ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.114 Nr kol. 1250

Tadeusz KACZOREK
Politechnika Warszawska

WYZNACZANIE ODPOWIEDZI ORAZ OSIĄGALNOŚĆ I STEROWALNOŚĆ 2-W UKŁADÓW CIĄGŁO-DYSKRETNYCH

Streszczenie: Podano ogólny 2-W model ciągło-dyskretny układów liniowych oraz jego przypadki szczególnie modele typu Fornasiniego-Marchesiniego i Attasiego. Wprowadzono również ogólny 2-W model ciągło-dyskretny typu Roessera. Podano rozwiązanie standardowego ogólnego modelu 2-W spełniające dane warunki brzegowe oraz wyprowadzono wzór pozwalający wyznaczyć odpowiedź tego modelu dla danych wymuszeń i warunków brzegowych. Podano warunki konieczne i dostateczne osiągalności i sterowalności standardowego 2-W ogólnego modelu ciągło-dyskretnego.

GENERAL RESPONSE FORMULA AND THE REACHABILITY AND CONTROLLABILITY OF 2-D CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

Summary: A general 2-D continuous-discrete model of linear systems and its particular cases the models of Fornasini-Marchesini type and Attasi type are introduced. A general 2-D continuous-discrete model of Roesser type is also introduced. A solution and the general response formula to the standard general 2-D continuous-discrete model are derived. Necessary and sufficient conditions for the reachability and controllability of the standard general 2-D continuous-discrete model are established.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАССЧЕТА ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ А ТАКЖЕ ДОСТИЖИМОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДВУХМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Резюме: Приведена двухмерная общая непрерывно-дискретная модель линейных систем а также ее частные случаи - модели типа Форнасини-Марчесини и Аттаси. Введена общая двухмерная непрерывно-дискретная модель типа Резера. Дано решение стандартной общей двухмерной модели выполняющей заданные краевые условия, а также получена формула, по которой можно рассчитывать выходные сигналы этой модели для заданных входных воздействий и краевых условий. Определены необходимые и достаточные условия достижимости и управляемости стандартной общей двухмерной непрерывно-дискретной модели.

1. Wprowadzenie

Do najbardziej znanych modeli liniowych układów dwuwymiarowych (2-W) należą modele dyskretne (obie zmienne niezależne są dyskretne) zaproponowane przez Roessera [20] oraz Fornasiniego i Marchesiniego [2,3]. Interesujący przegląd wyników dotyczących 2-W układów dyskretnych jest podany w pracy [19]. 2-W modele ciągłe, w których obie zmienne mają charakter ciągły, były rozpatrywane w pracach [1,4,22]. Ostatnio w pracach [5,6,11]

rozpatrywano również modele ciągło-dyskretne, w których jedna zmienna ma charakter ciągły, a druga dyskretny. Tego typu modele pojawiają się w różnych dziedzinach techniki i nauki [5,11]. Przykładami takich układów są procesy repetycyjne w górnictwie [21] oraz procesy iteracyjne uczenia [18].

W pracy tej zostaną wprowadzone ogólne modele 2-W typu Kurka [17,8,7], Fornasiniego-Marchesiniego [2,3], Attasiego i Roessera [20,7,15]. Podane zostanie rozwiązanie ogólnego modelu standardowego oraz warunki konieczne i dostateczne osiągalności i sterowalności tego modelu.

2. Modele 2-W układów ciągło-dyskretnych

Weźmy pod uwagę ogólny 2-W model ciągło-dyskretny opisany równaniami

$$E\dot{x}(t,k+1) = A_0x(t,k) + A_1\dot{x}(t,k) + A_2x(t,k+1) + \\ +B_0u(t,k) + B_1\dot{u}(t,k) + B_2u(t,k+1) \tag{1a}$$

$$t \in R_+, k \in Z_+$$

$$y(t,k) = Cx(t,k) + Du(t,k) \tag{1b}$$

przy czym: $\dot{x}(t,k) := \frac{\partial x(t,k)}{\partial t}, x(t,k) \in R^n$ jest semiwektorem stanu, $u(t,k) \in R^m$ jest wektorem wymuszeń, $y(t,k) \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi, $E \in R^{q\times n}, A_i \in R^{q\times n}, B_i \in R^{q\times m}$, $i = 0,1,2$, $C \in R^{p\times n}, D \in R^{p\times m}$, $R^{m\times n}$ jest zbiorem macierzy o wymiarach $m\times n$ i elementach z ciała liczb rzeczywistych, R_+ jest zbiorem nieujemnych liczb rzeczywistych i Z_+ jest zbiorem nieujemnych liczb całkowitych.

Jeżeli $q \neq n$ lub $\det E = 0$, gdy $q = n$, to model (1) nazywamy singularnym. Jeżeli $n = q$ i $\det E \neq 0$, to mnożąc lewostronnie (1a) przez E^{-1} otrzymamy

$$\dot{x}(t,k+1) = A_0'x(t,k) + A_1'\dot{x}(t,k) + A_2'x(t,k+1) + \\ +B_0'u(t,k) + B_1'\dot{u}(t,k) + B_2'u(t,k+1) \tag{1c}$$

przy czym $A_i' := E^{-1}A_i, B_i' := E^{-1}B_i, i = 0,1,2$.

Model opisany równaniami (1c) i (1b) nazywać będziemy standardowym.

Warunki brzegowe dla (1a) są określone zwykle następująco

$$x(t,0) = x_1(t), t \in R_+ \text{ oraz } x(0,k) = x_2(k), k \in Z_+ \tag{2}$$

przy czym $x_1(t)$ i $x_2(k)$ są dane.

Szczególnymi przypadkami ogólnego modelu (1) są:

1) dla $B_1 = B_2 = 0$ pierwszy 2-W model ciągło-dyskretny typu Fornasinego-Marchesiniego,
2) dla $A_0 = 0$ i $B_0 = 0$ drugi 2-W model ciągło-dyskretny typu Fonasiniego-Marchesiniego,
3) dla $A_0 = -A_1 A_2$ i $B_1 = B_2 = 0$ 2-W model ciągło-dyskretny typu Attasiego.

Weźmy z kolei pod uwagę ogólny 2-W model ciągło-dyskretny typu Roessera opisany równaniami

$$E\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t,k)\\ x_2(t,k+1)\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x_1(t,k)\\ x_2(t,k)\end{bmatrix} + Bu(t,k) \tag{3a}$$

$$t \in R_+, k \in Z_+$$

$$y(t,k) = C\begin{bmatrix}x_1(t,k)\\ x_2(t,k)\end{bmatrix} + Du(t,k) \tag{3b}$$

przy czym $\dot{x}_1(t,k) := \dfrac{\partial x_1(t,k)}{\partial t}, x_1(t,k) \in R^{n_1}$ i $x_2(t,k) \in R^{n_2}$ są semiwektorami stanu, $u(t,k) \in R^m$ jest wektorem wymuszeń, $y(t,k) \in R^p$ jest wektorem odpowiedzi, $E \in R^{q\times n}(n := n_1 + n_2)$, $A \in R^{q\times n}, B \in R^{q\times m}, C \in R^{p\times n}$ i $D \in R^{p\times m}$.

Jeżeli $q \neq n$ lub $\det E = 0$, gdy $q = n$, to model (3) nazywamy singularnym. Jeżeli $n = q$ i $\det E \neq 0$, to mnożąc (3a) lewostronnie przez E^{-1} możemy model ten sprowadzić do postaci standardowej $(E = I_n)$.

Warunki brzegowe dla (3a) są określone zwykle następująco

$$x_1(0,k) = x_1(k), k \in Z_+ \quad \text{oraz} \quad x_2(t,0) = x_2(t), t \in R_+ \tag{4}$$

przy czym $x_1(k)$ i $x_2(t)$ są dane.

Jeżeli elementy wszystkich lub niektórych macierzy zależą od zmiennych t i k, to modele (1) i (3) nazywamy modelami ze zmiennymi współczynnikami.

Definiując

$$x_1(t,k) := Ex(t,k+1) - A_1 x(t,k), \; x_2(t,k) := x(t,k)$$

możemy model (1) napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} I & -A_2\\ 0 & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t,k)\\ x_2(t,k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_0\\ I & A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t,k)\\ x_2(t,k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(t,k)\\ \dot{u}(t,k)\\ u(t,k+1)\end{bmatrix}$$

Model (1) jest więc szczególnym przypadkiem modelu (3).

Niech

$$E = [E_1, E_2] = [E_1 \; 0] + [0 \; E_2], E \in R^{q\times n_1}, E \in R^{q\times n_2}$$

oraz

$$x(t,k):=\begin{bmatrix} x_1(t,k) \\ x_2(t,k) \end{bmatrix}$$

Korzystając z tych oznaczeń możemy (3a) napisać w postaci

$$[E_1\ 0]\dot{x}(t,k)+[0\ E_2]x(t,k+1)=Ax(t,k)+Bu(t,k)$$

Model (3) jest więc szczególnym przypadkiem modelu (1). Inne znane zależności między 2-W modelami dyskretnymi [7] można również uogólnić na 2-W modele ciągło-dyskretne.

3. Wyznaczanie rozwiązań modeli

Weźmy pod uwagę standardowy model (1), $E=I_n$. Dla uproszczenia oznaczeń napiszemy równanie (1a) w postaci

$$\dot{x}(t,k+1)=A_0x(t,k)+A_1\dot{x}(t,k)+A_2x(t,k+1)+f(t,k) \tag{5a}$$

przy czym

$$f(t,k):=B_0u(t,k)+B_1\dot{u}(t,k)+B_2u(t,k+1) \tag{5b}$$

Zadanie nasze można sformułować następująco:
Dane są macierze $A_i, i=0,1,2$, wektor $f(t,k), t\in R_+, k\in Z_+$ oraz warunki brzegowe (2). Należy wyznaczyć rozwiązanie $x(t,k)$, równania (5a) spełniające warunki brzegowe (2) oraz podać wzór określający odpowiedź $y(t,k)$ w funkcji znanych macierzy A_i, C, D, wektorów $f(t,k), u(t,k)$ i warunków brzegowych (2).
Aby wyznaczyć rozwiązanie $x(t,k)$ równania (5a), weźmy pod uwagę to równanie dla $k=0$. Otrzymamy wówczas

$$\dot{x}(t,1)=A_2x(t,1)+F_0(t) \tag{6a}$$

przy czym

$$F_0(t):=A_0x_1(t)+A_1\dot{x}_1(t)+f(t,0) \tag{6b}$$

jest znane dla danych warunków brzegowych (2).
Rozwiązanie $x(t,1)$ równania (6a) ma postać [7,15]

$$x(t,1)=e^{A_2t}x_2(1)+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}F_0(\tau)d\tau \tag{7}$$

Podstawiając z kolei $k=1$ do (5a) i korzystając z (7) otrzymamy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t,2)&=A_0x(t,1)+A_1\dot{x}(t,1)+A_2x(t,2)+f(t,1)=\\&=A_0\Big[e^{A_2t}x_2(1)+\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}F_0(\tau)d\tau\Big]+\\&+A_1\Big[A_2e^{A_2t}x_2(1)+F_0(t)+A_2\int_0^t e^{A_2(t-\tau)}F_0(\tau)d\tau\Big]+A_2x(t,2)+f(t,1)=\end{aligned}$$

$$= A_2 x(t,2) + F_1(t) \tag{8}$$

przy czym

$$F_1(t) := A\left[e^{A_2 t} x_2(1) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_0(\tau) d\tau\right] + A_1 F_0(t) + f(t,1)$$

$$A = A_0 + A_1 A_2$$

Rozwiązanie $x(t,2)$ równania (8) ma postać

$$x(t,2) = e^{A_2 t} x_2(2) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_1(\tau) d\tau \tag{9}$$

Analogicznie korzystając z (5a) dla $k = 2$ oraz (9) otrzymamy

$$\dot{x}(t,3) = A_0 x(t,2) + A_1 \dot{x}(t,2) + A_2 x(t,3) + f(t,2) =$$

$$+ A_1\left[A_2 e^{A_2 t} x_2(2) + F_1(t) + A_2 \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_1(\tau) d\tau\right] + A_2 x(t,3) + f(t,2) =$$

$$= A_2 x(t,3) + F_2(t) \tag{10}$$

przy czym

$$F_2(t) := A\left[e^{A_2 t} x_2(2) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_1(\tau) d\tau\right] + A_1 F_1(t) + f(t,2)$$

Rozwiązanie $x(t,3)$ równania (10) ma postać

$$x(t,3) = e^{A_2 t} x_2(3) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_2(\tau) d\tau$$

Kontynuując tę procedurę po k krokach otrzymamy

$$x(t,k) = e^{A_2 t} x_2(k) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_{k-1}(\tau) d\tau, k = 1,2,\ldots \tag{11}$$

przy czym $F_{k-1}(t)$ spełnia równanie

$$F_k(t) = A\left[e^{A_2 t} x_2(k) + \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_{k-1}(\tau) d\tau\right] + A_1 F_{k-1}(t) + f(t,k) \tag{12}$$

Niech P_t będzie operatorem (odwzorowaniem) określonym następująco

$$P_t F(t) := A \int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F(\tau) d\tau + A_1 F(t) \tag{13}$$

a $P_t^k = P_t \circ P_t \circ \ldots \circ P_t$ k-krotnym złożeniem tego operatora, przy czym $P_t^0 = I$ (jest tożsamością).

Korzystając z tego operatora oraz oznaczenia

$$g_k(t) := A e^{A_2 t} x_2(k) + f(t,k)$$

możemy równanie (12) napisać w postaci

$$F_k(t) = P_t F_{k-1}(t) + g_k(t) \quad k \in Z_+ \tag{14}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie $F_k(t)$ równania (14) ma postać

$$F_k(t) = P_t^k F_0(t) + \sum_{i=0}^{k-1} P_t^{k-i-1} g_{i+1}(t) \tag{15}$$

przy czym $F_0(t)$ jest określone zależnością (6b).

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie

Twierdzenie 1

Rozwiązanie $x(t,k)$ równania (5a) spełniające warunki brzegowe (2) ma postać (11), przy czym $F_k(t)$ jest określona zależnością (15).

Podstawiając (11) do (1b) otrzymamy

$$y(t,k) = Ce^{A_2 t} x_2(k) + C\int_0^t e^{A_2(t-\tau)} F_{k-1}(\tau)d\tau + Du(t,k),\ t \in R_+, k \in Z_+ \tag{16}$$

Wzór (16) pozwala wyznaczyć odpowiedź $y(t,k)$ dla danych macierzy $A_i, B_i, i = 0,1,2;\ C, D$, wymuszenia $u(t,k)$ oraz warunków brzegowych (2).

4. Osiągalność i sterowalność

Weźmy pod uwagę standardowy 2-W układ ciągło-dyskretny opisany równaniem

$$\dot{x}(t,k+1) = A_0 x(t,k) + A_1 \dot{x}(t,k) + A_2 x(t,k+1) + Bu(t,k) \tag{17}$$

przy czym $x(t,k), u(t,k), A_i, i = 0,1,2$ są zdefiniowane tak samo jak dla (1a), a $B \in R^{n\times m}$.

Zakładamy, że

$$u(t,k) := u_k \quad \text{dla} \quad 0 \le t \le T, T \in R_+, k \in Z_+ \tag{18}$$

przy czym u_k jest stałe niezależnie od t.

Warunki brzegowe dla (17) mają postać (2).

Definicja 1. Układ opisany równaniem (17) nazywać będziemy osiągalnym w prostokącie

$$[T,N] := \{(t,k) \in R_+ \times Z_+ : 0 \le t \le T, 0 < k \le N\} \tag{19}$$

jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych : $x_1(t), t \in [0,T], x_2(k), k \in [1,N]$ oraz dla każdego

wektora $x_f \in R^n$ istnieje wymuszenie $u(t,k)$ dla $t \in [0,T], k \in [0,N-1]$, takie że $x(T,N) = x_f$.

Twierdzenie 2

Układ opisany równaniem (17) jest osiągalny w prostokącie (19) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\left[R_0, R_1, \ldots R_{N-1}\right] = n \tag{20}$$

przy czym

$$R_i := \int_0^T e^{A_2(T-\tau)} P_\tau^i B d\tau, \; i = 0,1,\ldots,N-1 \tag{21}$$

a P_t jest operatorem określonym zależnością (13).

Dowód. Ze wzorów (11), (15) dla $t = T, k = N$ po uwzględnieniu, że $f(t,k) = Bu(t,k)$, założenia (18) oraz $x(T,N) = x_f$ otrzymamy

$$x_f - e^{A_2 T} x_2(N) - \int_0^T e^{A_2(T-\tau)} \left\{ P_\tau^{N-1}\left[A_0 x_1(\tau) + A_1 \dot{x}_1(\tau)\right] + \sum_{i=0}^{N-2} P_\tau^{N-i-2} A e^{A_2 T} x_2(i+1) \right\} d\tau =$$

$$= \left[R_0, R_1, \ldots, R_{N-1}\right] \begin{bmatrix} u_{N-1} \\ u_{N-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Z założenia x_f i warunki brzegowe (2) są dowolne. Z lewej strony równości (22) mamy więc dowolny wektor n-wymiarowy. Istnieje więc ciąg $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ wtedy i tylko wtedy spełniający (22), gdy zachodzi (20).□

Definicja 2. Układ opisany równaniem (17) nazywać będziemy sterowalnym w prostokącie (19), jeżeli dla dowolnych warunków brzegowych $x_1(t), t \in [0,T], x_2(k), k \in [1,N]$ istnieje wymuszenie $u(t,k)$ dla $t \in [0,T], k \in [0,N-1]$, takie że $x[T,N] = 0$.

Twierdzenie 3

Układ opisany równaniem (17) jest sterowalny w prostokącie (19) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (20).

Dowód. Ze wzorów (11), (15) dla $t = T, k = N$ po uwzględnieniu, że $f(t,k) = Bu(t,k)$, założenia (18) oraz $x(T,N) = 0$ otrzymamy

$$-e^{A_2T}x_2(N)-\int_0^T e^{-A_2(T-\tau)}\left\{P_\tau^{N-1}\left[A_0x_1(\tau)+A_1\dot{x}_1(\tau)\right]+\sum_{i=0}^{N-2}P_\tau^{N-i-2}Ae^{A_2T}x_2(i+1)\right\}d\tau=$$

$$=\left[R_0,R_1,\ldots,R_{N-1}\right]\begin{bmatrix}u_{N-1}\\u_{N-2}\\\vdots\\u_0\end{bmatrix} \tag{23}$$

Dla dowolnej macierzy A_2 macierz e^{A_2T} jest nieosobliwa. Z lewej strony równości (23) mamy więc dowolny wektor n-wymiarowy. Istnieje więc ciąg $u_0,u_1,\ldots,u_{N-1}$ wtedy i tylko wtedy spełniający (23), gdy zachodzi (20). ❑

Z twierdzenia 2 i 3 wynika następujący ważny wniosek. Dla standardowej 2-W modelu (17) pojęcia osiągalności i sterowalności są równoważne analogicznie jak dla ciągłych układów jednowymiarowych.

Przykład

Weźmy pod uwagę układ opisany równaniem (17), którego

$$A_0=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Aby zbadać osiągalność tego układu w prostokącie [1,2] korzystając z (21) dla $T=1$ wyznaczamy

$$R_0=\int_0^1 e^{A_2\tau}Bd\tau=A_2^{-1}\left[e^{A_2}-I\right]B=\begin{bmatrix}e-1\\0\end{bmatrix}$$

$$R_1=\int_0^1 e^{A_2(1-\tau)}P_\tau Bd\tau=\int_0^1 e^{A_2(1-\tau)}\left[A\int_0^\tau e^{A_0(\tau-\tau_1)}d\tau_1+A_1\right]Bd\tau=\begin{bmatrix}e\\\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)-e\end{bmatrix}$$

Ze wzoru (20) dla N=2 otrzymamy więc

$$\text{rząd}\left[R_0,R_1\right]=\text{rząd}\begin{bmatrix}e-1, & e\\0, & \frac{1}{2}\left(e^2+1\right)-e\end{bmatrix}=2$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 układ ten jest więc osiągalny w prostokącie [1,2].

Aby wyznaczyć ciąg sterowań $\{u_0,u_1\}$ przeprowadzający ten układ z warunków brzegowych

$$x_1(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, t\in R_+, x_2(k)=\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}, k\in Z_+ \tag{24}$$

do stanu $x_f=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ w punkcie (1,2) korzystamy z zależności (21), która dla $T=1, N=2$ przyjmuje postać

$$x_f-e^{A_2}x_2(2)-\int_0^1 e^{A_2(1-\tau)}\left[P_\tau\left(A_0x_1(\tau)+A_1\dot{x}_1(\tau)\right)+Ae^{A_2\tau}x_2(1)\right]d\tau=\left[R_0,R_1\right]\begin{bmatrix}u_1\\u_0\end{bmatrix} \tag{25}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$x_f-e^{A_2}x_2(2)=\begin{bmatrix}1-2e\\1-e^2\end{bmatrix}, \qquad Ae^{A_2\tau}x_2(1)=\begin{bmatrix}e^\tau+e^{2\tau}\\e^\tau+2e^{2\tau}\end{bmatrix}$$

$$P_\tau\left(A_0x_1(\tau)+A_1\dot{x}_1(\tau)\right)=A\int_0^\tau e^{A_2(\tau-\tau_1)}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}d\tau_1=\begin{bmatrix}e^\tau\\e^\tau-1\end{bmatrix}$$

oraz

$$\int_0^1 e^{A_2(1-\tau)}\left[P_\tau\left(A_0x_1(\tau)+A_1\dot{x}_1(\tau)\right)+Ae^{A_2\tau}x_2(1)\right]d\tau=$$

$$=\int_0^1 e^{A_2(1-\tau)}\begin{bmatrix}2e^\tau+e^{2\tau}\\2e^\tau+2e^{2\tau}-1\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}e^2+e\\\frac{7}{2}e^2-2e+\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

z (25) otrzymamy układ równań

$$\begin{bmatrix}e-1, & e\\0, & \frac{1}{2}\left(e^2+1\right)-e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^2-3e+1\\-\frac{9}{2}e^2+2e+\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

którego rozwiązanie ma postać

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{(e+1)\left(1-7e+9e^2-e^3\right)}{(e-1)^3}\\\dfrac{1+4e-9e^2}{(e-1)^2}\end{bmatrix} \tag{26}$$

Korzystając z (9) dla $t=1$ łatwo sprawdzić, że sterowanie (26) przeprowadza układ ten z warunków brzegowych (24) do stanu $x_f=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ w punkcie (1,2).

5. Uwagi końcowe

Przyjmując za punkt wyjścia warunki osiągalności w sposób analogiczny, jak dla 2-W układów dyskretnych [9,10,12-14,16], można sformułować i rozwiązać zadane sterowanie z minimalną energią dla modelu (17).Uogólnienie twierdzeń 1,2 i 3 na przypadek standardowego ($E=I$) modelu (1) nie jest trywialne i będzie przedmiotem odrębnej pracy.

LITERATURA

[1] J. Bergman, P.Burgmeier and P. Weiher,*Explicit controllability criteria for Goursat Problems*, Optimization, vol. 20, No 3, 1989 pp. 281-290.

[2] E.Fornasini, G.Marchesini, *State space realization of two-dimensional filters*, IEEE Trans.Autom.Control, AC-21 , 1976, pp. 484-491.

[3] E.Fornasini, G.Marchesini, *Doubly indexed dynamical systems: State space models and structural properties*, Math.Syst.Theory 12, 1978.

[4] D.Idczak and S.Walczak, *On the controllability of nonlinear Goursat systems*, Optimization, 1992, vol. 23, pp. 91-98.

[5] T. Kaczorek, *General response formula for regular 2-D continuous-discrete linear systems.* Systems and Control Letters (Submitted to).

[6] T. Kaczorek, *Minimum energy control of 2-D continuous-discrete linear systems.*Materiały SPETO Gliwice-Wisła 25-28 Maj 1994.

[7] T.Kaczorek, *Linear Control Systems*, vol. II, Research Studies Press LTD. J.Wiley, New York 1993.

[8] T.Kaczorek, *Singular general model of 2-D systems and its solution*, IEEE Trans. Autom.Control, AC-33, 1988, pp.1060-1061.

[9] T.Kaczorek, *General Response Formula and Minimum Energy Control for the General Singular Model of 2-D Systems*, IEEE Trans.Autom.Contr. AC-35, April 1990, pp. 433-436.

[10] T.Kaczorek, *Minimum Energy Control for General Model of 2-D Linear Systems*, Int. J. Control,vol. 47, No 5, 1988, pp. 1555-1562.

[11] T. Kaczorek, *Singular 2-D continuous-discrete linear systems*, Bull. Pol. Acad. Techn. Sci., vol. 42, No 1, 1994.

[12] T.Kaczorek, J.Klamka, *Minimum Energy Control of 2-D Linear Systems with Variable Coefficients*, Int.J.Control, vol.44, No 3, 1986, pp. 645-650.

[13] T.Kaczorek, J.Klamka, *Local Controllability and Minimum Energy Control of n-D Linear Systems*, Bull.Pol.Acad.Techn.Sci., vol. 35, No 11-12, 1987, pp. 679-685.

[14] J.Klamka, *Minimum Energy Control of 2-D Systems in Hilbert Spaces*, System Science, vol. 9, pp. 33-42.

[15] J.Klamka, *Controllability of Dynamical Systems*, PWN-Kluwer Academie Publishers, Warszawa-Dordrecht-London, 1991.

[16] J.Klamka, *Minimum energy control for 2-D systems,* Systems Science, vol. 9, 1983.

[17] J.Kurek, *The general state-space model for two-dimensional linear digital system,* IEEE Trans.Autom.Control, AC-30, 1985, pp. 600-602.

[18] J.Kurek and M.B.Zaremba, *Iterative learning control synthesis on 2-D system theory,* IEEE Trans.Autom.Contr.,vol. 38, No 1, 1993, pp. 121-125.

[19] F.L.Lewis, *A review of 2-D implicit systems,* Automatica vol. 28, No 2, 1992, pp. 345-354.

[20] R.P.Roesser, *A discrete state-space model for linear image processing,* IEEE Trans. Autom.Control, AC-21, 1975, pp. 1-10.

[21] E. Rogers, D.H. Owens, *Stability Analysis for Linear Repetitive Processes.* Springer - Verlag 1992.

[22] S.Walczak, *On the existence of a solution for some systems of partical differential equations-necessary conditions for optimality,* Bull.Pol.Acad.Sci., vol. 36, No 5-6, 1988, pp. 375-384.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

Wpłynęło do redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

Recently the well-known theory of discrete 2-D systems has been extended for continuous case, i.e. for the so called 2-D continuous-discrete systems. In the present paper general response formula for linear, 2-D continuous-discrete systems with constant coefficients and with non zero boundary conditions is derived. It is generally assumed that the set of admissible controls contains constant controls. For such assumptions using pure algebraic methods it is possible to express the solution formula in a rather compact form. Next, definitions of local cotrollability and local reachability in a given rectangle are presented. Moreover using the general response formula necessary and sufficient conditions for controllability and reachability are formulated and proved. These conditions are expressed as matrices rank conditions.

The theorems presented in the paper extend to the case of 2-D continuous-discrete linear systems, the previous results given in literature for 2-D be pointed out the presented results can be used in order to solve so called minimum energy control problem for linear 2-D continuous-discrete systems with constant coefficients.