; \|\underline{J}\|_C \tag{108}$$

oraz deformacji

$$K = \|\underline{U}\|_C \; \|_d\underline{J}\|_C \tag{109}$$

otrzymujemy ze wzoru (107)

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2, \tag{110}$$

ponieważ $\|\underline{U}\|_C^2 \, \|_I\underline{J}\|_C^2 = |S| = P^2 + Q^2$.

Moc S (podobnie jak i pozostałe) można wyrazić z pomocą współczynników Fouriera funkcji napięcia i prądu względem bazy (93), tzn. np. $S = \sum_{h=1}^{\infty} U_h \bar{J}_h$. Wzór (110) nazywany jest prostopadłościanem mocy - jest on, jak widać, natychmiastową konsekwencją rozkładu prądu na składniki prostopadłe (tu w sensie iloczynu skalarnego $(|)_C$). W przypadku

przebiegów sinusoidalnych całkowity prąd odbiornika jest, oczywiście, równoległy do napięcia i składnik $\underline{J} = {}_{d}\underline{J}$ znika, pociągając za sobą zerowanie się mocy deformacji K.

Nierówność $|S|^2 \leq P_m^2$ jest szczególnym przypadkiem nierówności Schwarza w dowolnej przestrzeni unitarnej [15, s. 62]. W naszej terminologii można ją zapisać

$$|(\underline{U}|\underline{J})_C|^2 \leq (\underline{U}|\underline{U})_C(\underline{J}|\underline{J})_C = \|\underline{U}\|_C^2\|\underline{J}\|_C^2 . \qquad (111)$$

Przechodzi ona w równość wtedy i tylko wtedy, gdy elementy $\underline{U}$ oraz $\underline{J}$ są liniowo zależne.

Kopiując rozważania doprowadzające do otrzymania wzorów (8), (20) uzyskujemy zachowawczość mocy symbolicznej, tzn. wzór:

$$\sum_{g\in G} S_g = 0 \qquad (112)$$

obowiązujący dla sieci o n dwuzaciskowych elementach (jeśli liczba elementów zbioru G wynosi n) i przebiegach napięć i prądów $\underline{U}_g, \underline{J}_g \in \underline{L}_T^{2,C}$. Moce P_m, K nie są zachowawcze, ponieważ ze wzoru (76) (subaddytywność normy) wnioskujemy dla równoległego połączenia dwu odbiorników, że:

$$\|\underline{J}\|_C \leq \left\|\underline{J}_1\right\|_C + \left\|\underline{J}_2\right\|_C , \qquad \|{}_d\underline{J}\|_C \leq \left\|{}_d\underline{J}_1\right\|_C + \left\|{}_d\underline{J}_2\right\|_C , \qquad (113)$$

czyli wówczas

$$P_m \leq P_{m_1} + P_{m_2}, \quad K \leq K_1 + K_2 . \qquad (114)$$

(Można wykazać, że norma staje się addytywna w przestrzeni unitarnej dla jej dwu niezerowych elementów wtedy i tylko wtedy, gdy są one proporcjonalne z rzeczywistym dodatnim współczynnikiem proporcjonalności [15, s. 64])

Motywacją matematyczną wprowadzenia prądu $\underline{J}$ oraz mocy biernej Budeanu był przedstawiony rozkład prądu na składniki ortogonalne. Niestety, jak zobaczymy w dalszym ciągu, moc bierna Budeanu Q jest na ogół mniejsza od inaczej zdefiniowanej mocy biernej, którą są w stanie skompensować elementy L,C zmniejszając straty na oporniku ΔR ($\Delta R\|\underline{J}\|_C^2$) (rys. 2). Wiążąc więc zagadnienie kompensacji z mocą bierną Budeanu narażamy się na to, że nie wskazuje ona na możliwości kompensacyjne najprostszych elementów L,C używanych do tego celu (nie pobierają one mocy czynnej dla przebiegów okresowych). Samo żądanie ortogonalności rozkładu prądów (w pewnej przestrzeni Hilberta) nie wystarcza więc do rozwiązania zagadnień minimalizacji strat i kompensacji (części lub całości) różnicy prądu odbiornika oraz pożądanego prądu minimalizującego straty. Jest to

oczywiste, bowiem w nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni prostopadłej do wektora napięcia możemy mieć nieskończenie wiele rozkładów danego wektora prądu. Natomiast właściwie obrany ortogonalny rozkład prądu jest cechą pożądaną, ze względu na prostopadłościan mocy, który może stanowić podstawę do wprowadzenia pewnej taryfy związanej np. tutaj z mocą Q oraz mocą K, lub też ich odpowiednikami występującymi dla innego rozkładu ortogonalnego prądu niż rozkład Budeanu.

Dla porównania z rozumowaniami Budeanu rozpatrzmy następujący przykład dotyczący funkcji $u,i \in \underline{L}_T^2$ opisujących element dwuzaciskowy (rys. 2). Przyjmijmy z góry podany rozkład prądu i na trzy składniki, zaproponowany przez Czarneckiego [12, s.95]

$$ {}_a i = \underset{e}{G}\, U_0 + \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \underset{e}{G}\, U_h \exp(jh\omega(\cdot)) \ , \tag{115} $$

$$ {}_r i = \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h\, U_h \exp(jh\omega(\cdot)) \ , \tag{116} $$

$$ {}_s i = (G_0 - \underset{e}{G}) U_0 + \sqrt{2}\ \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - \underset{e}{G})\, U_h \exp(jh\omega(\cdot)) \ , \tag{117} $$

gdzie

$$ \underset{e}{G} = \frac{P}{\|u\|^2} . \tag{118} $$

Interpretacja ich jest następująca. Jak później okaże się, składnik ${}_a i$ (prąd aktywny Fryzego) minimalizuje straty na oporniku ΔR (rys.2) przy założeniu, że zasilanie jest "niemal sztywne" (tzn. $\|\Delta u\| << \|u\|$); składnik ${}_r i$ (prąd reaktancyjny - inny niż w rozumowaniach Budeanu - wzór (104)) ma tą własność, że jeśli obciąć jego widmo do skończonej liczby harmonicznych (jest to uzasadnione zbieżnością szeregu $\sum_{h=1}^{\infty} |B_h|^2 |U_h|^2$), to może być on skompensowany skończonym układem L,C (por. [22]); wreszcie jest widoczne, że składnik ${}_s i$ (prąd rozproszenia lub rozrzutu) nie jest kompensowalny układami L,C. (W przypadku zasilania "niemal sztywnego" zakładamy, że odbiornik jest liniowy i opisany parametrami $Y_h = G_h + jB_h$, $h \in N_0 = N + \{0\}$. Idealizując, i przyjmując zasilanie za pomocą SEM, nie trzeba zakładać liniowości odbiornika, bo wówczas interesuje nas jedynie jego podana wyżej odpowiedź prądowa na jedno zasilanie napięciowe realizowane tą SEM.)

Korzystając ze wzoru

$$(u|i) = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty} U_h \bar{J}_h \,, \tag{119}$$

będącego konsekwencją zamkniętości układu trygonometrycznego (91) w przestrzeni L_T^2 (por.[1, s.430]), za pomocą elementarnych rachunków wykazujemy, że:

$$(u_s|u_r) = 0 \,, \tag{120}$$

$$(u_s|u_s) = 0 \,, \tag{121}$$

$$(u_r|u_s) = 0 \,. \tag{122}$$

Czyli składniki te są parami prostopadłe.

Stąd mamy:

$$\|u\|^2 = \|u_a\|^2 + \|u_r\|^2 + \|u_s\|^2 \,, \tag{123}$$

i w ślad za tym

$$P_m^2 = P^2 + Q_r^2 + Q_s^2, \tag{124}$$

gdzie

$$Q_r = \|u\|\|u_r\| \,, \tag{125}$$

$$Q_s = \|u\|\|u_s\| \,. \tag{126}$$

Uzyskujemy więc inny rozkład, tego samego co w poprzednim przykładzie, kwadratu mocy pozornej na sumę kwadratów mocy czynnej, mocy reaktancyjnej oraz rozproszenia.

Aby przekonać się, że rozkład ten jest rzeczywiście inny, obliczmy "Q_r^2" oraz "Q^{2}" i porównajmy. (Korzystać będziemy z bezwzględnej zbieżności mnożonych szeregów.) A więc:

$$Q_r^2 = \|u\|^2\|u_r\|^2 = \sum_{h=0}^{\infty}|U_h|^2\sum_{k=0}^{\infty}|B_kU_k|^2 = \sum_{h=0}^{\infty}B_h^2|U_h|^4 + \tag{127}$$

$$+\sum_{\substack{k=0\\ h>k}}^{\infty}(|U_h|^2\,B_k^2|U_k|^2 + |U_k|^2\,B_h^2|U_h|^2).$$

$$Q = \mathrm{Jm}\sum_{h=0}^{\infty}U_h(G_h - jB_h)\bar{U}_h = \mathrm{Jm}(-j\sum_{h=0}^{\infty}U_hB_h\bar{U}_h) = \tag{128}$$

$$= -\sum_{h=0}^{\infty}B_h|U_h|^2,$$

$$Q^2 = \sum_{h=0}^{\infty} B_h^2 |U_h|^4 + 2 \sum_{\substack{h,k=0 \\ h>k}}^{\infty} B_h |U_h|^2 B_k |U_k|^2 . \qquad (129)$$

Wykorzystując nierówność $2ab \leq a^2+b^2$,

gdzie: $a = |U_h| B_k |U_k|$, $b = |U_k| B_h |U_h|$, otrzymujemy:

$$Q^2 \leq Q_r^2 , \quad (|Q| \leq Q_r) . \qquad (130)$$

Widać, że w przypadku występowania jednej harmonicznej (np. podstawowej) zajdzie równość $Q = Q_r$. (Oczywiście podstawiamy: $B_0 = 0$.) W ten sposób wykazaliśmy zapowiedziany brak powiązania mocy biernej Budeanu Q z możliwościami kompensacyjnymi elementów L,C.

Można rozpatrywać nie jeden odbiornik, a wszystkie o prądach $i \in \underline{L}_T^2$ przy jednym zasilaniu napięciowym $u \in \underline{L}_T^2$ (realizowanym jako SEM). Wówczas kolejne prądy odbiornika ${}_a i, {}_r i, {}_s i$ należeć będą do trzech podprzestrzeni Hilberta H_a , H_r , H_s (prądów aktywnych, reaktanacyjnych i rozproszenia) danej przestrzeni Hilberta $H = \underline{L}_T^2$. Łatwo wykazać, że prądy te są parami prostopadłe [4]. Czyli mamy (ortogonalną) sumę prostą podprzestrzeni Hilberta danej przestrzeni H

$$H = H_a \oplus H_r \oplus H_s . \qquad (131)$$

(Zakładamy tu, że $U_h \neq 0$ dla $h \in N_o$.)

5. SFORMUŁOWANIE I ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA MINIMALIZACJI STRAT NA REZYSTORZE ΔR (P. PUNKT 3) W PRZYPADKU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO I PRZESTRZENI PRĄDOWO-NAPIĘCIOWEJ L_T^2. PRZYPADEK ODBIORNIKA (n+1) - ZACISKOWEGO

We wzorach (103), (115) postać prądu aktywnego podana była z góry. Chcielibyśmy znaleźć teraz uzasadnienie takiego wyboru prądu aktywnego w procesie optymalizacyjnym, polegającym na minimalizacji strat w oporniku ΔR (rys. 2) przy warunku ubocznym stwierdzającym dostarczenie do odbiornika określonej mocy czynnej. Problem ten prześledziliśmy już dla przebiegów sinusoidalnych prądów i napięć odbiornika. Teraz będziemy starali się uogólnić go w pierwszym rzędzie na przebiegi okresowe, a potem inne. Na dalszym planie pozostawiamy uogólnienie tego postępowania na sieci złożone ze skończonej liczby wydajników, odbiorników oraz układu przekazującego energię do odbiorników (przy czym wydajniki i odbiorniki będą mogły być wielozaciskowe). Wreszcie stanie przed nami zagadnienie doboru kompensatorów (prześledzone też dla przebiegów sinusoidalnych). Tak można nakreślić plan działania. Dotychczasowe rozważania można potraktować jako wstęp wprowadzający do tej problematyki, w którym eksponowane były na prostych przykładach pewne jej elementy oraz prezentujący powszechnie uznane pojęcia teorii mocy.

Z toku przeprowadzonych już rozumowań widać, że pod względem matematycznym będziemy chcieli minimalizować pewne funkcjonały (strat oraz ewentualnie inne uwzględniające zagadnienie kształtu prądu), których argumentami będą funkcje prądu odbiorników należących do pewnych przestrzeni Hilberta. Jak minimalizować funkcje dostatecznie wysokiej klasy przy pewnych warunkach ubocznych - wiemy z klasycznego rachunku różniczkowego (cytowana już metoda nieoznaczonego czynnika Lagrange'a). Okazuje się, że postępowanie to daje się uogólnić na zagadnienie poszukiwania minimów funkcjonałów. Kluczowym pojęciem pozwalającym na to uogólnienie jest pojęcie pochodnej Frécheta. Opierając się na nim można sformułować wzór Taylora, podobnie jak dla funkcji, i badać ekstrema funkcjonałów. My podamy tylko definicje podstawowych pojęć i potrzebne twierdzenia (bez dowodów) odsyłając Czytelnika do literatury (np.: [19, 15]).

W pierwszym rzędzie trzeba podać definicję ekstremum lokalnego związanego funkcjonału [19, s. 199].

Definicja 8. Niech "X" oznacza przestrzeń metryczną (w szczególności może to być przestrzeń Hilberta), "Y" - przestrzeń liniową (w szczególności może to być przestrzeń liniowa liczb rzeczywistych), a "g" odwzorowanie $g:\underline{X}\to\underline{Y}$, które definiuje niepusty zbiór $M = \bar{g}^{-1}(\{0\})$. Funkcjonał $f:\underline{X}\to R$ ma w punkcie $\underset{0}{x} \in M$ minimum (maksimum) lokalne związane, jeśli istnieje takie $r > 0$, że

$$f(\underset{0}{x}) \le f(x), (f(\underset{0}{x}) \ge f(x)) \quad \text{dla } x \in K(\underset{0}{x},r) \cap M . \tag{132}$$

□

Oczywiście, "$K(\underset{0}{x},r)$" oznacza otwartą kulę o środku $\underset{0}{x}$ i promieniu r. Innymi słowy, chodzi o istnienie zbioru otwartego w topologii indukowanej przestrzeni M (z przestrzeni X) [13, s. 92], w którym to zbiorze zachodzi warunek (132). Jeśli pominąć w definicji 8 odwzorowanie g, tzn. warunek (132) będzie zachodzić dla $x \in K(\underset{0}{x},r)$, to otrzymamy definicję minimum (maksimum) lokalnego. Nie zakładając nic o odwzorowaniach f oraz g nie moglibyśmy angażować metod różniczkowych do badania ekstremów (tzn. minimów bądź maksimów). Stąd zapowiadana definicja pochodnej Frécheta [19, s. 125; 15, s. 285].

Definicja 9. Niech będą dane dwie przestrzenie Banacha X,Y oraz operator (tzn. odwzorowanie) $f:U\to\underline{Y}$, gdzie "U" jest otwartym podzbiorem przestrzeni X. Operator jest różniczkowalny w punkcie $\underset{0}{x} \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki operator liniowy i ciągły $L_{\underset{0}{x}}:\underline{X}\to\underline{Y}$, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\underset{0}{x}+h)-f(\underset{0}{x})-L_{\underset{0}{x}}(h)}{\|h\|}=0. \tag{133}$$

□

Odwzorowanie $L_{\underset{0}{x}}$ nazywamy pochodną mocną lub Frecheta odwzorowania f w punkcie $\underset{0}{x}$ i oznaczamy $f'(\underset{0}{x})$. Sens wzoru (133) jest taki, że operator $f'(\underset{0}{x})$ przybliża dobrze dla małych "h" przyrost operatora f uzyskany dla punktów $\underset{0}{x}+h$ i $\underset{0}{x}$. Nietrudno przekonać się, że gdy rolę przestrzeni X oraz Y odgrywa przestrzeń arytmetyczna R, to wartość operatora $f'(\underset{0}{x})$

w punkcie h będzie podana za pomocą wyrażenia $\frac{df}{dx}(x_0)h$; dla odwzorowania $f:R^n \to R$ będzie to wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_{0_1},...,x_{0_n})h_i$ (sumowanie podług "i"!), $h=(h_1,...,h_n)\in R^n$.

Jeśli odwzorowanie $x \mapsto f'(x)$ jest różniczkowalne w punkcie x_0, to jego pochodną (mocną) nazywamy drugą pochodną odwzorowania f w punkcie x_0 i oznaczamy $f''(x_0):\underline{X}\times\underline{X}\to\underline{Y}$ [19, s. 147; 15, s. 306]. W podobny sposób można określić pochodne dowolnie wysokiego rzędu.

Dysponując pojęciem pochodnej Frecheta podamy warunek konieczny i następnie wystarczający dla występowania ekstremum lokalnego związanego [19, s. 199, 200, 201]. Oto warunek konieczny.

Twierdzenie 1. Niech funkcjonał $g:\underline{X}\to R$, gdzie "X" oznacza przestrzeń Hilberta, będzie różniczkowalny w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu x_0, punkt ten będzie punktem regularnym zbioru $\bar{g}^{-1}(\{0\})$ (tzn. odwzorowanie $g'(x_0)$ jest suriektywne), funkcjonał $f:\underline{X}\to R$ będzie różniczkowalny w punkcie x_0. Jeśli funkcjonał f posiada w punkcie x_0 ekstremum lokalne związane, to istnieje taka liczba $\mu\in R$, że:

$$f'(x_0)+\mu g'(x_0)=0 \ . \qquad (134)$$

Warunek dostateczny. □

Twierdzenie 2. Niech funkcjonały f i g występujące w twierdzeniu 1 będą w otoczeniu punktu x_0 dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły i niech punkt x_0 będzie punktem regularnym zbioru $\bar{g}^{-1}(\{0\})$. Jeśli istnieją: taka stała $\mu\in R$, że spełnione jest równanie (134) oraz taka stała $c\in R$, $c>0$, że zachodzi:

$$(f''(x_0)+\mu g''(x_0))(h,h) \geq c\|h\|^2 \ , \ (\leq c\|h\|^2) \ , \ \text{dla } h\in \bar{g}'^{-1}(x_0)(\{0\}) \ , \qquad (135)$$

to funkcjonał f ma w punkcie x_0 minimum (maksimum) lokalne związane.

□

Jesteśmy już niemal przygotowani do wyłożenia sedna rzeczy. Dobrze będzie jednak przedtem wprowadzić pojęcie przestrzeni uniwersalnych dla przestrzeni Hilberta. Odgrywają one podobną rolę jak przestrzenie R^n (dla różnych naturalnych liczb n) w definicji układów współrzędnych rozmaitości skończenie wymiarowych, czyli służą za przeciwdziedziny

pewnych nieskończenie wymiarowych układów współrzędnych, których dziedzinami są właśnie przestrzenie Hilberta. Tak jak w przypadku skończenie wymiarowym, korzyść z wprowadzania takich układów współrzędnych (map) polega na tym, że rachunki optymalizacyjne, które musielibyśmy wykonywać na funkcjach (lub innego rodzaju elementach jakiejś przestrzeni Hilberta) - możemy wykonywać na liczbach. Jest to chyba korzyść dobrze wyczuwalna - tym lepiej, że szczególnie prosto jest wówczas wyrazić iloczyny skalarne i normy, którymi głównie będziemy operować.

Zacznijmy od przestrzeni l^2. Jej elementami są ciągi $f = (f_h)$, $h \in N_0$, $f_h \in R$ o sumowalnych kwadratach, czyli ciągi, dla których zachodzi:

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h^2 < \infty \ . \tag{136}$$

Działanie dodawania polega na dodawaniu wyrazów o tych samych numerach, mnożenie przez liczbę rzeczywistą - na mnożeniu wszystkich wyrazów ciągu przez tę liczbę (działania te są wewnętrzne).0trzymujemy wówczas przestrzeń liniową $(l^2, R_c, +, \cdot)$.

Iloczyn skalarny definiujemy:

$$(f|g) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h \, g_h \ . \tag{137}$$

Na mocy nierówności $|f_h \, g_h| \le \frac{1}{2}(f_h^2 + g_h^2)$ szereg ten jest zbieżny (bezwzględnie). Można wykazać się, że otrzymana przestrzeń unitarna jest zupełna - czyli jest przestrzenią Hilberta. Oznaczamy ją l^2. (Sumowanie we wzorach (136), (137) od zera zamiast od jedynki nie jest istotne, ponieważ oba warianty tak uzyskanych przestrzeni Hilberta są unitarnie izomorficzne, tzn. istnieje izomorfizm zachowujący iloczyn skalarny. Dlatego też nie stosujemy odrębnych oznaczeń w obu przypadkach.)

Można rozpatrywać zespolony wariant tej przestrzeni, czyli $l^{2,C}$. Elementami jej są ciągi $f = (f_h)$, $h \in N_0$, $f_h \in C$ o sumowalnych kwadratach modułów

$$\sum_{h=0}^{\infty} |f_h|^2 < \infty \ . \tag{138}$$

Działania przestrzeni liniowej są standardowe. Iloczyn skalarny:

$$(f|g) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h \bar{g}_h \ . \tag{139}$$

Jest ona też przestrzenią Hilberta.

Uogólnieniem jest pojęcie przestrzeni $l^2(W)$ ($l^{2,C}(W)$) [1, s.416, 417]. Jej elementami są funkcje rzeczywiste lub zespolone zdefiniowane na zbiorze W o dowolnej mnogościowej mocy. Czyli f:W→R(C). Funkcje te są takie, że zbiór argumentów danej funkcji, dla których jej wartości są różne od zera, jest co najwyżej przeliczalny, tzn. zbiór $\{\alpha \in W: f_\alpha \neq 0\}$ jest co najwyżej równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych N oraz poniższy szereg jest zbieżny:

$$\sum_{\alpha \in W} |f_\alpha|^2 < \infty \ . \qquad (140)$$

Działania przestrzeni liniowej - zwyczajne. Iloczyn skalarny:

$$(f|g) = \sum_{\alpha \in W} f_\alpha \bar{g}_\alpha \ . \qquad (141)$$

Jest to przestrzeń Hilberta. Wzory (140), (141) wypisaliśmy dla jej zespolonego wariantu $l^{2,C}(W)$. W przypadku gdy zbiór W jest równoliczny ze zbiorem N - wracamy do przestrzeni l^2 ($l^{2,C}$). (Ściślej rzecz biorąc, do przestrzeni liniowo izometrycznej z przestrzenią l^2 lub $l^{2,C}$.)

Teraz podamy definicję bazy przestrzeni Hilberta.

Definicja 10. Bazą przestrzeni Hilberta H nazywamy dowolny maksymalny zbiór jej ortonormalnych elementów.

□

Poznaliśmy już pewne bazy przestrzeni L_T^2, $L_T^{2,C}$. Zachodzi następujące twierdzenie [1, s.431].

Twierdzenie 3. Każda przestrzeń Hilberta o zbiorze elementów różnym od "{0}" ma bazę.

□

Dowód jest prosty, lecz opiera się on na lemacie Kuratowskiego - Zorna [13, s.19; 1, s.22] równoważnym pewnikowi wyboru. Stąd jest on niekonstruktywny (nie podaje konkretnej konstrukcji bazy, o której istnieniu orzeka). Widać więc, że wybór bazy w danej przestrzeni jest pewną "sztuką". W dalszym ciągu mamy twierdzenia [1, s.431, 432].

Twierdzenie 4. Wszystkie bazy danej przestrzeni Hilberta H są równej mocy mnogościowej (równoliczne).

□

Twierdzenie 5. Każda przestrzeń Hilberta H jest liniowo izometryczna z pewną przestrzenią $l^2(W)$ ($l^{2,C}(W)$), gdzie zbiór W jest równej mocy z bazą przestrzeni H. Jeśli bazą jest zbiór $\{e_\alpha\}_{\alpha \in W}$, to liniowa izometria F, o której mówi twierdzenie, przyporządkowuje elementowi $f \in H$ jego współczynniki Fouriera względem tej bazy. Czyli:

$$F(f) = ((f|e_\alpha))_{\alpha\in W} \in \underline{l}^2(W)(\underline{l}^{2,C}(W)),\ f \in \underline{H}\ . \tag{142}$$

□

To, że odwzorowanie F jest liniowe - jest widoczne na podstawie wzoru (142). Jest ono izometrią oraz suriekcją na podstawie twierdzenia [1], s.430), które powiada, że dla każdej bazy przestrzeni H zachodzi:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{\alpha\in W} |(x|e_\alpha)_H|^2 = \|(x_\alpha)\|^2_{l^{2,C}(W)} \tag{143}$$

oraz

$$(x|y)_H = \sum_{\alpha\in W} (x|e_\alpha)_H \overline{(y|e_\alpha)}_H = ((x_\alpha)|(y_\alpha))_{l^{2,C}(W)}\ ,$$
$$(x_\alpha) = F(x),\ (y_\alpha) = F(y)\ . \tag{144}$$

Wzory (143), (144) świadczą o zachowaniu normy i iloczynu skalarnego przy dokonaniu odwzorowania F.

Ponieważ dla rozmaitości skończenie wymiarowych globalnym układem współrzędnych nazywamy homeomorfizm przestrzeni topologicznej X na przestrzeń $R^n(C^n)$ $(n \in N_0)$, więc odwzorowanie F, które jako izometria przestrzeni H i przestrzeni $l^2(W)$ $(l^{2,C}(W))$ jest homemorfizmem wiążącym je, zasługuje na miano nieskończenie wymiarowego układu współrzędnych (globalnego).Oczywiście, obierając różne bazy, mamy różne globalne układy współrzędnych.

Teraz możemy zająć się zapowiadanymi przykładami optymalizacyjnymi. Będą one dotyczyć układu zilustrowanego rys.2.

Przykład 1. Operujemy przebiegami okresowymi należącymi do przestrzeni L^2_T, tzn. $u,i \in \underline{L}^2_T$. Minimalizujemy straty na oporniku ΔR, czyli funkcjonał o wartości

$$\|i\|^2_{L^2_T}\ , \tag{145}$$

ze względu na funkcję prądu $i \in \underline{L}^2_T$, przy zachowaniu mocy czynnej odbiornika, czyli przy spełnieniu warunku

$$(u|i)_{L^2_T} = P\ . \tag{146}$$

Zakładamy (rys.2), że: $\|\Delta u\|_{L^2_T} << \|u\|_{L^2_T}$. Sens tego założenia można zrozumieć poprzez następujące rozumowanie. Formułujemy nasz problem optymalizacyjny dla pewnej klasy

układów czterozaciskowych przekazujących energię ze źródła (SEM) do odbiornika. (Dokładniej uczynimy to nieco później.) Chodzi w nim o minimalizację strat mocy czynnej w tym układzie przekazującym (na rys. 2 jego rolę spełnia opornik ΔR) przy warunku (146) na zaciskach odbiornika. Równania stanowiące warunek konieczny poszukiwanego minimum należy potraktować jako równania uwikłane pozwalające znaleźć prąd aktywny (nasze rozwiązanie) w funkcji pewnych parametrów układu przekazującego energię (np. takich jak w naszej prostej sytuacji "ΔR", ogólniej, parametry te powinny być elementami pewnej przestrzeni Banacha, np. R^n, l^2. O ciągłości (a nawet różniczkowalności) tej funkcji decyduje twierdzenie Gravesa [19, s.190] (jeśli oczywiście, jego założenia są spełnione). Czyli w rezultacie prąd aktywny zależałby w sposób ciągły od parametrów ww. układu przekazującego "w pobliżu" takiego ich stanu, który realizuje bezpośrednie załączenie SEM na odbiornik. Temu zaś towarzyszy warunek $\|\Delta u\|_{L^2_T} << \|u\|_{L^2_T}$. Jest on więc w istocie rzeczy pewną konsekwencją "zbliżania się" układów przekazujących pewnej klasy do zwarcia. W przypadku gdy klasa ta ma taką budowę, jak na rys.2, odwracamy role i zamiast żądania "małości" "ΔR" stawiamy ww. warunek dla napięć.

W przestrzeni L^2_T wprowadzamy bazę trygonometryczną (91) i układ współrzędnych oparty na niej. Dla tej bazy współrzędne prądowe oznaczamy $\bar{J} = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots)$, gdzie współczynniki $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ występują w tej samej kolejności, co elementy bazy (91). Wówczas:

$$\|i\|^2_{L^2_T} = \|\bar{J}\|^2_{l^2} = \sum_{h=0}^{\infty} \bar{J}_h^2 \qquad (147)$$

oraz

$$(u|i)_{L^2_T} = (\bar{U}|\bar{J})_{l^2} = \sum_{h=0}^{\infty} \bar{U}_h \bar{J}_h = P \ . \qquad (148)$$

Przenieśliśmy więc minimalizację naszego funkcjonału (145) z przestrzeni L^2_T do przestrzeni uniwersalnej l^2 (tzn. funkcjonał (145) posiada w pewnym punkcie $_ai$ lokalne minimum związane wtedy i tylko wtedy, gdy posiada go funkcjonał (147) w punkcie $_a\bar{J} = F(_ai)$). Rolę funkcjonału g w warunku ubocznym g(x)=0 występującym w twierdzeniu 1 odgrywa funkcjonał o wartości $P-(\bar{U}|\bar{J})_{l^2}$, rolę funkcjonału f - funkcjonał o wartości $\|\bar{J}\|^2_{l^2}$. Założenia

twierdzenia 1 są spełnione (jeśli tylko $\|u\| \neq 0$, czyli odbiornik jest zasilany) i doprowadza ono do równań, które otrzymujemy ze wzoru (134):

$$2\tilde{J}_h - \mu\tilde{U}_h = 0 \ . \tag{149}$$

Stąd:

$$\tilde{J}_h = \frac{\mu}{2}\tilde{U}_h . \tag{150}$$

Podstawiając prawą stronę wzoru (150) do wzoru (148) otrzymujemy:

$$\mu = \frac{2P}{\|\tilde{U}\|_{l^2}} \tag{151}$$

oraz

$$\tilde{J}_h = \underset{e}{G}\,\tilde{U}_h \ , \tag{152}$$

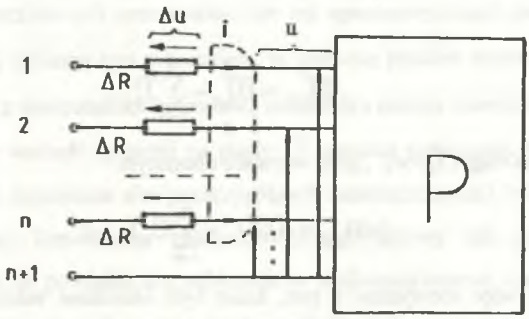
gdzie

$$\underset{e}{G} = \frac{P}{\|\tilde{U}\|^2_{l^2}} \tag{153}$$

Łatwo wykazać, że jeśli obrać stałą c ze wzoru (135) tak, by spełniła nierówność $0 < c < 2$, to warunek wystarczający minimum, o którym mówi twierdzenie 2, jest spełniony. Jest to jedyne minimum - globalne. Wynik ten jest identyczny ze wzorami (115), (118), gdzie $\tilde{U} = (c_0, c_1, d_1, \ldots, c_h, d_h, \ldots)$, $U_0 = c_0$, $U_h = c_h - jd_h$, $h \in N$. Czyli rzeczywiście w układzie z rys.2 prąd aktywny opisany wzorami (115), (118) minimalizuje straty $\Delta R\|i\|^2_{l^2}$ (w przybliżeniu, o którym mówiliśmy).

Zauważmy, że gdyby we wzorach (147), (148) pominąć pewną liczbę harmonicznych napięcia i prądu (począwszy od pewnego numeru), to wynik procedury minimalizacyjnej zawarty w odpowiednikach wzorów (152), (153) różniłby się niewiele od poprzednio otrzymanego, w sensie normy przestrzeni l^2. Dokonując takiego pominięcia przenosimy optymalizację do przestrzeni arytmetycznej R^n, co znacznie upraszcza sprawę pod względem pojęciowym.

Przykład 2 [4]. Przykład ten dotyczyć będzie odbiornika wielozaciskowego zilustrowanego rys.5.



Rys.5. (n+1)-zaciskowy odbiornik energii wraz z rezystorami odpowiedzialnymi za jej straty

Fig.5. An (n+1) - terminal load with resistors responsible for energy losses

Zakładamy, że: $u_\alpha, i_\alpha \in L_T^2$ dla $\alpha \in \{1,...,n\}$, $n \in N$. Wygodnie będzie operować przestrzenią, której elementami są ciągi $u = (u_1,...,u_n)$, $i = (i_1,...,i_n)$ (traktowane bezwymiarowo). Przestrzenią taką jest suma prosta [1, s. 417, 418] n egzemplarzy przestrzeni Hilberta L_T^2. Przestrzeń tę oznaczymy $L_T^{2,n} = \overset{n}{\underset{\alpha=1}{\oplus}} L_\alpha^2$, $L_\alpha^2 = L_T^2$. Działania dodawania i mnożenia przez skalar określamy klasycznie - jak dla każdego ciągu. Iloczyn skalarny podany jest wzorem:

$$(u|i)_{L_T^{2,n}} = \sum_{\alpha=1}^{n} (u_\alpha|i_\alpha)_{L_\alpha^2}. \tag{154}$$

Przestrzeń ta jest zupełna - czyli jest przestrzenią Hilberta. W przestrzeni tej wprowadzamy bazę:

$$\begin{aligned} &((1,0...,0),...,(0...,0,1),...,(\sqrt{2}\cosh\omega(\cdot),0,...,0),..., \\ &(0,...,0,\sqrt{2}\cosh\omega(\cdot)),\ (\sqrt{2}\sinh\omega(\cdot),0,...,0),..., \\ &(0,...,0,\sqrt{2}\sinh\omega(\cdot)),...),\quad \omega = \frac{2\pi}{T},\quad h \in N. \end{aligned} \tag{155}$$

(Zera i jedynki we wzorze (155) oznaczają, podobnie jak we wzorach (91), (92), funkcje stałe.) Współczynniki Fouriera względem tej bazy oznaczamy następująco:

$$\tilde{J} = (a_{10},\ldots,a_{n0},\ldots,a_{1h},\ldots,a_{nh},b_{1h},\ldots,b_{nh},\ldots) \in \underset{\sim}{l}^2 . \tag{156}$$

Nasze zadanie polega na minimalizacji strat na opornikach ΔR (zakładamy, że: $\|\Delta u\|_{L^2_T} << \|u\|_{L^2_T}$) przy dostarczaniu doń mocy czynnej P. Czyli minimalizujemy funkcjonał o wartości

$$\|i\|^2_{L^2_T} = \|\tilde{J}\|^2_{l^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{J}^2_\lambda , \tag{157}$$

ze względu na ciąg $(\tilde{J}_\lambda) \in \underset{\sim}{l}^2$, przy warunku ubocznym

$$(u|i)_{L^2_T} = (\tilde{U}|\tilde{J})_{l^2} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \tilde{U}_\lambda \tilde{J}_\lambda = P . \tag{158}$$

Zadanie jest więc identyczne z tym, które było określone wzorami (147), (148). Różnica polega na innej interpretacji wyrazów ciągów $\tilde{U}$ oraz $\tilde{J}$. Wobec tego wynik podany jest wzorem:

$$_{a}\tilde{J}_\lambda = \underset{e}{G}\,\tilde{U}_\lambda , \tag{159}$$

$$\underset{e}{G} = \frac{P}{\|\tilde{U}\|^2_{l^2}} . \tag{160}$$

Wprowadzając podwójną numerację dla napięć i prądów ze względu na wskaźnik α oraz h mamy:

$$_{a}i_\alpha = \underset{e}{G}\,U_{\alpha 0} + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} \underset{e}{G}\,U_{\alpha h}\exp(jh\omega(\cdot)) , \tag{161}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &\tilde{U} = (c_{10},\ldots,c_{n0},\ldots,c_{1h},\ldots,c_{nh},d_{1h},\ldots,d_{nh},\ldots) , \\ &U_{\alpha 0} = c_{\alpha 0},\ U_{\alpha h} = c_{\alpha h} - jd_{\alpha h} . \end{aligned} \tag{162}$$

Prądy fazowe wykazują więc taką samą symetrię jak napięcia fazowe dla poszczególnych harmonicznych. Dzieje się tak dlatego, że zagadnienie optymalizacyjne związane było z minimalizacją strat $\Delta P = \Delta R\|i\|^2_{L^2_T}$. Gdyby oporności ΔR_α były różne w różnych przewodach, wówczas przy określeniu strat należałoby wprowadzić we wzorze (154) nieujemne współczynniki wagi dla poszczególnych numerów α (równe ΔR_α). Gdyby n+1 przewód, traktowany dotychczas jako bezopornościowy, zaopatrzyć w oporność różną od

zera, np.ΔR, to należałoby operować sumą prostą n+1 składników przestrzeni L_T^2, a następnie narzucić dodatkowy warunek uboczny $\sum_{\alpha=1}^{n+1} i_\alpha = 0$ (przy jednakowej orientacji prądowej względem odbiornika wszystkich n+1 przewodów) lub też sparametryzować podprzestrzeń Hilberta (przestrzeni $L_T^{2,n+1}$) opisaną tym warunkiem za pomocą prądów oczkowych. Tego typu zagadnień związanych z wielozaciskową budową odbiornika można utworzyć więcej np. narzucać rozmaite uboczne warunki symetrii na prądy. (Z pomocą przychodzi wtedy teoria składowych symetrycznych stosowana dla poszczególnych harmonicznych.) Nie będziemy jednak ich kolekcjonować. Zauważymy tylko, obserwując główny tok postępowania w przykładzie 2, że można go powielać dla odbiorników wielozaciskowych niezależnie od rodzaju przestrzeni sygnałów napięciowych i prądowych (tu była ona przestrzenią L_T^2). Wystarczy zastosować pojęcie skończonej sumy prostej przestrzeni Hilberta oraz obrać bazę, która kojarzy się z bazą poszczególnych egzemplarzy tej przestrzeni, np. tak jak we wzorze (155). Z tego powodu w innych zadaniach podobnego typu, różniących się jedynie rodzajem użytych przestrzeni sygnałowych, nie ma sensu zajmować się w dalszym ciągu układami wielozaciskowymi.

□

6. ŁĄCZNE POTRAKTOWANIE ZAGADNIEŃ STRAT I KSZTAŁTU PRĄDU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO Z ZASTOSOWANIEM PRZESTRZENI L_T^2 ORAZ PRZESTRZENI SOBOLEWA $W_T^{2,\lambda}$. PRZEBIEGI PRAWIE OKRESOWE PRĄDÓW I NAPIĘĆ ODBIORNIKA - PRZESTRZENIE $B^2, B^{2,\lambda}$

Przed konstrukcją następnego przykładu wprowadzimy pojęcia funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej bezwzględnie ciągłej oraz pochodnej uogólnionej funkcji w sensie Sobolewa.

Definicja 11 [23, s. 403, 404]. Funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej f określoną w zbiorze $Z \subset R$ (przedziale) nazywamy bezwzględnie ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego przedziału domkniętego $< a;b > \subset Z$ oraz dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego skończonego ciągu podprzedziałów $< a_i ; b_i >$, $i \in \{1,...,n\}$ przedziału $< a;b >$ nie zachodzących na siebie nierówność $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ pociąga za sobą nierówność $\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

□

Rzeczą ważną jest twierdzenie powiadające, że funkcja bezwzględnie ciągła (w ww. zbiorze Z) jest funkcją o wahaniu skończonym, różniczkowalną prawie wszędzie (w sensie miary Lebesguc'a) i jej pochodna jest mierzalna (w sensie tejże miary) oraz lokalnie całkowalna (tj. całkowalna na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym zawartym w zbiorze Z).

Podamy teraz jedną z równoważnych definicji pochodnej Sobolewa.

Definicja 12. Niech będą dane: zbiór otwarty $\Omega \subset R$ oraz funkcja rzeczywista określona na nim taka, że można zmienić jej wartości na zbiorze argumentów miary Lebesgue'a zero otrzymując funkcję bezwzględnie ciągłą. Jej pochodną (istnieje ona prawie wszędzie na "Ω" i jest lokalnie całkowalna) nazywamy pochodną uogólnioną w sensie Sobolewa tej funkcji.

□

Czytelnik o praktycznym nastawieniu spyta pewnie: po co taka modyfikacja zwyczajnej pochodnej? Głównym jej powodem jest to, że przestrzeń, którą zamierzamy skonstruować

w następnym przykładzie, byłaby niezupełna, gdyby użyć w miejsce pochodnej Sobolewa pochodną zwyczajną.

Pochodna Sobolewa najczęściej bywa definiowana dla funkcji wielu zmiennych i ma zastosowanie w teorii równań różniczkowych cząstkowych przy konstruowaniu rozmaitych rozwiązań uogólnionych, które to rozwiązania pozbawione są pewnych cech gładkości. Z pojęciem pochodnej Sobolewa, a następnie przestrzeni Sobolewa można zapoznać się np. korzystając z podręcznika [18] (w szczególności rozdz. III).

Przykład 3 [8]. Wyróżnijmy w przestrzeni L_T^2 funkcje posiadające pochodne uogólnione Sobolewa do ℓ - go rzędu włącznie ($\ell \geq 1$) o całkowalnym kwadracie na przedziale $< 0;T >$. Działania przestrzeni liniowej są zwyczajne. Iloczyn skalarny jest następujący:

$$(f|g)_{W_T^{2,\lambda}} = \sum_{r=0}^{\ell} \lambda_r \frac{1}{T} \int_0^T f^{(r)}(t)\, g^{(r)}(t) dt \ , \qquad (163)$$

gdzie "λ" jest ustalonym ciągiem liczb rzeczywistych oraz $\lambda_0 > 0$, $\lambda_r \geq 0$ dla $1 \leq r \leq \ell$, $f^{(0)} = f$. Otrzymamy w ten sposób podprzestrzeń L_T^2, która jest przestrzenią Hilberta. Jest ona nazywana przestrzenią Sobolewa i oznaczona $W_T^{2,\lambda}$ (mamy tu w istocie rzeczy do czynienia z rodziną takich przestrzeni ze względu na wybór ciągów λ).

Podobnie jak w przypadku przestrzeni L_T^2, elementami przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$ są klasy zbudowane z funkcji, które są równe prawie wszędzie oraz prawie wszędzie mają równe pochodne Sobolewa do ℓ - go rzędu włącznie. Dla uproszczenia rozważań będziemy operować funkcjami, które są reprezentantami tych klas.

Po tej formalnej definicji trzeba odpowiedzieć na pytanie: po co ją wprowadzać? Rozważany przez nas problem wyznaczania prądów aktywnych $_a i$ w przestrzeni L_T^2 co prawda zapewnia minimum strat na oporności ΔR (rys.2), lecz ma tę wadę, że funkcja prądu jest proporcjonalna do funkcji napięcia. Gdyby z jakichś powodów napięcie było odkształcone - prąd aktywny będzie również. Tymczasem chcielibyśmy, by prąd był możliwie zbliżony do sinusoidy. Moc czynną potrzebną odbiornikowi można przenosić doń w rozmaity sposób, między innymi tak, by większość przenoszona była w zakresie niższych harmonicznych. Jeśli z pomocą iloczynu skalarnego (163) utworzyć normę (wzór (78)), to można spodziewać się, że minimalizacja jej kwadratu (przy ustalonej mocy czynnej) wystąpi właśnie przy uwydatnieniu niższych harmonicznych funkcji prądu, ponieważ składniki z pochodnymi we wzorze (163) uwypuklają wyższe. Modelując współczynniki λ_r można pożądany kompromis

przechylać raz na stronę minimalizacji strat - raz uzyskując lepszy kształt prądu aktywnego. Takie są intencje związane z wprowadzeniem przestrzeni Sobolewa. Zobaczymy, że rachunki optymalizacyjne, które zamierzamy wykonać, rzeczywiście potwierdzą nasze przypuszczenia.

Spostrzegamy, że w porównaniu z poprzednimi przykładami, znaleźliśmy się w nowej sytuacji. Na podzbiorze $\underline{W}_T^{2,\lambda} \subset \underline{L}_T^2$ mamy zdefiniowany drugi iloczyn skalarny. Iloczyn przestrzeni L_T^2 służy do opisania mocy czynnej, iloczyn przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$ - do zgenerowania normy, której kwadrat chcemy minimalizować i która określa nam jakość dostarczonej do odbiornika energii. Pod sformułowaniem "jakość" rozumiemy tu wspomniany kompromis pomiędzy minimalizacją strat i uzyskaniem najlepszego kształtu prądu.

Jeśli oznaczyć topologię wprowadzoną przez normę [13, s.304] w przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$ przez τ_w, a topologię indukowaną nań z przestrzeni L_T^2 (też wyznaczoną przez normę tej z kolei przestrzeni) przez τ_{WL}, to mamy związek

$$\tau_{WL} \subset \tau_W . \tag{164}$$

Czyli każdy ze zbiorów otwartych w przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$ wprowadzonych z pomocą normy przestrzeni L_T^2 jest zbiorem otwartym uzyskanym za pomocą normy przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$. Można wykazać, że inkluzja przeciwna nie zachodzi. Wiedząc, że dowolny zbiór otwarty w przestrzeni metrycznej można uzyskać sumując pewną liczbę otwartych kul, rozumiemy pochodzenie inkluzji (164). Mianowicie dwie funkcje leżące "blisko siebie" w sensie normy przestrzeni L_T^2 mogą mieć pochodne mocno różniące się w sensie normy średniokwadratowej. Konsekwencją inkluzji (164) jest fakt, że zanurzenie przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$ w przestrzeń L_T^2, czyli odwzorowanie $\mathrm{id}_{L_T^2}\big|\underline{W}_T^{2,\lambda}$ jest ciągłe [13, s.44]. Z faktu tego będziemy korzystać.

Możemy podać teraz nasze optymalizacyjne zadanie. Zminimalizować funkcjonał o wartości

$$\|i\|^2_{W_T^{2,\lambda}} \tag{165}$$

(względem funkcji $i \in \underline{W}_T^{2,\lambda}$) przy warunku ubocznym

$$(u|i)_{L_T^2} = P , \quad u \in \underline{W}_T^{2,\lambda} . \tag{166}$$

Przeniesiemy w ten sposób postawione zadanie do przestrzeni l^2. Bazę w przestrzeni l^2 określa wzór (91). Jako bazę w przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$ obieramy zbiór

$$\{\Delta_0,\ \Delta_1\sqrt{2}\cos\omega(\cdot),\ \Delta_1\sqrt{2}\sin\omega(\cdot),\ldots,\ \Delta_h\sqrt{2}\cos h\omega(\cdot),\ \Delta_h\sqrt{2}\sin h\omega(\cdot),\ldots\} , \tag{167}$$

gdzie

$$\Delta_h = \nabla_h^{-1}, \quad \nabla_h = \sqrt{\lambda_o + \lambda_1(h\omega)^2 + \ldots + \lambda_\ell(h\omega)^{2\ell}}, \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad h \in N_o. \tag{168}$$

Czyli uzyskujemy dwie liniowe izometrie (układy współrzędnych) $w: \underline{L}_T^2 \to \underline{l}^2$ oraz $v: \underline{W}_T^{2\lambda} \to \underline{l}^2$; $w(i) = \underline{\tilde{J}} = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_h, b_h, \ldots)$ (są to klasyczne współczynniki Fouriera), $v(i) = \underline{\tilde{J}}_s = (a_{s0}, a_{s1}, b_{s1}, \ldots, a_{sh}, b_{sh}, \ldots)$ (nazywamy je współczynnikami Fouriera - Sobolewa lub krócej Sobolewa). Łatwo zauważyć, że pomiędzy współczynnikami tymi mamy związek

$$\tilde{J}_{sh} = \nabla_h \tilde{J}_h. \tag{169}$$

Nasze zadanie w przestrzeni l^2 można teraz sformułować następująco. Zminimalizować funkcjonał o wartości

$$\left\|\tilde{J}_s\right\|_{l^2}^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{J}_{sh}^2 \tag{170}$$

(względem ciągu $(J_{sh}) \in \underline{l}^2$), przy warunku ubocznym

$$(\tilde{U}|\tilde{J})_{l^2} = \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{U}_h \tilde{J}_h = P, \tag{171}$$

biorąc pod uwagę związek (169) pomiędzy sobolewowskimi i fourierowskimi współczynnikami prądów i napięć odbiornika.

Wyrażając we wzorze (171) współczynniki Fouriera poprzez współczynniki Sobolewa i stosując do wyznaczenia minimum twierdzenia 1 i 2 (podobnie jak w przykładzie 1 założenia obu twierdzeń są spełnione), uzyskujemy pożądane minimum dla prądu

$${}_a\tilde{J}_s = G_{ch}\tilde{U}_{sh}, \quad ({}_a\tilde{J}_h = G_{ch}\tilde{U}_h), \quad h \in N_o, \tag{172}$$

gdzie

$$G_{ch} = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{U}_k^2}{\nabla_k^2}}. \tag{173}$$

Czyli stosując wzór ${}_a\underline{i}_s = v^{-1}({}_a\underline{\tilde{J}}_s) = w^{-1}({}_a\underline{\tilde{J}})$ (widać jednocześnie, że: ${}_a\underline{\tilde{J}}_s \in \underline{l}^2$) mamy:

$${}_a\underline{i}_s = G_{c0}U_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} G_{ch}U_h \exp(jh\omega(\cdot)), \tag{174}$$

gdzie "U_h" określone jest jak w przykładzie 1. Prąd aktywny opatrujemy tu indeksem s dla odróżnienia go od prądu aktywnego Fryzego.

Analizując wzór (173) widzimy, że zgodnie z przewidywaniami zachodzi:

$$G_{e\,h+1} < G_{e\,h} \,. \tag{175}$$

Ta sama moc czynna, co opisana w przykładzie 1, dostarczana jest więc do odbiornika z uwydatnieniem niższych harmonicznych prądu, zbliżając jego przebieg do sinusoidy. Przyjmując współczynnik $\lambda_0 = 1$, $\ell \geq 1$ oraz liczbę harmonicznych napięcia większą od jedności, łatwo zorientować się, że straty na oporniku ΔR ($\Delta R\|_a i\|^2_{L^2_T} = \Delta R \sum_{h=0}^{\infty} G_e^{\,2}{}_h \tilde{U}^2_h$) są w tym przypadku większe od strat obliczonych w przykładzie 1 ($\Delta R\|_a i\|^2_{L^2_T} = \Delta R \sum_{h=0}^{\infty} G_e^{\,2} \tilde{U}^2_h$). Idea koniecznych do przeprowadzenia rachunków jest podobna do przyjętej przy dowodzie nierówności (130), toteż pominiemy je.

□

Przed sformułowaniem następnego przykładu znów potrzebna jest pewna porcja wiadomości. Do tej pory definiowaliśmy stosowane przestrzenie Hilberta określając dla odpowiednich przestrzeni liniowych wprost iloczyn skalarny. Nie zawsze jest to wygodne. Nieraz lepiej najpierw określić normę. Nie w każdej jednak przestrzeni unormowanej można określić iloczyn skalarny powiązany z tą normą wzorem (78). Powstaje więc pytanie: kiedy można? Do odpowiedzi na to pytanie potrzebne jest sformułowanie tzw. prawa równoległoboku [1, s.419].

Otóż w przestrzeni unitarnej X dla dowolnych elementów $x,y \in \underline{X}$ zachodzi wzór (prawo równoległoboku)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \,. \tag{176}$$

Wynika ono prosto z zastosowania wzoru definicyjnego (78) dla normy w przestrzeni unitarnej.

Okazuje się [1, s. 419, 420], że jeśli w przestrzeni unormowanej spełnione jest prawo równoległoboku oraz zdefiniujemy odwzorowanie o wartości

$$p(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \,, \tag{177}$$

to dla rzeczywistej przestrzeni unormowanej odwzorowanie to stanowi iloczyn skalarny, tzn. przez odwzorowanie (|)

$$(x|y) = p(x,y) \tag{178}$$

spełnione są warunki (70)-(73). Natomiast dla zespolonej przestrzeni unormowanej wystarczy przyjąć:

$$(x|y) = p(x,y) - j\,p(jx,y), \tag{179}$$

by spełnić te warunki.

Czyli prawo równoległoboku jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, by przestrzeń unormowana (Banacha) stawała się przestrzenią unitarną (Hilberta) z iloczynem skalarnym powiązanym z normą wzorem (78).

Następnie potrzebna będzie umiejętność tzw. uzupełniania przestrzeni unormowanych do przestrzeni Banacha (czyli zupełnych) oraz przestrzeni unitarnych do przestrzeni Hilberta (czyli zupełnych). Ponieważ mamy zamiar rozpocząć nasz przykład od konstrukcji przestrzeni unormowanej (spełniającej prawo równoległoboku), więc zdefiniujemy, co rozumiemy przez uzupełnienie w tym przypadku (por.: [15, s. 59-61]).

Dwie przestrzenie unormowane X i Y nazywamy równoważnymi, jeśli istnieje operator liniowy U odwzorowujący przestrzeń X na przestrzeń Y zachowujący normę, tzn.:

$$\|U(x)\|_Y = \|x\|_X, \qquad x \in \underline{X}. \tag{180}$$

Przestrzeń Banacha Y nazywamy uzupełnieniem przestrzeni unormowanej X, jeśli w "Y" istnieje podprzestrzeń liniowa Y_0 (unormowana normą przestrzeni Y) równoważna przestrzeni X i gęsta w "Y".

"Gęsta w "Y" " tzn., że domknięcie przestrzeni Y_0 jest równe przestrzeni Y ($\overline{Y}_0 = Y$). Mamy też twierdzenie.

Twierdzenie 6. Każda przestrzeń unormowana X ma uzupełnienie Y i jest ono określone z dokładnością do równoważności.

□

Istnieje standardowa metoda uzupełniania dowolnej przestrzeni unormowanej pochodząca od Cantora (Cantor zastosował ją uzupełniając przestrzeń liczb wymiernych do przestrzeni liczb rzeczywistych.) My zastosujemy inną. Jeśli udałoby się nam zbudować pewną szerszą przestrzeń Banacha Y, w której wyróżnilibyśmy podprzestrzeń unormowaną X_0, to dołączając do niej elementy $x \in \underline{Y}$ określone wzorem

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_Y = 0, \quad \text{gdzie } x_n \in X_0 \tag{181}$$

otrzymujemy podprzestrzeń Banacha X przestrzeni Y. Czyli $X = \overline{X}_0$.

Teraz przystępujemy do wyłożenia przykładu.

Przykład 4 [16; 7]. Najpierw trzeba więc będzie naszkicować metodę konstrukcji funkcji prawie okresowych, ujmując je w ramach pewnej przestrzeni Hilberta. Rozpatrzmy zbiór funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej o kwadratach lokalnie całkowalnych w sensie Lebesgue'a (tzn. całkowalnych na każdym przedziale domkniętym i ograniczonym) i mających granicę

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt < \infty. \tag{182}$$

Jako dowolny element definiowanej przestrzeni wprowadzimy klasę funkcji różniących się o funkcje, dla których powyższa granica jest równa zeru. Klasy te są w tym przypadku znacznie obszerniejsze niż w przypadku przestrzeni L_T^2. Funkcje należące do jednej klasy mogą np. różnić się o dowolne funkcje o ograniczonej całce kwadratu na zbiorze R (tzn. w interpretacji energetycznej - o ograniczonej energii). Normę w tej przestrzeni określamy wzorem

$$\|f\|_M^2 = \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt. \tag{183}$$

Jest to przestrzeń zupełna, czyli Banacha. Nazywamy ją przestrzenią Marcinkiewicza i oznaczamy literą M [16, s. 28, 29].

W przestrzeni tej wyróżniamy zbiór B^2 wielomianów trygonometrycznych

$$w(t) = a_0 + \sum_{h=1}^{n} (\sqrt{2}\, a_h \cos\omega_h t + \sqrt{2}\, b_h \sin\omega_h t),$$
$$a_0, a_h, b_h \in R, \quad \omega_h \in R_+, \quad n \in N. \tag{184}$$

Rozumiemy, że chodzi tu każdorazowo o tę klasę funkcji należącą do przestrzeni M, której reprezentatem jest wielomian w. Zbiór wielomianów uzupełniamy tworząc podprzestrzeń Banacha przestrzeni M. Kwadrat normy określony jest wzorem (183), gdzie w przypadku tej przestrzeni (jak można wykazać) granicę górną można zastąpić zwykłą. Norma spełnia wówczas warunek równoległoboku (wzór (176)). Z pomocą wzoru (177) wprowadzamy iloczyn skalarny

$$(f|g)_{B^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)g(t)dt. \tag{185}$$

Jest to przestrzeń Hilberta. Nazywamy ją przestrzenią Besicovitcha i oznaczamy symbolem B^2.

Jeśli w przedstawionej powyżej konstrukcji przestrzeni M założymy dodatkowo, że funkcje należące do niej posiadają pochodne Sobolewa do l-go rzędu włącznie o kwadratach lokalnie całkowalnych w sensie Lebesgue'a oraz dla pochodnych tych istnieją granice określone jak we wzorze (182), to znów wprowadzając odpowiednie klasy funkcji uzyskujemy przestrzeń Banacha zwaną przestrzenią Marcinkiewicza - Sobolewa (MS^{λ}) o kwadracie normy

$$\|f\|^2_{MS^{\lambda}} = \sum_{r=0}^{l} \lambda_r \overline{\lim} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f^{(r)}(t))^2 dt , \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_r \geq 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leq r \leq l . \tag{186}$$

Dysponując w przestrzeni MS^{λ} wielomianami trygonometrycznymi (wzór (184)) (dokładniej: odpowiednimi klasami funkcji, do których należą te wielomiany) uzupełniamy ich zbiór tworząc podprzestrzeń Banacha tejże przestrzeni. Następnie stwierdzając spełnienie w niej warunku równoległoboku (obowiązuje wówczas we wzorze (186) granica zwyczajna), wprowadzamy zgodnie ze wzorem (177) iloczyn skalarny

$$(f|g)_{BS^{2,\lambda}} = \sum_{r=0}^{l} \lambda_r \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t) dt , \tag{187}$$

otrzymując przestrzeń Hilberta $BS^{2,\lambda}$, zwaną przestrzenią Besicovitcha-Sobolewa.

W dalszym ciągu, podobnie jak w poprzednim przykładzie, formułujemy nasz problem optymalizacyjny. Znaleźć funkcję $_{a}i \in \underline{BS}^{2,\lambda}$ (reprezentującą odpowiednią klasę - element przestrzeni $BS^{2,\lambda}$ i oznaczoną dla uproszczenia tak jak ta klasa) minimalizującą funkcjonał o wartości

$$\|i\|_{BS^{2,\lambda}} = P, \tag{188}$$

przy warunku ubocznym

$$(u|i)_{B^2} = P, \; u \in \underline{BS}^{2,\lambda}. \tag{189}$$

Kolej na wprowadzenie odpowiednich baz w przestrzeniach B^2 i $B^{2,\lambda}$. W pierwszej z nich baza składa się z funkcji (reprezentantów klas)

$$1, \sqrt{2}\cos\omega(\cdot), \sqrt{2}\sin\omega(\cdot) \quad \text{dla} \quad \omega \in R_+ , \tag{190}$$

w drugiej

$$\Delta_0, \Delta_\omega \sqrt{2}\cos\omega(\cdot), \Delta_\omega \sqrt{2}\sin\omega(\cdot) \quad \text{dla} \quad \omega \in R_+ , \tag{191}$$

gdzie

$$\Delta_\omega = \nabla_\omega^{-1}, \quad \nabla_\omega = \sqrt{\lambda_0 + \lambda_1\omega^2 + \ldots + \lambda_l\omega^{2l}} , \; \omega \in R_\bullet = R_+ \cup \{0\}. \tag{192}$$

Są to bazy hilbertowskie, lecz nieprzeliczalne, wobec tego tym razem przestrzeń l^2 nie może odgrywać roli przestrzeni uniwersalnej (liniowo izometrycznej z przestrzenią B^2 lub $B^{2,\lambda}$). Rolę tę odgrywa natomiast zdefiniowana już poprzednio przestrzeń $l^2(W)$, gdzie zbiór W jest równoliczny ze zbiorem R_+.

Czyli wprowadzamy z pomocą baz układy współrzędnych $w:\underline{B}^2 \to \underline{l}^2(W), v:\underline{BS}^{2,\lambda} \to \underline{l}^2(W)$. Stosując je mamy $w(i) = \underset{s}{\tilde{J}}, v(i) = \underset{s}{\tilde{J}}$, gdzie powiązanie "$\underset{s}{\tilde{J}}$" oraz "$\underset{s}{\tilde{J}}$" realizuje złożenie $w \circ v^{-1}$. Wyraża ono naturalne włożenie przestrzeni $B^{2,\lambda}$ w przestrzeń B^2 w powyższych układach współrzędnych i jest odwzorowaniem liniowym (iniekcją) oraz ciągłym na skutek zachodzenia inkluzji

$$\tau_{BS^{2,\lambda}B^2} \subset \tau_{BS^{2,\lambda}} \tag{193}$$

podobnej do inkluzji (164). Mówiąc o inkluzji $\underline{BS}^{2,\lambda} \subset \underline{B}^2$ trzeba uczynić pewną uwagę. Mianowicie klasy funkcji będące elementami obu przestrzeni mogą posiadać wspólne elementy, lecz nie są wówczas identyczne. Będziemy je w takiej sytuacji identyfikować, by móc mówić o naturalnym włożeniu (zanurzeniu), a nie o zanurzeniu homeomorficznym [13, s. 94].

Odwzorowanie $w \circ v^{-1}$ można zapisać

$$\underset{s}{\tilde{J}}_{\omega} = \nabla_{\omega}\, \underset{s}{\tilde{J}}_{\omega} \,. \tag{194}$$

Przenosimy problem optymalizacji do przestrzeni $l^2(W)$. Mamy więc poszukać elementu $\underset{s}{\tilde{J}}$ minimalizującego funkcjonał o wartości

$$\left\| \underset{s}{\tilde{J}} \right\|^2_{l^2(W)} = \sum_{\omega \in W} \underset{s}{\tilde{J}}^2_{\omega} = \|i\|^2_{BS^{2,\lambda}} \tag{195}$$

przy warunku ubocznym

$$(\tilde{U}|\underset{s}{\tilde{J}})_{l^2(W)} = \sum_{\omega \in W} \tilde{U}_{\omega}\, \underset{s}{\tilde{J}}_{\omega} = (u|i)_{B^2} = P \,. \tag{196}$$

Stosując twierdzenia 1,2 (których założenia są spełnione) mamy, dla widma (ω_h), $h \in N_0$ napięcia zasilającego odbiornik, rozwiązanie problemu

$$_{s}\underset{s}{\tilde{J}}_{h} = \underset{c}{G}_{h}\, \underset{s}{\tilde{U}}_{h} \,, \quad _{s}\underset{s}{\tilde{J}} \in \underline{l}^2 \,, \tag{197}$$

gdzie "$\underset{c}{G}_{h}$" określone są wzorem (173), w którym należy rozumieć, że współczynniki ∇_h podane są wzorem (192) dla kolejnych wartości "ω_h". Czyli:

$$ {}_{s}i = G_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} G_h\, U_h \exp(j\omega_h(\cdot)) \,. \qquad (198) $$

(Podobnie jak we wzorze (174), indeks s przy literze i we wzorze (198) został użyty dla odróżnienia prądu aktywnego ${}_{s}i$ od prądu aktywnego Fryzego.)

Zwróćmy uwagę, że w punkcie pracy odbiornika widma prądu i napięcia nie muszą być identyczne. Może to powodować zjawisko rezonansu, niestacjonarność lub nieliniowość odbiornika. Natomiast pożądany prąd aktywny ma widmo identyczne z widmem napięcia. Dla pewnego typu odbiorników (np. liniowych i stacjonarnych bez rezonansu) dogodny jest rozkład ortogonalny przestrzeni l^2 (W) na składniki liniowo izometryczne z przestrzenią l^2 [9] - jeden z takich składników (dla ciągu(ω_h)) występuje właśnie dla widma napięcia i prądu aktywnego. Nie będziemy jednak tego tematu tu rozwijać.

□

7. GENERALIZACJA ROZWAŻAŃ Z PUNKTU 6 NA PRZYPADEK DOWOLNEJ PARY SYGNAŁOWYCH PRZESTRZENI HILBERTA H, I

Cztery przedstawione przykłady zachęcają do pewnego uogólnienia metody wyznaczania prądów aktywnych odbiorników zasilanych SEM (ewentualnie źródłem "niemal sztywnym" w sensie wyjaśnionym poprzednio w przykładzie 1). Uogólnienie to miałoby na celu stosowanie podobnej procedury dla rozmaitych przestrzeni sygnałów napięciowych i prądowych (patrz: [9]].

Przypuśćmy więc, że dana jest pewna przestrzeń Hilberta H z iloczynem skalarnym reprezentującym moc czynną (w pewnych przypadkach energię) oraz że na pewnym jej podzbiorze wprowadzamy drugi iloczyn skalarny generujący normę, której kwadrat odgrywa rolę wskaźnika jakości dostarczonej do odbiornika energii. W ten sposób uzyskujemy drugą przestrzeń Hilberta oznaczoną literą I. Zachodzi:

$$\underline{I} \subset \underline{H}, \tag{199}$$

$$\tau_{IH} \subset \tau_I, \tag{200}$$

$$u \in \underline{I}, \tag{201}$$

gdzie "τ_I" jest topologią przestrzeni I wprowadzoną przez jej normę, a "τ_{IH}" - topologią podprzestrzeni I indukowaną z przestrzeni H. Wzory (199), (200), (201) można traktować jako definiujące klasę K złożoną z uporządkowanych trójek

$$(H,I,u) \in K \equiv W_1 \wedge W_2 \wedge W_3, \tag{202}$$

gdzie "W_1", "W_2", "W_3" oznaczają kolejno wyrażenia (199), (200), (201). Wzory te stanowią uogólnienie sytuacji zaobserwowanej w ww. przykładach. W przykładach 1,2 mieliśmy dodatkowo równość I=H. Uogólnienie to jest zbyt obszerne, ponieważ obejmuje ono i takie przypadki przestrzeni H,I, dla których trudno byłoby znaleźć wspomnianą interpretację energetyczną. Dotyczy to w szczególności przestrzeni o bazach dostatecznie wysokiej mocy (mnogościowej). Lecz w tej chwili najważniejszy dla nas jest fakt, że spora klasa przykładów posiadających znaczenie w elektrotechnice da się tak opisać.

W przestrzeniach H oraz I obieramy dowolne hilbertowskie bazy (w konkretnych przykładach takie, które są z jakiś względów dla nas wygodne) i tworzymy opierając się na nich układy współrzędnych (liniowe suriektywne izometrie)

$$w : \underline{H} \to \underline{l}^2(W_H), \tag{203}$$

$$v : \underline{I} \to \underline{l}^2(W_I). \tag{204}$$

W szczególności może zachodzić równość

$$W = W_H = W_I, \tag{205}$$

której spełnienie, dla uproszczenia rozważań, będziemy w dalszym ciągu zakładać (taka sytuacja wystąpiła w rozpatrywanych przykładach).

Naśladując je mamy teraz problem optymalizacyjny. Znaleźć element $i \in \underline{I}$ minimalizujący funkcjonał o wartości

$$\|i\|_I^2 \tag{206}$$

przy warunku ubocznym

$$(u|i)_H = P, \quad u \in \underline{I} . \tag{207}$$

Problem ten wyrażamy w przestrzeni uniwersalnej $l^2(W)$ stosując układy współrzędnych w,v. Czyli zamierzamy znaleźć element $'J \in \underline{l}^2(W)$ minimalizujący funkcjonał o wartości

$$\|'J\|_{l^2(W)}^2 = \sum_{\alpha \in W} ('J^\alpha)^2 = \|i\|_I^2 , \quad 'J = v(i) , \tag{208}$$

przy warunku

$$(U|J)_{l^2(W)} = \sum_{\lambda \in W} U^\lambda J^\lambda = (u|i)_H = P , \quad J = w(i), \quad U = w(u) . \tag{209}$$

Ponieważ układy współrzędnych w oraz v są suriektywnymi izometriami liniowymi i zachodzi wzór (200), więc włożenie naturalne "I" w "H" wyraża się w nich odwzorowaniem liniowym i ciągłym

$$\varphi = w \circ v^{-1} : \underline{l}^2(W) \to \underline{l}^2(W) . \tag{210}$$

Odwzorowanie takie można przedstawić (por.:[1]):

$$U^\lambda = \sum_{\alpha \in W} C_\alpha^\lambda \, 'U^\alpha \quad \text{lub} \quad J^\lambda = \sum_{\alpha \in W} C_\alpha^\lambda \, 'J^\alpha , \tag{211}$$

gdzie macierz C spełnia warunki

$$\sum_{\alpha \in W} (C_\alpha^\lambda)^2 < \infty \quad \text{dla} \quad \lambda \in W , \quad \sum_{\lambda \in W} \Big(\sum_{\alpha \in W} C_\alpha^\lambda \, 'J^\alpha \Big)^2 < \infty , \text{ dla } 'J \in \underline{l}^2(W). \tag{212}$$

(W przykładach 3,4 macierz C była diagonalna o elementach przekątnej odpowiednio Δ_h, Δ_ω, a w przykładach 1,2 - jednostkowa.) Warunek (209) zapiszemy teraz

$$\sum_{\alpha \in W} \sum_{\beta \in W} D_{\alpha\beta} \, 'U^\alpha \, 'J^\beta = P , \tag{213}$$

gdzie

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda \in W} C^{\lambda}_{\alpha} C^{\lambda}_{\beta} \ . \tag{214}$$

Czyli znów trzeba zminimalizować funkcjonał określony formułą (208) przy warunku (213). Ciągle zakładamy, że:

$$\|u\|_{I} \neq 0 \ . \tag{215}$$

Rozwiązanie tego problemu, uzyskane na podstawie twierdzeń 1,2, jest następujące:

$${}_{s}{}'J_{\alpha} = \sum_{\beta \in W} G_{\varepsilon\ \alpha\beta}\ {}'U^{\beta} \ , \tag{216}$$

gdzie

$$G_{\varepsilon\ \alpha\beta} = \frac{D_{\beta\alpha}}{\sum_{\gamma \in W} \sum_{\delta \in W} E_{\gamma\delta}\ {}'U^{\gamma}\ {}'U^{\delta}} \ P \tag{217}$$

oraz

$$E_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta \in W} D_{\alpha\beta}\ D_{\gamma\beta} \ . \tag{218}$$

W szczególnym przypadku, gdy zbiór W jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych N, rolę przestrzeni $l^2(W)$ przyjmuje przestrzeń l^2 i sumowanie podług wskaźnika należącego do "W" zastępujemy sumowaniem podług liczb naturalnych. Można wykazać, że mianownik wzoru (217) zeruje się jedynie, gdy: ${}'U^{\gamma}=0$ dla każdego wskaźnika $\gamma \in W$. Można wykazać również, że szeregi występujące w naszym uogólnieniu są bezwzględnie zbieżne i wobec tego kolejność sumowania w nich nie odgrywa roli. Macierze D oraz E są macierzami odwzorowań liniowych i ciągłych przestrzeni $l^2(W)$ w siebie.

Obserwując wzory niniejszego punktu spostrzegamy ich podobieństwo z klasycznym zapisem tensorowym. Gdyby zastosować umowę sumacyjną, pomijając znaki sumy w przypadkach wskaźników powtarzających się w iloczynach - podobieństwo to byłoby jeszcze wyraźniejsze. Nie jest ono przypadkowe! Obierając bazy w przestrzeniach H oraz I i wprowadzając na ich podstawie układy współrzędnych w, v, czynimy z nich rozmaitości hilbertowskie (pokryte w obu przypadkach dziedziną jednej globalnej mapy) [5]. Działając na te układy unitarnymi grupami transformacji $GUT(l^2(W))$ otrzymujemy na powyższych rozmaitościach kolejno struktury Kleina $\underset{H}{U}_{w,GUT(l^2(W))}$, $\underset{I}{U}_{v,GUT(l^2(W))}$. Wybór grup unitarnych tłumaczy się tym, że wzory (209), (208) określające iloczyn skalarny i kwadrat normy pozostają wówczas współzmiennicze. Wybór ten kojarzy się poza tym z wyborem dowolnych baz hilbertowskich w przestrzeniach H,I.

Następnie w zamieszczonych wzorach należy rozpoznać składowe pewnych obiektów geometrycznych występujących na opisywanych rozmaitościach, wyrażonych w odpowiednich układach współrzędnych. Są nimi wektory **U,J,'U,'J** zaczepione w dowolnym punkcie odpowiedniej rozmaitości. Nie precyzujemy, czy są to wektory kontrawariantne, czy kowariantne, bowiem przy ograniczeniu się do transformacji unitarnych nie ma różnicy między nimi. (Z tego powodu nie ma też potrzeby rozróżniać wskaźników ko i kontrawariantnych w przypadku tensorów.) Ten fakt powoduje też dowolność w rozmieszczaniu wskaźników składowych wektorów i tensorów na poziomie górnym lub dolnym w omawianych wzorach obecnego paragrafu. Specyficzną rolę odgrywa obiekt geometryczny o macierzy składowych C w układach współrzędnych w,v. Jest on wektorem ze względu na struktury obu rozmaitości H,I. Jest to zatem tzw. obiekt geometryczny rozdwojony, będący odpowiednikiem klasycznego (występującego w geometrii skończenie wymiarowej) tensora pośredniczącego, którego składowe uzyskuje się różniczkując odwzorowanie φ (wzór (210); por.: [14, s. 153]). Obiekty geometryczne o macierzach D oraz E są tensorami o podwójnej walencji na rozmaitości I. Obiekty te mają również dowolne punkty zaczepienia (można powiedzieć, że tworzą one odpowiednie obiekty geometryczne swobodne).

Warto zauważyć, że względem zdefiniowanych struktur Kleina wzory (208), (209), (211), (213), (214), (216), (217), (218) są współzmiennicze (mamy tu ilustrację pojęcia komitanty).

Motywacją praktyczną wprowadzenia tego geometrycznego nurtu rozważań może być to, że w pewnych układach współrzędnych macierze C, D, E są diagonalne, co jest, oczywiście, pożądane (tak było w przykładach (1-4)). Podobne rozumowania z podobną motywacją można by przeprowadzić w dalszych rozdziałach, gdzie optymalizacja dotyczy sieci bardziej złożonych. Lecz lepiej tego nie czynić, by nie przeciążać treściami geometrycznymi Czytelnika, który, być może, nie na taką lekturę jest teraz nastawiony.

8. ZAKRES STOSOWALNOŚCI TEORII ROZWAŻANYCH MOCY

Punkty 6,7 poświęcone były wyznaczaniu prądu aktywnego, który z jednej strony zapewniał zmniejszenie strat na rezystancji ΔR włączonej w szereg z odbiornikiem, z drugiej zaś powodował w przypadku przebiegów odkształconych zbliżenie prądu odbiornika do sinusoidy. Patrząc na wzory (115) - (118) można spytać: czy podobne rozkłady prądów odbiorników można zrealizować w przypadku użycia dowolnej pary przestrzeni Hilberta H,I w sensie wyjaśnionym w tych punktach? Idea jest tu przejrzysta. Trzeba rozłożyć prąd $i = {}_a i$ na składniki: pierwszy, który łatwo skompensować pewnymi prostymi kompensatorami i drugi, niekompensowalny w ten sposób. W szczególnym przypadku te proste kompensatory - to po prostu układy L,C. W ślad za dokonaniem takiego rozkładu idzie, oczywiście, następne pytanie: czy trzy prądy uzyskane w wyniku tego rozkładu są parami prostopadłe oraz czy, w przypadku ustalonego napięcia zasilania (o pełnym widmie) i stosowania różnych odbiorników pobierających prądy $i \in \underline{I}$, można rozłożyć przestrzeń I na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni I_a, I_k, I_{nk}, na które składają się kolejno prądy aktywne, kompensowalne i niekompensowalne z pomocą pewnych środków? Jak pokazano w artykule [8] (gdzie rozważania odnoszą się do odbiorników (n+1) - zaciskowych, $n \in N$ i pary przestrzeni L_T^2 , $W_T^{2,\lambda}$), rzeczywiście, jeśli dla n>1 uczyni się pewne dodatkowe założenia o odbiornikach (nie trzeba ich przyjmować dla n=1), rezultat taki można osiągnąć. Podobnie rzecz ma się w przypadku pary przestrzeni B^2, $B^{2,\lambda}$ (por.: [7], gdzie rozważany jest przypadek n = 1). Dla dowolnej pary przestrzeni H,I wraz z wyróżnionym napięciem zasilania i klasą kompensatorów można co najwyżej postulować rozkład przestrzeni na ortogonalną sumę prostą, tak jak to zostało zrobione w pracy [9]. Postulat ten traktujemy jako wyróżniający pewne pary przestrzeni H,I (ściślej: ww. czwórki). Jeśli nie jest on spełniony w sposób naturalny, tak jak to jest dla par $(L_T^2 , W_T^{2,\lambda})$,$(B^2, B^{2,\lambda})$ oraz prądów ${}_r i$, traktowanie go jako dodatkowego warunku ubocznego w postawionym zagadnieniu optymalizacyjnym jest pozbawione praktycznego sensu (bowiem oprócz oczywistej jego komplikacji, w przypadku gdy ma ono rozwiązanie, wartość $\|{}_* i\|_1$ będzie większa lub równa analogicznej wartości uzyskanej bez stawiania tego warunku).

Konsekwencją wzajemnej prostopadłości (w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni I) prądów ${}_a i$, ${}_k i$, ${}_{nk} i$, przy przyjęciu definicji odpowiednich mocy

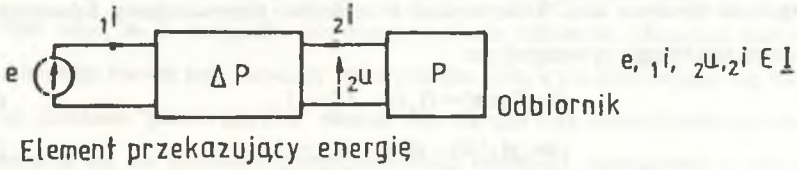
$$P_a = \|u\|_t \|{}_a i\|_t , Q_k = \|u\|_t \|{}_k i\|_t , Q_{nk} = \|u\|_t \|{}_{nk} i\|_t , P_m = \|u\|_t \|i\|_t \qquad (219)$$

jest tzw. prostopadłościan mocy

$$P_m^2 = P_a^2 + Q_k^2 + Q_{nk}^2 , \qquad (220)$$

który jest uogólnieniem wzoru (124). Moc P_a jest więc niejako "świadkiem" osiągniętego przez prąd ${}_a i$ stanu optymalnego. Moce Q_k, Q_{nk} z kolei świadczą o nadmiarze prądu odbiornika i wskazują na części tego nadmiaru: Q_k określa część łatwiej kompensowalną i Q_{nk} - trudniej (z ewentualnym użyciem bardziej złożonych kompensatorów). Widać więc, że moce te mają w toku naszego wykładu charakter wtórny (są pewną konsekwencją postawionego zagadnienia optymalizacyjnego). Lecz z drugiej strony stanowią prosty i pożyteczny środek oceny stopnia odejścia odbiornika od optymalnego stanu prądowego.

Powstaje nowe pytanie: czy w przypadku układów, które przekazują energię ze źródeł SEM do odbiorników posiadających bardziej złożoną konstrukcję niż szeregowo połączony opornik ΔR z odbiornikiem, da się odtworzyć ciąg rozumowań doprowadzających do wzoru (220) i stanowiących o sensie i potrzebie definiowania mocy Q_k, Q_{nk} (w szczególności mocy Q_r, Q_s)? Zilustrujmy rzecz prostym schematem (rys.6).



Rys.6. Obwód elektryczny złożony z SEM, elementu przekazującego energię do odbiornika oraz odbiornika dwuzaciskowego

Fig.6. An electric network consisting of an electromotive force (emf), an element transferring energy to the load and a two-terminal load

Problem optymalizacji polega na znalezieniu prądu ${}_{2a}i \in \underline{I}$ minimalizującego funkcjonał jakości o wartości $(e|_1 i)_I + ({}_2u|_2 i)_I$ ("$_1i$" oraz "$_2u$" zależą od "$_2i$"!, w szczególności dla I=H wartość ta równa jest ΔP), przy warunku $({}_2u|_2 i)_H = P$. Dokładniej postawimy go w następnym punkcie pracy, gdzie będzie on sformułowany dla dowolnej skończonej liczby SEM oraz odbiorników wraz z problemem jednoczesnego doboru kompensatorów. Jak pokazuje wynik obliczeń przeprowadzonych w pracy [26] (dla pewnego szczególnego układu o schemacie z rys.6), omawiana wzajemna ortogonalność trójki prądów ${}_a i$, ${}_r i$, ${}_s i$ zostaje naruszona

w przestrzeni I (jej rolę odgrywa wówczas przestrzeń $W_T^{2,\lambda}$), jak również, czego można było się spodziewać na podstawie rozumowań punktu 6, w przestrzeni H (tam jest to przestrzeń L_T^2). Skutkiem tego nie zachodzi wzór (220) i poprzedzające go definicje mocy (wzór (219)) tracą swoje naturalne zastosowanie. (Moce Q_k, Q_{nk} przestają być wówczas miernikiem "odstrojenia" odbiornika od stanu optymalnego.)

Klasyczna teoria mocy stawiała sobie za zadanie znalezienie takiej mocy, która zależałaby wyłącznie od napięcia i prądu odbiornika i świadczyłaby o wystąpieniu minimum strat w układzie doprowadzającym energię do niego. Chciała ona także stworzyć moce, które wchodzą w relację z powyższą za pomocą znanego nam już wzoru zwanego prostopadłościanem mocy i świadczą o "odstrojeniu" odbiornika od stanu optymalnego. Widzimy, że druga część tego zadania w przypadku układu zilustrowanego rys.6 jest na ogół niewykonalna (chyba, że np. układ ten redukuje się do przedstawionego na rys.2). Nietrudno wyjaśnić przyczynę, dla której i pierwsza część zadania jest również na ogół niewykonalna. Aby posiadać informację o stratach ΔP układu przekazującego energię (lub też ogólniej: o użytym poprzednio funkcjonale jakości) trzeba oprócz pary wielkości $({}_2u, {}_2i)$ znać również parę $({}_1u, {}_1i)$, która z założenia nie bierze udziału w konstrukcji mocy mającej świadczyć o osiągnięciu minimum strat. Rozumowanie to częściowo sformalizujemy. Równania układu przekazującego energię są następujące:

$$ {}_1i = {}_e f({}_2i, e) = f({}_2i), \quad f: \underline{I} \to \underline{I}, \tag{221} $$

$$ {}_2u = {}_e g({}_2i, e) = g({}_2i), \quad g: \underline{I} \to \underline{I}, \tag{222} $$

(dla ustalonej SEM e).

Prąd służący do zdefiniowania oczekiwanej mocy (po pomnożeniu jego normy w przestrzeni I przez "$\|{}_2u\|_I$") określony jest z pomocą odwzorowania o wartości

$$ k({}_2i, {}_2u) = k({}_2i, g({}_2i)), \quad k: \underline{I} \times \underline{I} \to R; \tag{223} $$

natomiast prąd będący wynikiem optymalizacji:

$$ {}_*i = I(f,g) \in \underline{I}, \quad f,g: \underline{I} \to \underline{I}, \tag{224} $$

bowiem zależy on od własności układu przekazującego energię. Czyli oczekujemy spełnienia równania

$$ k({}_2i, g({}_2i)) = I(f,g), \tag{225} $$

tożsamościowo ze względu na odwzorowania

$$ f,g: \underline{I} \to \underline{I}, \tag{226} $$

(zbiór odwzorowań f i g można zawęzić narzucając na nie rozmaite dodatkowe warunki, jak np. ciągłość) oraz elementy $_2i \in \underline{I}$ spełniające warunek

$$(g(_2i)|_2 i)_H = P \quad . \tag{227}$$

Równanie (225) służy do wyznaczenia poszukiwanych odwzorowań k przy zadanym odwzorowaniu l wynikającym z rozwiązania problemu optymalizacyjnego. Spełnienie tożsamościowe tego równania oznacza uniwersalność poszukiwanego prądu $k(_2i,g(_2i))$ ze względu na klasę układów opisanych dowolnymi odwzorowaniami $f,g;\underline{I} \rightarrow \underline{I}$ i o dowolnym prądzie odbiornika $_2i \in \underline{I}$ pobierającego moc czynną P. Nie będziemy poszukiwali wszystkich rozwiązań tego równania (dla rozmaitych ograniczeń narzucanych na dziedziny odwzorowań k i l). Lecz widać, że stanowią one pewne wyjątkowe przypadki z tego względu, że lewa strona równania zależy od "$_2$i", "g" prawa od "f" i "g". Rozumiemy też w świetle tego wyjątkowość zasilania "prawie sztywnego". Wówczas mamy jedno odwzorowanie $f=id_I$ oraz "g" jest odwzorowaniem w przybliżeniu stałym ($_2u \approx e$). Odwzorowanie l określone jest w przypadku przestrzeni $I=H=L^2_T$ wzorem (115) ($_a i \approx \underset{e}{G}\, e$). Lewa i prawa strona w równaniu (225) są więc wartościami odwzorowań stałych ("l" jest określone w dziedzinie jednopunktowej). W omawianym już przybliżeniu równanie to jest spełnione.

Widać więc, że w przypadku dowolnego zasilania odbiornika klasyczna teoria mocy ulega załamaniu (nawet jeśli stawiamy tylko problem strat, a nie interesujemy się kształtem prądu $_2i$). Zasilanie "prawie sztywne" stanowi więc na ogół kres stosowalności tej teorii. Jak przekonujemy się na podstawie przeprowadzonych rozważań, ograniczenie to nie wynika z przyjęcia jakiś "błędnych" definicji mocy aktywnej oraz biernej i nieodnalezienia tych "właściwych". Po prostu jest ono skutkiem braku wystarczających informacji o układzie przekazującym energię do odbiornika, jeśli obserwujemy jedynie jego (tzn. odbiornika) zaciski. Wielu elektryków zajmujących się teorią mocy usiłowało odgadnąć te "właściwe". Z historią owych zmagań (do roku 1984) Czytelnik może zapoznać się studiując publikację [12].

Zagadnieniem skojarzonym z omawianymi jest tzw. problem taryfy, to jest opłat, jakie powinni wnosić poszczególni odbiorcy za spowodowanie dodatkowych strat w układzie przekazującym im energię, występujących przy przekroczeniu prądu optymalnego. (Dodatkowych - tzn. będących różnicą strat spowodowanych aktualnymi prądami odbiorników oraz prądami optymalnymi.) Jeśli przyjąć dla każdego z odbiorców sposób dostarczania tej energii opisany na rys.2 - nie widać tu specjalnych trudności. Moc Q, która

w kwadracie wraz z kwadratem mocy czynnej daje kwadrat mocy pozornej, może służyć za podstawę do skonstruowania takiej taryfy (przy bardziej liberalnym podejściu do odbiorcy rolę tej mocy może przejąć moc Q_k). Ponieważ kwadrat tej mocy jest proporcjonalny (w układzie z rys.2) do dodatkowych strat, to w przypadku gdy zmienia się on wolno w czasie (wolno - tzn. zmiany te są znaczne dopiero w czasach znacznie większych od okresu dla przypadku przestrzeni L^2_T), wystarczy go całkować używając dodatkowo odpowiedniego współczynnika proporcjonalności.

Niestety, w sytuacji podobnej jak na rys.6 (różnica polega na tym, że mamy teraz m wydajników SEM i n odbiorników, gdzie $m \geq 1$, $n > 1$ oraz wspólny układ przekazujący energię do odbiorników), całkowita dodatkowa moc strat nie może być na ogół obliczona drogą superpozycji ze względu na kolejne załączanie poszczególnych odbiorników i skutkiem tego nie wiadomo, jak "sprawiedliwie" rozdzielić koszty tych strat między poszczególnych odbiorców. Jeśli jednak mamy sytuację, gdy prądy pobierane przez odbiorców różnią się niewiele od stanu optymalnego (mamy stan układu, który można nazwać suboptymalnym), to wówczas będziemy mogli zaproponować pewne rozwiązanie problemu taryfy. Mianowicie wyobraźmy sobie zależność całkowitych dodatkowych strat $\Delta_d P$ od współczynników fourierowskich prądów poszczególnych odbiorników (gdzie współczynniki te wyznaczane są względem pewnej bazy w przestrzeni Hilberta, do której funkcje prądów należą) w postaci odwzorowania o wartości

$$\Delta_d P = h({}_2J_1,\dots,{}_2J_n) \in R,\ {}_2J_k \in l^2(W),\ k \in \{1,\dots,n\}. \tag{228}$$

(Ogólniej, rolę przyrostu $\Delta_d P$ może przejąć przyrost pewnego funkcjonału jakości, którego odpowiedniki minimalizowane były w poprzednich przykładach, a zbudowanego teraz dla układu o wielu odbiornikach.) Następnie skonstruujmy w otoczeniu prądu optymalnego układu (tzn. prądu aktywnego) różniczkę pierwszego rzędu odwzorowania h (zakładamy, że jest ono różniczkowalne), por. [19, s. 138-144]

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\alpha \in W} \frac{\partial h}{\partial_2 J_k^{\alpha}} ({}_{2a}J)({}_2J_k^{\alpha} - {}_{2a}J_k^{\alpha}),\quad {}_2J = ({}_2J_1,\dots,{}_2J_n),\quad {}_{2a}J = ({}_{2a}J_1,\dots,{}_{2a}J_n). \tag{229}$$

Różniczka ta jest sumą n przyczynków

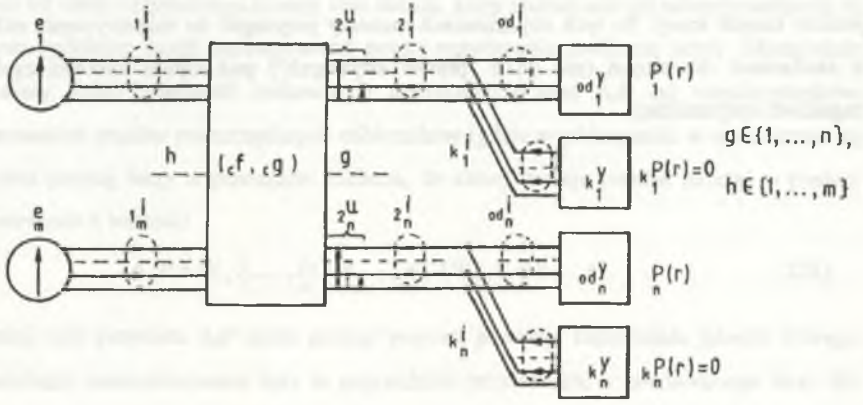
$$\sum_{\alpha \in W} \frac{\partial h}{\partial_2 J_k^{\alpha}} ({}_{2a}J)({}_2J_k^{\alpha} - {}_{2a}J_k^{\alpha}),\ k \in \{1,\dots,n\}, \tag{230}$$

które możemy przypisać kolejno każdemu spośród odbiorców energii. Jeśli prądy ${}_2J_k$ oraz ${}_{2a}J_k$ są wolno zmienne w czasie (w sensie wyjaśnionym w przypadku przestrzeni L^2_T, czy też raczej wówczas B^2), wystarczy całkować te przyczynki otrzymując w ten sposób obciążenie poszczególnych odbiorców dodatkowymi kosztami. W stanie suboptymalnym różniczka pierwszego rzędu dobrze przybliża przyrost funkcjonału h. (Stwierdzenie to można przyjąć za swego rodzaju definicję stanu suboptymalnego.) Uzasadnia to znaczenie przeprowadzonego rozumowania.

Widać więc, że i w tym przypadku (zagadnienia taryfy) rola teorii mocy ograniczona jest właściwie do układów o zasilaniu "prawie sztywnym" odbiorników. Znaczenie w naszych rozważaniach zachowuje więc jedynie pojęcie mocy chwilowej i jej wartości średniej - czyli mocy czynnej. Oczywiście, jest to spowodowane tym, że w niniejszej pracy interesujemy się jedynie opisanym zagadnieniem strat i kształtu prądów odbiorników. Nie jest wykluczone, że poszerzenie tego skromnego obszaru zainteresowań wiązałoby się z uznaniem znaczenia jeszcze innych mocy. Po tych objaśnieniach możemy przystąpić do rozpatrywania układów o zasilaniach dowolnych (nie tylko "prawie sztywnych") pod kątem interesujących nas zagadnień optymalizacji.

9. UKŁAD O m WYDAJNIKACH, n ODBIORNIKACH WRAZ Z KOMPENSATORAMI DOŁĄCZONYMI RÓWNOLEGLE ORAZ ELEMENCIE PRZEKAZUJĄCYM ENERGIĘ DO ODBIORNIKÓW. PRZYPADEK ŁĄCZNEGO POTRAKTOWANIA STRAT UKŁADU PRZEKAZUJĄCEGO ENERGIĘ ORAZ KSZTAŁTU PRĄDÓW ODBIORNIKÓW Z UŻYCIEM DOWOLNYCH HILBERTOWSKICH PRZESTRZENI SYGNAŁOWYCH. POSTAWIENIE PROBLEMU

Zgodnie z tytułem punktu 9 rozpatrzmy więc układ, który pod względem topologicznym charakteryzuje rys.7.



Rys.7. Obwód elektryczny złożony z m SEM wielozaciskowych, elementu przekazującego energię do odbiorników oraz n odbiorników wielozaciskowych wraz z równolegle dołączonymi kompensatorami

Fig.7. An electric network consisting of m multiterminal emfs, an element transferring energy to loads and n multiterminal loads with compensators connected in parallel

Zakładamy, że h-ta gałąź wydajnika (SEM) złożona jest z $_1p_h$ przewodów (nie licząc przewodu powrotnego; podobnie g-ta gałąź odbiornika składa się z $_2p_g$ przewodów (bez

powrotnego). Z każdym przewodem dowolnej gałęzi wydajnika lub odbiornika wiążemy dwie przestrzenie Hilberta: oznaczoną literą I w przypadku przestrzeni związanej z funkcjonałem jakości energii elektrycznej oraz H - w przypadku przestrzeni, w której wartości iloczynu skalarnego sygnału napięciowego i prądowego interpretujemy jako moce czynne (lub energie). Czyli mamy następujące ciągi przestrzeni Hilberta:

$({}_1\underset{h}{H}), ({}_2\underset{g}{H}), ({}_1\underset{h}{I}), ({}_2\underset{g}{I})$, $h \in \{1,...,m\}$, $g \in \{1,...,n\}$ oraz definicje nowych przestrzeni

$$ {}_1\underset{h}{H} = \bigoplus_{{}_1\alpha=1}^{{}_1p_h} {}_1^{\alpha}\underset{h}{H}, \quad {}_2\underset{g}{H} = \bigoplus_{{}_2\alpha=1}^{{}_2p_g} {}_2^{\alpha}\underset{g}{H}, \quad {}_1^{\alpha}\underset{h}{H} = {}_2^{\alpha}\underset{g}{H} = H, \tag{231} $$

$$ {}_1\underset{h}{I} = \bigoplus_{{}_1\alpha=1}^{{}_1p_h} {}_1^{\alpha}\underset{h}{I}, \quad {}_2\underset{g}{I} = \bigoplus_{{}_2\alpha=1}^{{}_2p_g} {}_2^{\alpha}\underset{g}{I}, \quad {}_1^{\alpha}\underset{h}{I} = {}_2^{\alpha}\underset{g}{I} = I, \tag{232} $$

gdzie znak $\oplus$ dotyczy, jak w przykładzie 2, sumy prostej przestrzeni Hilberta. Oprócz tego definiujemy następujące sumy proste przestrzeni:

$$ {}_1H = \bigoplus_{h=1}^{m} {}_1\underset{h}{H}, \quad {}_2H = \bigoplus_{g=1}^{n} {}_2\underset{g}{H}, \tag{233} $$

$$ {}_1I = \bigoplus_{h=1}^{m} {}_1\underset{h}{I}, \quad {}_2I = \bigoplus_{g=1}^{n} {}_2\underset{g}{I}. \tag{234} $$

Przydatność definicji (233), (234) stanie się za chwilę oczywista, gdy będziemy opisywać element przekazujący energię (rys.7) z pomocą pewnych operatorów; natomiast generowanie wszystkich tych przestrzeni Hilberta z dwu: H oraz I ma na celu utrzymanie zachowawczości odpowiednich mocy związanych z tymi przestrzeniami.

Po tak wprowadzonych przestrzeniach sygnałów trzeba podać pewne związki między nimi oraz zlokalizować w nich odpowiednie napięcia i prądy, tzn.:

$$ \underline{I} \subset \underline{H}, \tag{235} $$

$$ \tau_{IH} \subset \tau_I \tag{236} $$

$$ \underset{h}{e}, {}_1\underset{h}{i} \in {}_1\underline{I}_h, \quad {}_2\underset{g}{u}, {}_2\underset{g}{i}, {}_{od}\underset{g}{i}, {}_k\underset{g}{i} \in {}_2\underline{I}_g, \tag{237} $$

gdzie oznaczenia τ_{IH}, τ_I mają taki sam sens, jak we wzorze (200). Ze wzorów (235), (236) oraz (231)-(234) wynika:

$$ {}_1\underline{I}_h \subset {}_1\underline{H}_h, \quad {}_2\underline{I}_g \subset {}_2\underline{H}_g, \quad {}_1\underline{I} \subset {}_1\underline{H}, \quad {}_2\underline{I} \subset {}_2\underline{H}, \tag{238} $$

$$\tau_{{}_1\underline{I}_h\,{}_1H_h} \subset \tau_{{}_1\underline{I}_h}, \quad \tau_{{}_2\underline{I}_g\,{}_2H_g} \subset \tau_{{}_2\underline{I}_g}, \quad \tau_{{}_1I\,{}_1H} \subset \tau_{{}_1I}, \quad \tau_{{}_2I\,{}_2H} \subset \tau_{{}_2I}. \tag{239}$$

Mając przestrzenie sygnałów, trzeba teraz opisać poszczególne elementy obwodu z rys.7.

$$_{od}\underset{g}{y} : {}_2\underline{I}_g \to {}_2\underline{I}_g, \text{ tzn. } {}_{od}\underset{g}{i} = -{}_{od}\underset{g}{y}({}_2\underset{g}{u}), \tag{240}$$

$$_k\underset{g}{y}(\cdot,r) : {}_2\underline{I}_g \to {}_2\underline{I}_g, \text{ tzn. } {}_k\underset{g}{i} = -{}_k\underset{g}{y}({}_2\underset{g}{u},r), \tag{241}$$

gdzie

$$r \in \Delta, \quad \Delta \subset \underline{l}^2_s \quad \text{lub} \quad \Delta \subset \underline{l}^2 \tag{242}$$

oraz na ogół "Δ" jest podzbiorem otwartym ww. przestrzeni. Interpretacja ciągu parametrów r związana jest z możliwością swobodnego wyboru pewnych parametrów kompensatorów, np. z wyborem skończonej liczby parametrów L,C (wtedy mamy do czynienia z przestrzenią l^2_s) lub przeliczalnej (wtedy występuje przestrzeń l^2). W skład ciągu r mogą też wchodzić elementy macierzy incydencji kompensatorów. Dla uproszczenia oznaczeń ciąg r charakteryzuje wszystkie kompensatory. Rozumiemy jednak, że dla ustalonego kompensatora jego prąd od parametrów pozostałych nie będzie zależał (nie ma sprzężenia kompensatorów poprzez parametry; zresztą formalne dopuszczenie takiego sprzężenia, jak i w ogóle jednego wspólnego kompensatora, nie skomplikowałoby zbytnio samego postawienia zagadnienia). Zakładamy przy tym, że kompensatory nie pobierają mocy czynnej, tzn.:

$$_k\underset{g}{P}(r) = 0. \tag{243}$$

Warunek (243), w przypadku przebiegów okresowych i kompensatorów L,C jest spełniony dla dowolnych (w powyższym rozumieniu) parametrów r i nie stanowi dla nich ograniczenia. Nie zawsze jednak kompensatory muszą być poszukiwane w klasie układów L,C. W przypadku obecności elementów aktywnych warunek (243) istotnie krępuje wybór ciągu r. Odnośnie do elementu przekazującego energię mamy (dla ustalonych SEM $\underset{h}{e}$):

$$\begin{aligned} &f : {}_2\underline{I} \to {}_2\underline{I}, \quad \text{tzn.} \quad {}_2i = {}_cf({}_2i,e) = f({}_2i), \\ &g : {}_2\underline{I} \to {}_2\underline{I}, \quad \text{tzn.} \quad {}_2u = {}_cg({}_2i,e) = g({}_2i), \\ &{}_2u = ({}_2\underset{1}{u},\dots,{}_2\underset{n}{u}), \quad {}_2i = ({}_2\underset{1}{i},\dots,{}_2\underset{n}{i}), \quad e = (\underset{1}{e},\dots,\underset{m}{e}), \quad {}_1i = ({}_1\underset{1}{i},\dots,{}_1\underset{m}{i}). \end{aligned} \tag{244}$$

Odwzorowania $f, g, {}_{od}\underset{g}{y}, {}_k\underset{g}{y}$ mogą być pierwotnie określone dla szerszych dziedzin i przeciwdziedzin, np. mogą tu w grę wchodzić przestrzenie ${}_2H, {}_1H, {}_2\underset{g}{H}$. Jednak wówczas żądamy, by ich obcięcia opisane wzorami (240), (241), (244) nie wyprowadzały (jeśli chodzi

o przeciwdziedziny) odpowiednio poza przestrzenie ${}_2\mathrm{I}$, ${}_1\mathrm{I}$, ${}_2\underset{g}{\mathrm{I}}$. W razie potrzeby będziemy zakładać, że odwzorowania te spełniają pewne dodatkowe warunki, np. gładkości, które formułowane będą na bieżąco. Odwzorowania te w szczególnym przypadku mogą też być liniowe, przyczynowe i stacjonarne (np. w przestrzeni L^2_T lub $W_T^{2,\Lambda}$).

Wprowadzimy jeszcze definicje pewnych nowych odwzorowań:

$$ {}_z\underset{g}{y}(\cdot,r) = {}_{od}\underset{g}{y} + {}_k\underset{g}{y}(\cdot,r),\quad {}_z\underset{g}{z}(\cdot,r) = {}_z\underset{g}{y}^{-1}(\cdot,r), \tag{245} $$

zakładając milcząco, że odwzorowania ${}_z\underset{g}{y}$ są bijektywne dla dowolnych parametrów $r\in\Delta$ (w konkretnych przypadkach warunek ten można osłabić zastępując go odpowiednią lokalną odwracalnością " ${}_z\underset{g}{y}$ "). Dalej opierając się na odwzorowaniu g tworzymy odwzorowania $\underset{g}{g}$:

$$ \underset{g}{g}({}_2i) = {}_2\underset{g}{u}. \tag{246} $$

Z ich pomocą zapisujemy równania rozpatrywanej sieci

$$ \underset{g}{g}({}_2i) = -\,{}_z\underset{g}{z}({}_2i,r),\quad g\in\{1,\dots,n\}. \tag{247} $$

Jeśli równania te mają rozwiązania ${}_2i$ należące do zbioru ${}_2\mathrm{I}$ dla parametrów $r\in\Delta$, to stanowią one "punkty pracy" sieci. Mogą one być dla ustalonego parametru r określone jednoznacznie - może ich być wiele (szczególnie w sieciach nieliniowych). Ponieważ w tej chwili chcemy jedynie postawić problem, więc nie możemy zajmować się tu klasyfikacją takich przypadków. Nadmieniamy tylko, że jeśli równania (247) spełnione są w pewnym punkcie $({}_{2,0}i,\ {}_0r)$ oraz zachodzą w tym punkcie oraz jego otoczeniu regularnościowe warunki wymagane przez cytowane już twierdzenie Gravesa [19, s.190], to możemy wówczas, przynajmniej lokalnie, określić odwzorowania $\underset{g}{\beta_1}, \beta_1$, których wartości stanowią wspomniane punkty pracy sieci

$$ {}_{2pr}\underset{g}{i} = \underset{g}{\beta_1}(r),\quad {}_{2pr}i = \beta_1(r). \tag{248} $$

Teraz trzeba sformułować problemy minimalizacyjne. Rzecz jasna, na początku należy zdecydować się, jaki funkcjonał jakości energii chcemy minimalizować. Gdyby chodziło nam o minimalizację mocy czynnej pobieranej przez element $({}_cf,{}_cg)$ - sprawa byłaby jasna: wystarczyłoby do sumy iloczynów skalarnych napięć i prądów wydajników i odbiorników (z użyciem przestrzeni H) wprowadzić odwzorowania f oraz g. W przypadku gdy zależy nam na jednoczesnej optymalizacji kształtu prądu ${}_2i$ oraz ograniczeniu strat mocy czynnej w elemencie $({}_2f,{}_cg)$, zastępujemy iloczyny skalarne w nadprzestrzeniach ${}_1H,{}_2H$ iloczynami

skalarnymi w odpowiednio dobranych podprzestrzeniach ${}_1I,{}_2I$ (patrz przykłady 3,4). Argumentacja przemawiająca za takim postępowaniem jest następująca. Iloczyny skalarne napięć i prądów sieci tworzącej element $({}_cf,{}_cg)$, czy to w przypadku przestrzeni H, czy I są zachowawcze - łatwo to wykazać stosując rozumowanie podobne, jak przy dowodzie zasady zachowania mocy czynnej (np. w przestrzeni L^2_T). Można więc interesować się zaciskami elementu $({}_cf,{}_cg)$ nie analizując jego wnętrza. W przypadku gdy wnętrze to, dla jednego dwuzaciskowego wydajnika oraz takiegoż odbiornika, składa się z elementu o "małej" rezystancji ΔR - mamy klasyczną sytuację prowadzącą do minimalizacji funkcjonału $\| \ \|^2_I$. Oczywiście, powstaje pytanie: czy w ramach pewnej podprzestrzeni liniowej przestrzeni H mamy wystarczająco dużo iloczynów skalarnych do dyspozycji, by pożądany funkcjonał wyrazić jako odwzorowanie o wartości $(i|i)_I$? Co najwyżej można podać pewne przesłanki przemawiające za takim wyborem. Chcielibyśmy, mianowicie, pozostawać w kręgu przestrzeni Hilberta, ze względu na istnienie przestrzeni uniwersalnych i możliwości przenoszenia do nich problemu optymalizacyjnego. Wydaje się, że zagadnienia energetyczne powinny kojarzyć się z odwzorowaniami biliniowymi - iloczyn skalarny (w rzeczywistej przestrzeni liniowej) takim właśnie jest. Przedstawione argumenty nie stanowią, oczywiście, ostatecznego dowodu na to, że rodzina odwzorowań $(\ | \ )_I$ została, wraz z rodziną przestrzeni I, obrana raz na zawsze prawidłowo. Na podstawie zamieszczonych przykładów wydaje się ona wystarczająco obszerna. Biorąc to pod uwagę, poszukujemy "${}_2i$" $({}_2i \in {}_2\underline{I})$ minimalizującego funkcjonał o wartości

$$(e|f({}_2i))_{,I} + (g({}_2i)|_2 i)_{,I}, \tag{249}$$

przy warunkach ubocznych

$$(\underset{g}{g}({}_2i)|_{\ 2}\underset{g}{i})_{,H} = \underset{g}{P}(r), \tag{250}$$

gdzie

$$\underset{g}{P}(r) = (\underset{g}{g}({}_{2pr}i)|_{2pr}\underset{g}{i})_{,H} = \underset{g}{g}(\beta_1(r))|\beta_{\ 1}(r))_{,H}, \quad g \in \{1,\dots,n\}. \tag{251}$$

Zamiast warunków ubocznych określonych poprzez podanie "$\underset{g}{P}(r)$", można podać warunki, w których występują określone moce znamionowe $\underset{g}{\tilde{P}}$, $g \in \{1,\dots,n\}$ - uprościłoby to rozwiązywanie problemów minimalizacji. Jednakże powstaje pytanie: przy jakim napięciu g-ty odbiornik ma pobierać moc $\underset{g}{\tilde{P}}$? Zależy ono przecież od obciążenia spowodowanego

załączeniem kompensatora. Stąd mogą być kłopoty spowodowane tym, że kompensatorowi powierzamy niewłaściwe dla niego zadanie regulacji napięcia odbiornika. Z tego powodu przyjmujemy teraz stanowisko opisane wzorami (250), (251). Postaramy się go zmodyfikować w następnym punkcie pracy. Można rozumieć, że zbiór Δ obrany jest tak, by moce P(r) mieściły się w określonych przedziałach. Na konstrukcje zbioru Δ mogłyby mieć wpływ jeszcze inne nierówności - np. narzucone na normy napięć odbiorników.

Na równania stanowiące warunek konieczny problemu minimalizacyjnego opisanego wzorami (249), (250) można spojrzeć podobnie, jak na równania (247), określające punkty pracy sieci. Przypuśćmy, że dla dowolnych parametrów $r \in \Delta$ nasz problem ma rozwiązanie należące do zbioru ${}_2\underline{I}$ (może też mieć ich wiele). Obserwując zależność tego (izolowanego) rozwiązania od "r", mamy odwzorowania $\underset{g}{\alpha}_I, \alpha_I$

$$ {}_{2a}\underset{g}{i} = \underset{g}{\alpha}_I(r), \quad {}_{2a}i = \alpha_I(r) . \tag{252} $$

" ${}_{2a}\underset{g}{i}$ " nazywamy prądami aktywnymi - są to odpowiedniki prądu Fryzego z przykładu 1.

Znając prąd aktywny, formułujemy drugie zadanie optymalizacji, polegające na doborze takich parametrów r kompensatorów, by zminimalizować w sensie kwadratów norm przestrzeni ${}_2\underset{g}{I}$ różnicę pomiędzy prądami ${}_{2pr}\underset{g}{i}$ oraz ${}_{2a}\underset{g}{i}$. Należy więc znaleźć jednoczesne minimum funkcjonałów (gdy $r \in \Delta \subset l^2_s$ - funkcji) o wartościach

$$ \left\| {}_{2pr}\underset{g}{i} - {}_{2a}\underset{g}{i} \right\|^2_{{}_2\underset{g}{I}} = \left\| \underset{g}{\beta}_I(r) - \underset{g}{\alpha}_I(r) \right\|^2_{{}_2\underset{g}{I}} \tag{253} $$

(kolejno ze względu na ciągi parametrów $\underset{g}{r}$) przy warunkach ubocznych stwierdzających, że kompensatory nie pobierają mocy czynnych, tzn.

$$ \begin{gathered} (\underset{g}{g}({}_{2pr}i) \vdash_k \underset{g}{y}(\underset{g}{g}({}_{2pr}i), \underset{g}{r}))_{{}_2\underset{g}{H}} = (\underset{g}{g}(\beta_I(r)) \vdash_k \underset{g}{y}(\underset{g}{g}(\beta_I(r)), \underset{g}{r}))_{{}_2\underset{g}{H}} = 0 , \\ r = (\underset{1}{r}, \ldots, \underset{n}{r}), \quad g \in \{1, \ldots, n\} . \end{gathered} \tag{254} $$

Zauważmy, że w odróżnieniu od zagadnienia opisanego wzorami (249), (250), w tym przypadku chodzi nam o wyznaczenie takich punktów ${}_0r$, które stanowią wspólne rozwiązanie n zagadnień minimalizacyjnych na rozmaitości wyznaczonej wzorem (254) (o ile rzeczywiście w tym przypadku będziemy mieli do czynienia z rozmaitością różniczkową położoną w przestrzeni l^2 bądź też l^2_s). Każde z tych zagadnień dotyczy minimalizacji odpowiedniego

funkcjonału w kierunku wyznaczonym kolejno przez parametry $\underset{1}{r},\ldots,\underset{g}{r},\ldots,\underset{n}{r}$ (tzn. g-te zagadnienie dotyczy parametrów $\underset{g}{r}$ przy dowolnie ustalonych pozostałych, gdy $r\in\Delta$). Jeśli zagadnienie to ma rozwiązanie (rozwiązania), to korzystając ze wzoru (252) mamy rozwiązanie (rozwiązania) obu problemów minimalizacji, doprowadzające do wyznaczenia pożądanych prądów aktywnych oraz parametrów kompensatorów (ewentualnie wraz z ich strukturą połączeń). Jeśli do rozwiązania obu tych zagadnień chcemy użyć metod różniczkowych opartych na pojęciu pochodnej Frécheta (twierdzenia 1,2), to musimy założyć, że odwzorowania f,g, ${}_{od}y$, ${}_{k}y$ są odpowiednią liczbę razy różniczkowalne w sposób ciągły w całych dziedzinach, czy choćby na pewnych podzbiorach otwartych związanych z występowaniem obliczanych minimów. Zagadnienie to komplikuje się, gdy chcemy wyznaczyć macierze incydencji kompensatorów, ponieważ elementy tych macierzy przyjmują wartości dyskretne. Podobnie napotkamy komplikacje, gdy zrezygnujemy z gładkości ww. odwzorowań lub też zastąpimy warunki równościowe dotyczące mocy pobieranej przez odbiorniki i kompensatory warunkami nierównościowymi. Takimi zagadnieniami nie będziemy się zajmować. Jak już wspomnieliśmy w przedmowie, trudno byłoby, przy takiej ogólności prowadzonych rozważań, zajmować się wyznaczaniem warunków wystarczających, jakie miałby spełniać obwód z rys.7, by poszukiwane minima istniały. W odniesieniu do poszukiwanych kompensatorów jest to pewien obszerny dział optymalizacyjnej syntezy obwodów. W naszym ujęciu jest on związany również z użyciem w konstrukcji kompensatorów elementów parametrycznych i nieliniowych, które są reprezentowane ciągami parametrów r. Tu jedynie stawiamy szkicowo odnośne zagadnienia.

Widzieliśmy, obserwując zamieszczone przykłady, że rozwiązanie tych zagadnień można uprościć (i uczynić standardowym ze względu na różne przestrzenie sygnałów napięciowych i prądowych) wprowadzając pojęcie przestrzeni uniwersalnych dla przestrzeni Hilberta. Taki program zrealizujemy też teraz. Postarajmy się więc zastosować twierdzenie 5 do omawianego układu elektrycznego. Dotyczyć ono będzie układów współrzędnych zbudowanych na wszystkich wprowadzonych przestrzeniach Hilberta związanych z zaciskami układu (${}_{c}f,{}_{c}g$). A więc mamy następujące suriektywne liniowe izometrie:

$$
\begin{gathered}
{}_{1}\bar{w}({}_{1}\underset{h}{H}) = \underset{h}{l}^{2}({}_{1}\underset{h}{S}),\ {}_{2}\bar{w}({}_{2}\underset{g}{H}) = \underset{g}{l}^{2}({}_{2}\underset{g}{S}),\ {}_{1}\bar{w}({}_{1}\underline{H}) = \underline{l}^{2}({}_{1}S),\ {}_{2}\bar{w}({}_{2}\underline{H}) = \underline{l}^{2}({}_{2}S), \\
{}_{1}\bar{v}({}_{1}\underset{h}{\underline{I}}) = \underline{l}^{2}({}_{1}\underset{h}{T}),\ {}_{2}\bar{v}({}_{2}\underset{g}{\underline{I}}) = \underline{l}^{2}({}_{2}\underset{g}{T}),\ {}_{1}\bar{v}({}_{1}\underline{I}) = \underline{l}^{2}({}_{1}T),\ {}_{2}\bar{v}({}_{2}\underline{I}) = \underline{l}^{2}({}_{2}T).
\end{gathered}
\tag{255}
$$

Strzałki nad literami oznaczają zbudowanie odwzorowań działających na podzbiory zawarte w dziedzinach rozpatrywanych układów współrzędnych, uzyskanych na podstawie tych układów współrzędnych (map). Mapy ${}_1w, {}_2w, {}_1v, {}_2v$ są produktowe [13, s.108] w stosunku do odpowiednich ciągów map $({}_1\underset{h}{w}), ({}_2\underset{g}{w}), ({}_1\underset{h}{v}), ({}_2\underset{g}{v})$, tzn. np. dziedziną mapy ${}_1w$ jest iloczyn kartezjański zbiorów ${}_1\underset{1}{H} x \ldots x {}_1\underset{m}{H}$, a przeciwdziedziną iloczyn kartezjański zbiorów $\underset{1}{l^2}({}_1S) x \ldots x \underset{m}{l^2}({}_1S)$ oraz ${}_1w({}_1i,\ldots,{}_1i) = ({}_1w({}_1i),\ldots,{}_1w({}_1i))$. Odnośnie do iloczynu kartezjańskiego zbiorów, wprowadzamy omawianą już sumę prostą przestrzeni Hilberta [1, s.417, 418] i stwierdzamy, że jeśli mapy ${}_1\underset{h}{w}, h \in \{1,\ldots,m\}$ są liniowymi suriektywnymi izometriami, to mapa produktowa jest nią też. Na powiązaniu produktowym ww. map zależy nam dlatego, by przykładowo, poniższy diagram był przemienny.

$$\begin{array}{ccc} {}_1\underline{H} & \xrightarrow{{}_1w} & \underline{l}^2({}_1S) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_h} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_h} \\ {}_1\underset{h}{H} & \xrightarrow{{}_1\underset{h}{w}} & \underset{h}{l^2}({}_1S) \end{array} \qquad (256)$$

gdzie "p_h" oznacza rzut produktu kartezjańskiego zbiorów na jego h-ty czynnik. Można również założyć, że mapy ${}_1\underset{h}{w}, {}_2\underset{g}{w}, {}_1\underset{h}{v}, {}_2\underset{g}{v}$ są produktowe w stosunku do map będących liniowymi izometriami odpowiednio przestrzeni H na $l^2(S)$ oraz I na $l^2(T)$, lecz ponieważ w równaniach naszej sieci nie zajmujemy się osobno zaciskami każdej z gałęzi g i h, nie jest to konieczne. W szczególnym przypadku moce mnogościowe zbiorów S oraz T mogą być równe oraz np. równe mocy zbioru liczb naturalnych.

Na podstawie map ${}_2\underset{g}{v}$ oraz ${}_2\underset{g}{w}$, wykorzystując wzór (238), zdefiniujemy odwzorowania ${}_2\underset{g}{\varphi}$ przydatne nieco później

$${}_2\underset{g}{\varphi} = {}_2\underset{g}{w} \circ {}_2\underset{g}{v}^{-1} . \qquad (257)$$

Opierając się na wzorze (239) stwierdzamy, że są to odwzorowania ciągłe (oraz oczywiście, liniowe) realizujące naturalne włożenia przestrzeni ${}_2\underset{g}{I}$ w przestrzenie ${}_2\underset{g}{H}$ w układach współrzędnych ${}_2\underset{g}{v}, {}_2\underset{g}{w}$. Mogą one być wyrażone wzorami podobnymi do (211), (212).

Dla zdefiniowanych map wprowadzimy odpowiednie współrzędne prądowe i napięciowe omawianej sieci

$$ {}_{1}\underset{h}{J} = {}_{1}\underset{h}{w}({}_{1}\underset{h}{i}),\ \underset{h}{E} = {}_{1}\underset{h}{w}(\underset{h}{e}),\ {}_{2}\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{w}({}_{2}\underset{g}{i}),\ {}_{2}\underset{g}{U} = {}_{2}\underset{g}{w}({}_{2}\underset{g}{u}),\ {}_{od}\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{w}({}_{od}\underset{g}{i}),\ {}_{k}\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{w}({}_{k}\underset{g}{i}), $$

$$ {}_{1}J = {}_{1}w({}_{1}i),\ E = {}_{1}w(e),\ {}_{2}J = {}_{2}w({}_{2}i),\ {}_{2}U = {}_{2}w({}_{2}u),\ {}_{od}J = {}_{2}w({}_{od}i),\ {}_{k}J = {}_{2}w({}_{k}i), \tag{258} $$

$$ {}_{1}'\underset{h}{J} = {}_{1}\underset{h}{v}({}_{1}\underset{h}{i}),\ '\underset{h}{E} = {}_{1}\underset{h}{v}(\underset{h}{e}),\ {}_{2}'\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{v}({}_{2}\underset{g}{i}),\ {}_{2}'\underset{g}{U} = {}_{2}\underset{g}{v}({}_{2}\underset{g}{u}),\ {}_{od}'\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{v}({}_{od}\underset{g}{i}),\ {}_{k}'\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{v}({}_{k}\underset{g}{i}), $$

$$ {}_{1}'J = {}_{1}v({}_{1}i),\ 'E = {}_{1}v(e),\ {}_{2}'J = {}_{2}v({}_{2}i),\ {}_{2}'U = {}_{2}v({}_{2}u),\ {}_{od}'J = {}_{2}v({}_{od}i),\ {}_{k}'J = {}_{2}v({}_{k}i). $$

W dalszym ciągu zdefiniujemy odwzorowania, opisujące element przekazujący energię odbiornikom i kompensatorom, z użyciem powyższych układów współrzędnych

$$ 'F = {}_{1}v \circ f \circ {}_{2}v^{-1},\quad 'G = {}_{2}v \circ g \circ {}_{2}v^{-1}, $$

$$ '\underset{g}{G} = {}_{2}\underset{g}{v} \circ \underset{g}{g} \circ {}_{2}v^{-1},\quad {}_{od}'\underset{g}{Y} = {}_{2}\underset{g}{v} \circ {}_{od}\underset{g}{y} \circ {}_{2}v^{-1}, \tag{259} $$

$$ {}_{k}'\underset{g}{Y}(\cdot,r) = {}_{2}\underset{g}{v} \circ {}_{k}\underset{g}{y}(\cdot,r) \circ {}_{2}v^{-1},\quad {}_{z}'\underset{g}{Y}(\cdot,r) = {}_{od}'\underset{g}{Y} + {}_{k}'\underset{g}{Y}(\cdot,r),\quad {}_{z}'\underset{g}{Z}(\cdot,r) = {}_{z}'\underset{g}{Y}^{-1}(\cdot,r). $$

Na podstawie wzorów (244), (246), (240), (241), (245), (258), (259) otrzymujemy równania sieci

$$ {}_{1}'J = 'F({}_{2}'J),\quad {}_{2}'U = 'G({}_{2}'J),\quad {}_{2}'\underset{g}{U} = '\underset{g}{G}({}_{2}'J), $$

$$ {}_{od}'\underset{g}{J} = -\,{}_{od}'\underset{g}{Y}({}_{2}'\underset{g}{U}),\quad {}_{k}'\underset{g}{J} = -\,{}_{k}'\underset{g}{Y}({}_{2}'\underset{g}{U},r),\quad {}_{2}'\underset{g}{J} = -\,{}_{z}'\underset{g}{Y}({}_{2}'\underset{g}{U},r), \tag{260} $$

$$ {}_{2}'\underset{g}{U} = -\,{}_{z}'\underset{g}{Z}({}_{2}'\underset{g}{J},r). $$

Stąd zamiast równań (247) mamy ich odpowiedniki

$$ '\underset{g}{G}({}_{2}'J) = -\,{}_{z}'\underset{g}{Z}({}_{2}'\underset{g}{J},r)\ . \tag{261} $$

Rozwiązania równań (261) powiązane są z rozwiązaniami równań (247) wzorami

$$ {}_{2pr}'\underset{g}{J} = {}_{2}\underset{g}{v}(\beta_{I}(r)) = \underset{g}{\beta}(r),\quad {}_{2pr}'J = {}_{2}v(\beta_{I}(r)) = \beta(r). \tag{262} $$

Opierając się na wzorach (258), (259) wyrazimy teraz oba problemy minimalizacji z zastosowaniem przestrzeni uniwersalnych użytych we wzorze (255). Pamiętając, że nasze układy współrzędnych są liniowymi izometriami, stwierdzamy, że należy teraz zminimalizować (względem "${}_{2}'J$") funkcjonał o wartości

$$({}'E|{}'F({}_2^{'}J))_{l^2({}_1T)} + ({}'G({}_2^{'}J)|{}_2^{'}J)_{l^2({}_2T)}\ , \tag{263}$$

przy warunkach ubocznych

$$({}_2\varphi({}'G({}_2^{'}J))|_2\varphi({}_g^{'}J))_{l^2({}_1S)} = P(r),\quad g \in \{1,...,n\}\ . \tag{264}$$

Tzn. istnienie rozwiązania problemu sformułowanego we wzorach (249), (250) jest równoważne istnieniu minimum związanego określonego wzorami (263), (264). Rozwiązanie (ewentualnie jedno z rozwiązań) tego problemu wyraża się, zgodnie ze wzorem (252), funkcjami

$${}_{2a}^{'}J = {}_2v(\alpha_1(r)) = \alpha(r),\quad {}_{2a}^{'}J = {}_2v(\alpha_1(r)) = \alpha(r). \tag{265}$$

("${}_{2pr}^{'}J$" oraz "${}_{2a}^{'}J$" są, rzecz jasna, elementami zbioru $l^2({}_2T)$.)

Oczywiście, staramy się najpierw wyznaczyć odwzorowanie α z warunków (263), (264). Jeśli uzasadnione są skończenie wymiarowe przybliżenia przy obliczaniu "α" - zagadnienie ulega znacznemu uproszczeniu.

Problem kompensacji (jego postawienie) polega na wyrażeniu w przestrzeniach uniwersalnych odpowiedników formuł (253), (254), czyli:

$$\left\| {}_{2pr}^{'}J - {}_{2a}^{'}J \right\|^2_{l^2({}_2T)} = \left\| \beta(r) - \alpha(r) \right\|^2_{l^2({}_2T)} \tag{266}$$

(tzn. należy znaleźć jednoczesne minimum funkcjonałów (funkcji) określonych wzorem (266) kolejno ze względu na parametry r, przy poniższych warunkach ubocznych)

$$({}_2\varphi({}'G(\beta(r)))|_2\varphi(-{}_k^{'}Y({}'G(\beta(r)), r)))_{l^2({}_1S)} = 0\ ,\ r = (r,...,r),\quad g \in \{1,...,n\}\ . \tag{267}$$

W przypadku gdy poszczególne odbiorniki zasilane są wprost SEM (lub czynimy takie przybliżenie), problem ten rozpada się na n niezależnych minimalizacji, dla każdego kompensatora osobno ze względu na jego parametry. Problemy opisane wzorami (263), (264) redukują się wówczas (w odpowiednim przybliżeniu) do n problemów poprzednio rozwiązywanych (wtedy liczba odbiorników n równa jest liczbie SEM, czyli m).

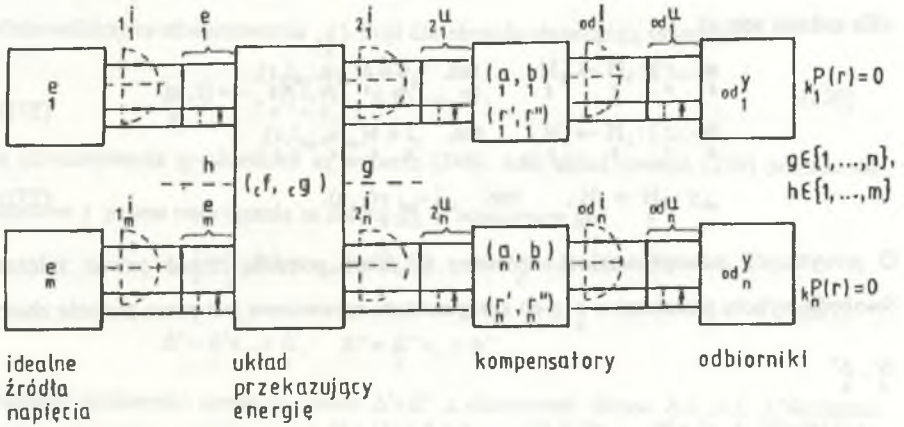
Czytelnik pewno spostrzegł, że przeprowadzone w tym punkcie rozumowania odnoszą się właściwie nie do jednego obwodu zilustrowanego rys.7, a do całej klasy takich obwodów różniących się pomiędzy sobą operatorami (tzn. odwzorowaniami) opisującymi poszczególne ich elementy oraz przestrzeniami, w których te operatory działają. Jest więc możliwość pewnego wspólnego spojrzenia na taką klasę. Aby ją zrealizować, potrzebne są jednak pewne

wiadomości z teorii kategorii, na które nie możemy się tu powoływać. Z kolei łatwo dostrzec, że nasze rozumowania dla konkretnie ustalonej sieci przebiegają w podobny sposób przy obieraniu rozmaitych baz w przestrzeniach H oraz I (formuły minimalizacyjne oraz określające pracę sieci zachowują swój kształt niezależnie od wyboru bazy). Wiąże się to z pewnymi aspektami geometrycznymi sygnalizowanymi w punkcie 7. Ze szkicem takiego kategoryjno-geometrycznego ujęcia rozpatrywanych w tym punkcie zagadnień Czytelnik może zapoznać się w artykule [6].

Rzeczą charakterystyczną dla rozważań tego punktu i poprzedzających go przykładów była wspólna ocena strat w układzie przekazującym energię odbiornikom oraz kształtu ich prądów. W następnym punkcie, stosując odpowiednią procedurę minimalizacyjną, spróbujemy zagadnienia te potraktować oddzielnie. Będziemy się tu wzorować na artykule [3].

10. UKŁAD ROZPATRYWANY W PUNKCIE 9 Z KOMPENSATORAMI ŁĄCZONYMI ŁAŃCUCHOWO WRAZ Z ODBIORNIKAMI. ODDZIELNA MINIMALIZACJA STRAT I ODSTĘPSTW OD NAPIĘĆ WZORCOWYCH NA ODBIORNIKACH. POSTAWIENIE PROBLEMU

Obwód składa się z m wydajników (źródeł elektromotorycznych), n odbiorników, n układów kompensacyjnych oraz układu przekazującego energię elektryczną z wydajników do odbiorników. Sytuację tę, pod względem topologicznym, ilustruje rys.8.



Rys.8. Obwód elektryczny złożony z m SEM wielozaciskowych, elementu przekazującego energię do odbiorników oraz n odbiorników wielozaciskowych połączonych łańcuchowo wraz z kompensatorami

Fig.8. An electric network consisting of m multiterminal emfs, an element transferring energy to loads and n cascade connection of multiterminal loads and compensators

h-ta gałąź wydajnika posiada $_1p_h$ przewodów, g-ta gałąź odbiornika oraz g-ta gałąź kompensatora posiada $_2p_g$ przewodów (nie licząc jednego przewodu powrotnego dla każdej).

Z każdym z ww. przewodów związana jest ta sama przestrzeń Hilberta H, w której umiejscawiać będziemy sygnały czasowe jego napięcia i prądu. Wartości iloczynu skalarnego

sygnału napięciowego i prądowego przestrzeni H interpretujemy jako moce czynne (lub energie) tej pary sygnałów. Z gałęziami związane są sumy proste przestrzeni Hilberta zdefiniowane wzorami (231),(233) poprzedniego punktu. Oczywiście, zakładamy (jak to było powiedziane), że:

$$\underset{h}{e},\ {}_{1}\underset{h}{i} \in {}_{1}\underset{h}{H}, \qquad {}_{2}\underset{g}{u},\ {}_{2}\underset{g}{i},\ {}_{od}\underset{g}{u},\ {}_{od}\underset{g}{i} \in {}_{2}\underset{g}{H} \tag{268}$$

oraz

$$e = (\underset{h}{e}),\ {}_{1}i = ({}_{1}\underset{h}{i}),\ {}_{2}u = ({}_{2}\underset{g}{u}),\ {}_{2}i = ({}_{2}\underset{g}{i}),\ {}_{od}u = ({}_{od}\underset{g}{u}),\ {}_{od}i = ({}_{od}\underset{g}{i}) . \tag{269}$$

Elementy obwodu opisane są odwzorowaniami

$$\begin{aligned} &f : {}_{2}\underset{}{H} \to {}_{1}\underset{}{H}, \qquad \text{tzn.} \quad {}_{1}i = {}_{c}f({}_{2}i, e) = f({}_{2}i), \\ &g : {}_{2}\underset{}{H} \to {}_{2}\underset{}{H}, \qquad \text{tzn.} \quad {}_{2}u = {}_{c}g({}_{2}i, e) = g({}_{2}i), \end{aligned} \tag{270}$$

(dla zadanej sem e),

$$\begin{aligned} &\underset{g}{a}(\cdot,\cdot,\underset{g}{r}) : {}_{2}\underset{g}{H} \to {}_{2}\underset{g}{H}, \qquad \text{tzn.} \quad {}_{2}\underset{g}{u} = \underset{g}{a}({}_{od}\underset{g}{u}, {}_{od}\underset{g}{i}, \underset{g}{r}), \\ &\underset{g}{b}(\cdot,\cdot,\underset{g}{r}) : {}_{2}\underset{g}{H} \to {}_{2}\underset{g}{H}, \qquad \text{tzn.} \quad {}_{2}\underset{g}{i} = \underset{g}{b}({}_{od}\underset{g}{u}, {}_{od}\underset{g}{i}, \underset{g}{r}), \end{aligned} \tag{271}$$

$${}_{od}y : {}_{2}\underset{g}{H} \to {}_{2}\underset{g}{H}, \qquad \text{tzn.} \quad {}_{od}\underset{g}{i} = {}_{od}\underset{g}{y}({}_{od}\underset{g}{u}). \tag{272}$$

O powyższych odwzorowaniach będziemy w miarę potrzeb, czynić pewne założenia. Swoboda wyboru parametrów $\underset{g}{r}$ g-go kompensatora ograniczona jest przez podanie zbiorów

$$\begin{aligned} &\underset{g}{\Delta'},\ \underset{g}{\Delta''} \\ &\underset{g}{r} = (\underset{g}{r'}, \underset{g}{r''}), \qquad \underset{g}{r'} \in \underset{g}{\Delta'}, \qquad \underset{g}{r''} \in \underset{g}{\Delta''}, \qquad \underset{g}{r} \in \underset{g}{\Delta} = \underset{g}{\Delta'} \times \underset{g}{\Delta'}, \\ &\underset{g}{\Delta'} \subset \underset{g}{l^2}(l^2), \qquad \underset{g}{\Delta''} \subset \underset{g}{l^2}(l^2). \end{aligned} \tag{273}$$

Parametry $(\underset{g}{r'})$ będą odpowiedzialne za możliwość minimalizowania strat mocy czynnej w układzie $({}_{c}f, {}_{c}g)$, parametry $\underset{g}{r''}$ - za możliwości minimalizacji odstępstw napięć ${}_{od}\underset{g}{u}$ od z góry założonych przebiegów wzorcowych ${}_{wz}\underset{g}{u} \in {}_{2}\underset{g}{H}$. Występują one w liczbie skończonej bądź też przeliczalnej (wariant w nawiasie we wzorze (273)). (To znaczy "$\underset{g}{r'}$ ", "$\underset{g}{r''}$ " stanowią ciągi skończone bądź przeliczalne.) Mogą na nie składać się dowolne współczynniki opisujące liniowe lub też nieliniowe stałe skupione oraz elementy macierzy incydencji kompensatorów.

opisujące liniowe lub też nieliniowe stałe skupione oraz elementy macierzy incydencji kompensatorów.

W celu wyznaczenia punktu pracy sieci przeprowadzimy poniższe rozumowania. Najpierw wykorzystując odwzorowania (271), (272) zdefiniujemy nowe "$\underset{g}{c}$","$\underset{g}{d}$"

$$
\begin{aligned}
{}_{2}\underset{g}{u} &= \underset{g}{a}({}_{od}\underset{g}{u}, {}_{od}\underset{g}{y}({}_{od}\underset{g}{u}), \underset{g}{r}) = \underset{g}{c}({}_{od}\underset{g}{u}, \underset{g}{r}), \\
{}_{2}\underset{g}{i} &= \underset{g}{b}({}_{od}\underset{g}{u}, {}_{od}\underset{g}{y}({}_{od}\underset{g}{u}), \underset{g}{r}) = \underset{g}{d}({}_{od}\underset{g}{u}, \underset{g}{r}).
\end{aligned}
\tag{274}
$$

Przypuśćmy, że dla każdego z parametrów $\underset{g}{r}$ w zakresie ustalonym wzorem (273) istnieje odwzorowanie odwrotne $\underset{g}{d}^{-1}$. Wówczas mamy:

$$
{}_{2}\underset{g}{u} = \underset{g}{c}(\underset{g}{d}^{-1}({}_{2}\underset{g}{i}, \underset{g}{r}), \underset{g}{r}) = -{}_{z}\underset{g}{z}({}_{2}\underset{g}{i}, \underset{g}{r}),
\tag{275}
$$

(zdefiniowaliśmy tu odwzorowania ${}_{z}\underset{g}{z}$). Stąd dla obwodu obowiązują równania

$$
\underset{g}{g}({}_{2}i) = -{}_{z}\underset{g}{z}({}_{2}\underset{g}{i}, \underset{g}{r}), \quad g \in \{1,\ldots,n\},
\tag{276}
$$

gdzie odwzorowania $\underset{g}{g}$ określone są wzorem (246). Jeśli układ równań (276) posiada dla parametrów $\underset{g}{r}$ pewne rozwiązanie ze zbioru ${}_{2}\underline{H}$, to oznaczymy go

$$
\begin{aligned}
&{}_{2pr}\underset{g}{i} = \beta_{gH}(r), \quad {}_{2pr}i = \beta_{H}(r), \quad r = (\underset{g}{r}) \in \Delta = \Delta' \times \Delta'', \\
&\Delta' = \underset{1}{\Delta'} \times \ldots \times \underset{n}{\Delta'}, \quad \Delta'' = \underset{1}{\Delta''} \times \ldots \times \underset{n}{\Delta''}.
\end{aligned}
\tag{277}
$$

(Będziemy utożsamiać elementy zbioru $\Delta' \times \Delta''$ z elementami zbioru $\underset{1}{\Delta} \times \ldots \times \underset{n}{\Delta}$.) Następnie określamy "${}_{odpr}\underset{g}{u}$", "${}_{odpr}\underset{g}{i}$", "${}_{2pr}\underset{g}{u}$", "${}_{1pr}\underset{h}{i}$" w funkcji "r"

$$
{}_{odpr}\underset{g}{u} = \underset{g}{d}^{-1}({}_{2pr}\underset{g}{i}, \underset{g}{r}) = \underset{g}{d}^{-1}(\beta_{gH}(r), \underset{g}{r}) = \varepsilon_{gH}(r), \quad {}_{odpr}u = \varepsilon_{H}(r),
\tag{278}
$$

$$
{}_{odpr}\underset{g}{i} = {}_{od}\underset{g}{y}(\varepsilon_{gH}(r)) = \delta_{gH}(r), \quad {}_{odpr}i = \delta_{H}(r),
\tag{279}
$$

$$
{}_{2pr}\underset{g}{u} = \underset{g}{a}(\varepsilon_{gH}(r), \delta_{gH}(r), \underset{g}{r}) = -{}_{z}\underset{g}{z}(\beta_{gH}(r), \underset{g}{r}) = \gamma_{gH}(r), \quad {}_{2pr}u = \gamma_{H}(r),
\tag{280}
$$

$$
{}_{1pr}\underset{h}{i} = \underset{h}{f}(\beta_{hH}(r)) = \alpha_{hH}(r), \quad {}_{1pr}i = f(\beta_{H}(r)) = \alpha_{H}(r).
\tag{281}
$$

Przystąpimy teraz do określenia zadań optymalizacyjnych. W poprzednim punkcie minimalizowane były kwadraty norm różnic pomiędzy prądami aktywnymi i rzeczywistymi prądami (pracy) odbiorników z pomocą kompensatorów dołączonych równolegle do nich.

Normy te były tak dobrane, by - wyznaczając uprzednio prąd aktywny - ustalić kompromis pomiędzy minimalizacją strat elementu $({}_c f_{,c} g)$ a pożądanymi kształtami prądów odbiorników pobierających określone moce czynne. Teraz będziemy jednocześnie minimalizować straty w elemencie $({}_c f_{,c} g)$ w funkcji parametrów r' oraz kwadraty norm różnic pomiędzy napięciami pracy odbiorników oraz pewnymi ich wartościami wzorcowymi (nominalnymi) w funkcji parametrów r". Takie postępowanie rokuje możliwość uzyskania i lepszych kształtów napięć odbiorników i mniejszych strat jednocześnie (w porównaniu ze scharakteryzowaną poprzednio wersją postępowania). Okupione jest ono koniecznością zastosowania bogatszych układów kompensacyjnych włączonych łańcuchowo pomiędzy układ $({}_c f_{,c} g)$ przekazujący energię a odbiorniki.

A więc minimalizujemy funkcjonał strat w elemencie $({}_c f_{,c} g)$ (gdy ciąg parametrów r jest skończony - funkcję) o wartości

$$(e|\alpha_H(r',r''))_{,H} + (\gamma_H(r',r'')|\beta_H(r',r''))_{,H} \tag{282}$$

względem parametrów $r' \in \Delta'$ oraz jednocześnie funkcjonały (funkcje)

$$\left\| \varepsilon_H((r'),(r'')) - {}_{w2}u \right\|^2_{,H} \tag{283}$$

względem parametrów $r'' \in \Delta''$, przy warunkach ubocznych, stwierdzających, że kompensatory nie pobierają mocy czynnych

$$(\gamma_H(r)|\beta_H(r))_{,H} + (\varepsilon_H(r)|\delta_H(r))_{,H} = 0, \qquad r \in \Delta, \quad g \in \{1,\ldots,n\}. \tag{284}$$

Oczywiście, należy raz jeszcze podkreślić, że wobec takiej ogólności problemu (nieliniowe elementy obwodu) - został on jedynie postawiony. Do jego rozwiązania metodami różniczkowymi potrzebne są założenia gładkościowej natury dotyczące minimalizowanych funkcji, a zatem i elementów obwodu. Bardzo skomplikowanym zagadnieniem byłoby dowodzenie, przy jakich warunkach narzuconych na rozpatrywany obwód minima takie istnieją i ile ich jest.

Jeśli dysponujemy kompensatorami o "ubogich" możliwościach kompensacji, powstaje pytanie: o ile prądy wtórne elementu $({}_c f_{,c} g)$ różnią się od takich, które mogłyby być uzyskane przy "bogatszych" kompensatorach? Jako takie "bogatsze" możemy np. rozumieć kompensatory, których parametry r'_g są ciągami współczynników fourierowskich (względem pewnych baz w przestrzeniach ${}_2H_g$) SPM użytych do kompensacji. Po obliczeniu takich

różnicę pomiędzy prądami wtórnymi elementu $({}_c f_{,c} g)$ w obu przypadkach w sensie kwadratów norm przestrzeni ${}_2 H$.

Wprowadźmy, podobnie jak w punkcie 9, układy współrzędnych ${}_1 w$, ${}_1 w$, ${}_2 w$, ${}_2 w$ dla przestrzeni ${}_1 H$, ${}_1 H$, ${}_2 H$, ${}_2 H$, które są liniowymi izometriami tychże na $"l^2({}_1 S)"$, $"l^2({}_1 S)"$, $"l^2({}_2 S)"$, $"l^2({}_2 S)"$ odpowiednio. Wyraźmy prądy, napięcia i transmitancje obwodu w tych układach współrzędnych.

$$ {}_1 J = {}_1 w({}_1 i), \quad E = {}_1 w(e), \quad {}_2 J = {}_2 w({}_2 i), \quad {}_2 U = {}_2 w({}_2 u), $$

$$ {}_{od} J = {}_2 w({}_{od} i), \quad {}_{od} U = {}_2 w({}_{od} u), \tag{285} $$

$$ {}_{2pr} J = {}_2 w({}_{2pr} i) = \beta(r), \quad {}_{2pr} U = {}_2 w({}_{2pr} u) = \gamma(r), $$

$$ {}_{odpr} J = {}_2 w({}_{odpr} i) = \delta(r), \quad {}_{odpr} U = {}_2 w({}_{odpr} u) = \varepsilon(r), \tag{286} $$

$$ {}_{1pr} J = {}_1 w({}_{1pr} i) = \alpha(r), \quad {}_{wz} U = {}_2 w({}_{wz} u), $$

$$ F = {}_1 w \circ f \circ {}_2 w^{-1}, \quad G = {}_2 w \circ g \circ {}_2 w^{-1}. \tag{287} $$

Wówczas mamy odpowiedniki wzorów (282), (283), (284) wyrażone we wprowadzonych układach współrzędnych. Tzn. minimalizujemy funkcjonał o wartości

$$ (E|\alpha(r',r''))_{l^2({}_1 S)} + (\gamma(r',r'')|\beta(r',r'')_{l^2({}_2 S)} = $$

$$ = \sum_{\lambda \in {}_1 S} E_\lambda \alpha_\lambda(r',r'') + \sum_{\mu \in {}_2 S} \gamma_\mu(r',r'')\beta_\mu(r',r'') \tag{288} $$

ze względu na parametry $r' \in \Delta'$ oraz jednocześnie funkcjonały

$$ \left\| \varepsilon(({}_g r'),({}_g r'')) - {}_{wz} U \right\|^2_{l^2({}_2 S)} = \sum_{\mu_g \in {}_2 S} (\varepsilon_{g\,\mu_g}(({}_g r'),({}_g r'')) - {}_{wz} U_{g\,\mu_g})^2 \tag{289} $$

ze względu na parametry ${}_g r'' \in \Delta''$, przy warunkach ubocznych

$$ ({}_g \gamma(r)|{}_g \beta(r))_{l^2({}_2 S)} + ({}_g \varepsilon(r)|{}_g \delta(r))_{l^2({}_1 S)} = $$

$$ = \sum_{\mu_g \in {}_2 S} {}_g \gamma_{\mu_g}(r)\, {}_g \beta_{\mu_g}(r) + \sum_{\mu_g \in {}_2 S} {}_g \varepsilon_{\mu_g}(r)\, {}_g \delta_{\mu_g}(r) = 0, \quad r \in \Delta, \quad g \in \{1,\ldots,n\}. \tag{290} $$

W przypadku gdy ciąg r jest skończony, wprowadzając oznaczenia $r^{\cdot}_{k_g}, r^{\cdot}_{k_g}$ dla poszczególnych parametrów składających się na ciągi $r^{\cdot}_{g} = (r^{\cdot}_{k_g}), r^{\cdot}_{g} = (r^{\cdot}_{k_g})$, $g \in \{1,...,n\}$ oraz przyjmując jednocześnie, że zbiory ${}_1S_h, {}_2S_g$ są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych, nietrudno jest wypisać funkcje Lagrange'a (występujące w metodzie nieoznaczonego czynnika Lagrange'a ([17], s.152)) potrzebne do sformułowania warunków koniecznych dla poszczególnych minimów określonych wzorami (288), (289) z warunkami ubocznymi (290). Przyjmując z kolei założenia umożliwiające różniczkowanie tych funkcji (i wyraz po wyrazie szeregów określających je) względem parametrów $r^{\cdot}_{k_g}, r^{\cdot}_{k_g}$, można również wypisać jawną postać tych warunków. Nie ma sensu jednak tego robić, skoro i tak nie poddalibyśmy dalszej analizie otrzymanych w ten sposób równań.

11. PODSUMOWANIE ORAZ UWAGI O INNYCH ZASTOSOWANIACH METOD OPTYMALIZACYJNYCH W TEORII OBWODÓW

Nadeszła pora, by znaleźć pewien "wspólny mianownik" rozpatrywanych problemów optymalizacji. Aby go skonstruować, zwróćmy uwagę, że warunki uboczne, jak to było już sugerowane, mogą doprowadzić do definicji podrozmaitości (różniczkowej) danej przestrzeni Hilberta. (W istocie rzeczy rozmaitość nie musi być opatrzona maksymalnym atlasem. W takim przypadku używa się czasem terminu rozmaitość współrzędnościowa. Ponieważ termin ten nie jest zbyt rozpowszechniony, używamy w przypadku dowolnego atlasu pewnej klasy terminu rozmaitość różniczkowa.) Na takiej podrozmaitości trzeba poszukać minimum (ewentualnie minimów) pewnego funkcjonału. W przykładach 1,2 jest tak ewidentnie. Na podzbiorze przestrzeni L_T^2 lub $L_T^{2,a}$ podanym (we wprowadzonych układach współrzędnych tych przestrzeni) warunkiem (148) lub (158) łatwo wprowadzić strukturę rozmaitości wyliczając z tych warunków dowolną zmienną $\widetilde{J}_{\lambda_0}$,w przypadku gdy $\widetilde{U}_{\lambda_0} \neq 0$ i traktując "$\widetilde{J}_\lambda$" dla $\lambda \neq \lambda_0$ jako współrzędne mapy globalnej. Tę mapę można następnie poddać różnym transformacjom. W przykładzie 3 wzory (171), (169) również doprowadzają, w podobny sposób, do definicji podrozmaitości przestrzeni $W_T^{2,\lambda}$. Taką samą rolę w przykładzie 4 spełniają wzory (196), (194) względem przestrzeni $BS^{2,\lambda}$. W generalizacji zawartej w punkcie 7 znów podobnie postępujemy ze wzorem (213), gdzie rolę "$\widetilde{U}_{\lambda_0}$" odgrywa teraz wyrażenie $\sum_{\alpha \in W} D_{\alpha\beta_0}{}' U_\alpha \neq 0$, otrzymując mapę globalną podrozmaitości przestrzeni I.

Natomiast aby warunek (264) p.9 doprowadzał do pojęcia podrozmaitości różniczkowej (dla każdego parametru $r \in \Delta$ z osobna), trzeba by do jego lokalnego rozwikłania użyć cytowanego już twierdzenia Gravesa, a następnie nieskończenie wymiarowego odpowiednika (sformułowanego dla przestrzeni Hilberta) twierdzenia o trzech odwzorowaniach [24, s.218, 219]. Ponieważ nie analizujemy bliżej wzoru (264), więc postulujemy tu tylko ograniczenie się do rozpatrywania przypadku, gdy na zbiorze określonym tym wzorem da się wprowadzić strukturę rozmaitości. Ta sama uwaga odnosi się do wzorów (267) p.9 oraz (290) p.10.

W p.9,10 sytuacja jest o tyle bardziej złożona, że poszukujemy na danej podrozmaitości jednocześnie minimum lokalnego (w obrębie danej mapy) skończonej liczby funkcjonałów.

Dla każdego z funkcjonałów względem parametrów, które pozostają swobodne na tej podrozmaitości (dla tej mapy) i tworzą przy dowolnych pozostałych parametrach swobodnych rodzinę podprzestrzeni liniowych przestrzeni $l^2_s(l^2)$ (ewentualnie obciętych poprzez ograniczenie zakresu zmienności parametrów r). Rodziny te są parami ortogonalne oraz mamy do czynienia z sumą prostą podprzestrzeni Hilberta przestrzeni $l^2_s(l^2)$. Lecz jak widać, i w tym przypadku problem ten da się rozłożyć na skończoną liczbę minimalizacji pojedyńczych funkcjonałów na danej podrozmaitości przestrzeni Hilberta względem pewnych parametrów, a dopiero następnie poszukujemy wspólnego minimum wszystkich funkcjonałów.

Czyli podsumowując: chodzi nam o minimalizację pewnego funkcjonału na pewnej podrozmaitości różniczkowej danej przestrzeni Hilberta.

Powstaje pytanie: czy tak ogólne spojrzenie podsumowujące nasze zadania jest niezbędne? Otóż w różnych działach techniki, niekoniecznie związanych z elektrotechniką, często spotykamy podobne problemy, np. maksymalizacja sprawności pewnego urządzenia przy pewnych równościowych warunkach ubocznych, minimalizacja zużycia paliwa, różnych materiałów konstrukcyjnych itp. Wracając do elektrotechniki - można na rozpatrywane problemy spojrzeć z ekonomicznego punktu widzenia i minimalizować nie same straty mocy czynnej, a koszty, na które składają się zarówno straty, jak i budowa i eksploatacja kompensatorów. Oczywiście, do właściwego postawienia tego zagadnienia potrzebna jest wiedza ekonomiczna. Widać więc, że proponowana generalizacja ma dość solidne podstawy praktyczne. Co więcej, obserwując lekturę punktu 7, dochodzimy do wniosku, że jeśli w opisie funkcjonowania rozpatrywanych obiektów fizycznych oraz w formułach określających problemy minimalizacji można dopatrzeć się występowania pewnych obiektów geometrycznych, to warto je wprowadzić.

Dla Czytelnika zainteresowanego teorią elektrotechniki jedną z najciekawszych rzeczy związanych z techniką optymalizacji jest, jak wspomnieliśmy w przedmowie, synteza układów nieliniowych. W przypadku syntezy kompensatorów jest ona rozumiana bardzo skromnie, ponieważ interesujemy się minimalizacją odstępstwa prądów lub napięć na zaciskach kompensatorów od pewnych przebiegów wzorcowych. Czyli syntezie podlega nie operator nieliniowy kompensatora opisujący zależność jego prądu od napięcia (lub odwrotnie) w dziedzinie i przeciwdziedzinie, które są pewnymi przestrzeniami Hilberta, a wartość tego operatora w pewnym punkcie. Jest to, oczywiście, wielkie uproszczenie zagadnień syntezy,

gdy dziedzinę takiego operatora redukujemy do jednego punktu, ale zagadnienie to naprowadza na właściwy trop optymalizacyjnej syntezy układów nieliniowych. Wydaje się, że na tym też polega jego wartość.

LITERATURA

1. Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.
2. Brodzki M.: Kilka uwag o matematycznej naturze wielkości fizykalnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka, z.100, Gliwice 1985.
3. Brodzki M.: O pewnym problemie optymalizacji pracy sieci elektrycznych w ujęciu obwodowym oraz polowym. XVI SPETO, Gliwice - Ustroń 1993.
4. Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne nr 35, z.1, Warszawa 1989.
5. Brodzki M.: Pewne zastosowania algebry obiektów geometrycznych, definiowanych na rozmaitościach różniczkowych modelowanych na przestrzeniach $l^2(Z)$, w teorii obwodów elektrycznych. XVII SPETO, Gliwice - Ustroń 1994.
6. Brodzki M.: Sformułowanie problemów wyznaczania prądów aktywnych oraz kompensacji pewnych prądów w sieciach elektrycznych. XIV SPETO, Gliwice - Wisła 1991.
7. Brodzki M., Walczak J.: Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi w pewnych przestrzeniach funkcji prawie okresowych. I. Konstrukcja wskaźnika jakości przebiegów odkształconych. II. Rozwiązanie problemu minimalizacji wskaźnika jakości przebiegów odkształconych oraz ortogonalny rozkład prądu odbiornika. XII SPETO, Gliwice - Wisła 1989.
8. Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystującym pojęcie przestrzeni Sobolewa. XI SPETO, Gliwice - Wisła 1988.
9. Brodzki M., Walczak J.: O związku teorii mocy, uprawianej dla pojedyńczych odbiorników energii elektrycznej, z przestrzeniami Hilberta. XIII SPETO, Gliwice - Wisła 1990.
10. Brodzki M.: Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej nr 847, Gliwice 1979.
11. Brodzki M.: Wstęp do teorii pola elektromagnetycznego w ujęciu geometrycznym. Skrypty centralne nr 1553/5, Gliwice 1991.

12. Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka, z.91, Gliwice 1984.
13. Engelking R.: Topologia ogólna. PWN, Warszawa 1975.
14. Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
15. Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN, Warszawa 1970.
16. Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT, Warszawa 1970.
17. Leja F.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1969.
18. Marcinkowska H.: Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe. PWN, Warszawa 1993.
19. Maurin K.: Analiza, cz.I. PWN, Warszawa 1971.
20. Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Elektryka, z.15, Gliwice 1963.
21. Pasko M.: Dobór kompensatorów optymalizujących warunki pracy źródeł napięć jednofazowych i wielofazowych z przebiegami okresowymi odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Elektryka, z.135, Gliwice 1994.
22. Pasko M., Walczak J.: O pewnym problemie syntezy dwójników pasywnych LC. XII SPETO, Gliwice - Wisła 1989.
23. Sikorski R.: Funkcje rzeczywiste, t.I. PWN, Warszawa 1958.
24. Sikorski R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1977.
25. Walczak J.: Optymalizacja energetyczno - jakościowych właściwości obwodów elektrycznych w przestrzeniach Hilberta. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Elektryka, z.125, Gliwice 1992.
26. Walczak J.: Ortogonalny rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym z rzeczywistego źródła napięcia. XIII SPETO, Gliwice - Wisła 1990.

OD POJĘĆ MOCY DO METOD OPTYMALIZACYJNYCH W TEORII OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie

Jednym z wątków pracy jest wyjaśnienie zakresu stosowalności rozmaitych pojęć mocy w teorii obwodów elektrycznych. Najpierw wskazana jest fizykalna potrzeba zdefiniowania mocy chwilowej oraz czynnej. Następnie rozpatrywane jest zagadnienie strat w układzie doprowadzającym energię do odbiorników. Dopóki układ ten sprowadza się do połączenia odbiornika z siłą elektromotoryczną poprzez opornik, na którym występuje niewielka wartość skuteczna napięcia w porównaniu z taką wartością napięcia odbiornika, okazuje się, że oprócz mocy czynnej można wprowadzić odpowiednio zdefiniowaną moc bierną, kompensowalną układami klasy L,C oraz zdefiniowane moce (wraz z pewnymi innymi) powiązać wzorem zwanym prostopadłościanem mocy. Gdy jednak układ dostarczający energię odbiornikom staje się bardziej złożony - pojęcia jakichkolwiek mocy definiowanych na ich zaciskach zawodzą, ponieważ nie informują o ich prądach aktywnych, przy których występuje minimum strat w tym układzie przy zadanym zaopatrzeniu odbiorników w moce czynne. Prądy aktywne oraz pozostałe nie są też wówczas na ogół ortogonalne, co uniemożliwia skonstruowanie prostopadłościanu mocy. W ten sposób stajemy przed koniecznością zastąpienia klasycznej teorii mocy pewną teorią optymalizacji. Oprócz zagadnienia minimalizowania strat, w pracy omawiana jest też kwestia kształtu prądów i napięć odbiorników. Polega to bądź na łącznym potraktowaniu obu zagadnień poprzez minimalizację odpowiednio dobranych funkcjonałów, bądź na ich oddzielnym reprezentowaniu funkcjonałami minimalizowanymi ze względu na pewne parametry kompensatorów odpowiedzialne osobno za straty i osobno za napięcia odbiorników. Powyższe zagadnienia optymalizacyjne omawiane są najpierw z użyciem pewnych standardowych przestrzeni sygnałów napięciowych i prądowych występujących w obwodzie, takich jak L^2_T, B^2 lub ich sumy proste związane z elementami wielozaciskowymi; następnie formułowane są abstrakcyjnie z użyciem dowolnych przestrzeni Hilberta jako ww. przestrzeni sygnałowych. W zadanej przestrzeni Hilberta można obierać różne bazy i rachunki optymalizacyjne przeprowadzać na współczynnikach Fouriera prądów i napięć względem tych baz. Wiąże się to z pewnym formalizmem geometrycznym, polegającym na wprowadzeniu na

ogół nieskończenie wymiarowych podrozmaitości rozpatrywanych przestrzeni Hilberta poprzez podanie równościowych warunków ubocznych zagadnień optymalizacyjnych i następnie używanie na tych rozmaitościach pewnych obiektów geometrycznych. Wątek ten jest jedynie naszkicowany. Z wyjątkiem prostych przypadków zagadnienia optymalizacyjne są jedynie stawiane, bez rozwiązywania odpowiednich równań o hilbertowskich argumentach wynikających z warunków koniecznych poszukiwanych minimów.

FROM THE CONCEPTS OF POWER TO OPTIMIZATION METHODS IN ELECTRIC CIRCUIT THEORY

Summary

Interpretation upon the range of application of various concepts of power in the electric circuit theory is one of the monography purposes. To begin with the physical necessity of an instantaneous power and an active power defining is pointed out. Then the problem of power losses in an element transferring energy to loads is considered. It appears that as long as this system is a connection of a load to an electromotive force (a source) by means of a resistor across which rms voltage value is small in comparison with the load voltage value, it is possible to introduce a reactive power (besides the active power). The reactive power must be defined adequately and can be compensated by means of networks of L, C class. The defined powers (together with some other ones) can be related to each other by a formula called the power cuboid. However, if the system transferring energy to the loads becomes more complex the concepts of any powers defined for the load terminals are not adequate any more, because they do not inform of the load active currents for which the loss minimum occurs in this network for the given consumption of active powers by loads. Then the active currents and the other ones are not orthogonal in general which makes impossible to construct the power cuboid. Therefore it is necessary to replace the classical power theory with an optimization theory. Besides the problem of loss minimization the question of the shapes of load currents and voltages is discussed in the monography as well. It consists either in joint treatment of the both problems by minimization of well-chosen functionals or in their separate representation by functionals, minimized by means some compensator parameters responsible for the load losses and the load voltages separately. At first the above optimization problems are presented using some standard spaces of network voltage and current signals such as L^2_T and B^2 spaces or their direct sums related to multiterminal elements. Next they are formulated in the abstract using any Hilbert spaces as the mentioned above signal spaces. In the given Hilbert space it is possible to choise different bases and to make optimization calculations using the Fourier

coefficients of currents and voltages in relation to these bases. It is connected with some geometrical formalism consisting in introducing in general infinite dimensional submanifolds of the considered Hilbert spaces by stating equality conditions for side optimization problems and next using some geometrical objects on these manifolds. This problem is outlined only. Optimization problems are stated only as well, except for simple cases, without solving suitable equations with Hilbert arguments resulting from necessary conditions of the searched minima.

ОТ ПОНЯТИЙ МОЩНОСТЕЙ К ОПТИМИЗАЦИОННЫМ МЕТОДАМ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Реферат

Одной из нитей мысли данной работы является пояснение области применения различных понятий мощностей в теории электрических цепей. Для начала имеется физикальная нужда определения мгновенной и активной мощностей. Затем рассматривается вопрос потерь в схеме питающей приемники энергией. Пока схема сводится к соединению приемника с электродвижущей силой через сопротивление, на котором имеет место небольшое действительное значение напряжения по сравнении с таким значением напряжения приемника, показывается, что кроме активной мощности можно ввести соответственно определенную реактивную мощность, компенсируемую схемами класса L, C и связать определенные мощности (вместе с некоторыми другими) формулой называемой прямоугольным параллелепипедом мощностей. Однако, когда питающая схема стает более сложной - понятия каких-либо мощностей определяемых на их зажимах обманывают, поскольку не снабжают информацией об их активных токах, при которых происходит минимум потерь в этой схеме при заданном снабжении приемников активными мощностями. Токи активные и другие не являются тогда в общем ортогопальные, что делает невозможным построить прямоугольный параллелепипед мощностей. Таким образом возникает необходимость замещения классической теории мощностей некоторой теорией оптимизации. Кроме вопроса минимизации потерь, в работе обсуждается тоже вопрос формы токов и напряжений приемников. Это заключается или в совместном рассматривании обоих вопросов путем минимизации соответственно подобранных функционалов, или на их поотдельном представлении функционалами минимизированными по некоторым параметрам компенсаторов, ответственным отдельно за потери и отдельно за напряжения приемников. Вышеуказанные оптимизационные вопросы обсуждаются сперва с применением некоторых стандартных пространств сигналов напряжения и тока имеющихся в цепи, таких как L_T^2, B^2 или их прямые суммы связанные с многозажимными элементами; затем формулируются абстрактно с применением любых пространств Гильберта как вышеупомянутых сигнальных пространств. В заданном пространстве Гильберта можно принимать разные базисы и оптимизационные расчеты проводить на коэффициентах Фурье токов и напряжений относительно этих базисов. Это связывается с некоторой геометрической формализацией заключающейся во введении в общем бесконечно размерных подмногообразий рассматриваемых пространств Гильберта путем приведения равностных побочных условий оптимизационных вопросов и, затем, применение на этих многообразиях некоторых геометрических объектов. Эта нить лишь только намечена. За исключением простых случаев, оптимизационные вопросы лишь только ставляются без решения соответственных уравнений с гильбертовскими аргументами возникающими из необходимых условий искомых минимумов.