

Ewa SKUBALSKA - RAFAJŁOWICZ  
Politechnika Wroclawska

### ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA ZADANIA KOMIWOJAZERA W PRZESTRZENI WIELOWYMIAROWEJ Z METRYKĄ EUKLIDESOWĄ

**Streszczenie:** W pracy sformułowano heurystyczny algorytm rozwiązywania zadania komiwojażera w przestrzeni wielowymiarowej z metryką euklidesową. Algorytm wykorzystuje konstrukcję i własności krzywej wypełniającej  $d$ -wymiarową kostkę. Krzywa ta jest uogólnieniem dwuwymiarowej krzywej Sierpińskiego. Do opisu krzywej wykorzystano systemy iterowanych funkcji afinicznych (IFS) wprowadzone przez Barnsleya do konstrukcji obiektów fraktalnych. W pracy przedstawiono wyniki eksperymentów numerycznych.

### ALGORITHM FOR TRAVELLING SALESMAN PROBLEM IN MULTIDIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

**Summary:** A heuristic algorithm for Travelling Salesman Problem solution in multidimensional Euclidean space is presented. The algorithm is based on a construction of a spacefilling curve, which fills  $d$ -dimensional cube. The curve is  $d$ -dimensional generalization of two-dimensional Sierpiński spacefilling curve. Iterated affine function system (IFS) is used to describe the curve. Some numerical experiments are reported.

### EIN ALGORITHMUS FÜR RUNDREISEPROBLEM IM MEHRDIMENSIONALEN EUKLIDISCHEN RAUM

**Zusammenfassung:** Ein heuristischer Algorithmus für Rundreiseproblem im mehrdimensionalen euklidischen Raum wird entwickelt. Der Algorithmus wird die Konstruktion der verallgemeinerte Sierpiński-Füllraumkurve verwendet. Die Füllraumkurve wird mit iterierten affinen Funktionssystemen (IFS) beschrieben. Es wird über numerische Teste berichtet.

## 1. Wstęp

Zagadnienie komiwojażera (TSP) polega na wyznaczeniu najkrótszej zamkniętej drogi przechodzącej przez każdy z  $n$  danych punktów. Zadanie to ma bardzo wiele różnorodnych zastosowań i jest jednym z kluczowych zagadnień dyskretnej optymalizacji począwszy od lat 30 obecnego wieku. Obszerny przegląd prac dotyczących zagadnienia komiwojażera można znaleźć w książce [7] z 1985. W niniejszej pracy będziemy się zajmować szczególną klasą zadań TSP, w której poszczególne punkty są określone poprzez ich współrzędne w przestrzeni  $d$ -wymiarowej, a odległości między nimi są wyznaczone zgodnie z metryką euklidesową. Taki problem będziemy w skrócie oznaczać przez ETSP.

Problem TSP w ogólnym przypadku jest zadaniem należącym do klasy problemów NP-zupełnych. Również zadanie ETSP, nawet w przypadku dwuwymiarowym, jest problemem NP-zupełnym. W związku z tym szczególnie intensywnie rozwijane są prace nad konstrukcją algorytmów heurystycznych pozwalających w krótkim czasie wyznaczyć dobre, choć niekoniecznie optymalne rozwiązanie problemu ETSP.

Bartholdi i Platzman [2, 9] w roku 1989 pokazali jak wykorzystać krzywą Sierpińskiego do przybliżonego rozwiązywania problemu komiwojażera z odległościami euklidesowymi (ETSP) na płaszczyźnie. Sam pomysł wykorzystania krzywych wypełniających przestrzeń pochodzi jednak, jak twierdzi J.M. Steele [11], z niepublikowanej pracy S. Kakutani z 1966 roku.

Krzywymi wypełniającymi płaszczyznę (spacefilling curves) zaczęto się zajmować już pod koniec XIX wieku. Prace te zapoczątkował G. Peano. Przez długi czas nie interesowano się krzywymi wypełniającymi przestrzeń więcej niż dwuwymiarową. W 1980 roku S.C. Milne [8] pokazał, jak uogólnić dwuwymiarową krzywą Peano do krzywej w przestrzeni  $d$ -wymiarowej. W pracy tej Milne udowodnił również, że wprowadzona przez niego krzywa zachowuje miarę Lebesgue'a, a odpowiadająca jej transformacja  $I_1 \rightarrow I_d$  jest funkcją Lipschitzowską ze stałą Lipschitza równą  $\frac{1}{d}$ .

W 1984 roku W.J. Gilbert [5] pokazał natomiast, jak uogólnić pochodzącą z 1891 roku krzywą Hilberta. Obie wymienione powyżej krzywe : zarówno uogólnienie krzywej Peano jak i krzywej Hilberta są krzywymi otwartymi. W wielu zastosowaniach (np. w ETSP) uzasadnione jest użycie krzywej cyklicznej ( zamkniętej ), która nie wyróżnia żadnego kierunku w przestrzeni, ani żadnego z punktów przestrzeni jako początkowy bądź końcowy. Krzywą o tej własności na płaszczyźnie jest użyta przez Bartholdiego i Platzmana krzywa skonstruowana w 1912 roku przez Sierpińskiego.

W związku z tym pojawiła się potrzeba znalezienia krzywej zamkniętej wypełniającej przestrzeń wielowymiarową, a dokładnie wielowymiarową kostkę. Konstrukcję takiej krzywej, którą możemy uważać za wielowymiarowe uogólnienie krzywej Sierpińskiego, autorka przedstawiła w pracy [13].

Ogólnie rzecz biorąc, idea algorytmu heurystycznego rozwiązania ETSP przy wykorzystaniu pewnej krzywej wypełniającej przestrzeń polega na uporządkowaniu punktów zgodnie z ich kolejnością występowania na krzywej. Uporządkowanie to wyznacza kolejność występowania punktów w trasie komiwojażera. Podstawową zaletą tego typu algorytmów jest, poza ich prostotą, to, że wyznaczenie trasy dla danego zbioru punktów jest równoważne z określeniem rozwiązania dla każdego podzbioru tych punktów (uporządkowanie punktów nie ulega zmianie). Również pojawienie się dodatkowych punktów nie powoduje nadmiernych komplikacji. Wystarczy wyznaczyć położenie tych punktów na krzywej i odpowiednio do niego włączyć je do trasy. Wymaga to wykonania jedynie  $O(\log n)$  operacji arytmetycznych, gdzie  $n$  jest liczbą punktów znajdujących się w trasie. Samo wyznaczenie położenia danego punktu na krzywej wymaga wykonania  $O(d)$  operacji arytmetycznych, gdzie  $d$  jest wymiarem przestrzeni (por. [13]).

## 2. Opis algorytmu

Algorytm zakłada istnienie ciągłego odwzorowania  $F_d(t)$  odcinka  $I_1 = [0, 1]$  w  $d$ -wymiarową kostkę  $I_d = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ . Odwzorowanie to zachowuje miarę Lebesgue'a oraz jest przekształceniem Lipschitzowskim z wykładnikiem  $\frac{1}{d}$ , to znaczy:

$$\| F_d(t_1) - F_d(t_2) \| \leq c(|t_1 - t_2|)^{\frac{1}{d}}$$

W przypadku krzywej przedstawionej w pracy [13] mamy ponadto:

$$\| F_d(t_1) - F_d(t_2) \| \leq c(\Delta(t_1, t_2))^{\frac{1}{d}},$$

gdzie:  $\Delta(t_1, t_2) = \min\{|t_1 - t_2|, 1 - |t_1 - t_2|\}$ , a  $\| \cdot \|$  oznacza normę euklidesową. W obu przypadkach  $c = 2 \cdot \sqrt{d+6}$ .

Zachowywanie miary Lebesgue'a rozumiemy jako spełnianie przez  $F_d(t)$  następującego warunku:

dla każdego mierzalnego zbioru  $A \subseteq I_d$

$$\mu_1(F_d^{-1}(A)) = \mu_d(A),$$

gdzie  $\mu_1$  i  $\mu_d$  są odpowiednio miarami Lebesgue'a w  $R$  i  $R^d$ . Zachowywanie miary możemy intuicyjnie rozumieć jako własność krzywej, która powoduje, że krzywa z jednakową intensywnością (równie gęsto) wypełnia całą przestrzeń. Natomiast Lipschitzowskość

transformacji oznacza, że krzywa zachowuje bliskość, to znaczy punkty położone blisko siebie na krzywej są równocześnie położone blisko siebie na kostce. Punkty bliskie sobie na kostce nie muszą jednak znajdować się blisko siebie na krzywej. Jak wiadomo [4],  $F_d(t)$  nie może być odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym. Z praktycznego punktu widzenia istotna jest możliwość wyznaczenia dla każdego  $x \in I_d$  takiej wartości  $t \in I_1$ , że  $F_d(t) = x$ .

Niech odwzorowanie  $\Psi(x): I_d \rightarrow I_1$ , będzie takim odwzorowaniem, które spełnia warunek  $\Psi(t) \in F^{-1}(x)$ . W pracy [13] pokazano, jak skonstruować odwzorowania  $F_d(t)$  i  $\Psi(x)$  przy spełnieniu dodatkowego warunku  $F_d(0) = F_d(1)$ . Odwzorowanie  $F_d$  opisuje krzywą wypełniającą kostkę  $I_d$ , która ze względu na warunek  $F_d(0) = F_d(1)$  jest krzywą zamkniętą. Odwzorowanie  $F_d$  można opisać wprowadzając dwie równoliczne rodziny przekształceń, jedną działającą na kostce  $I_d$ , a drugą działającą na odcinku  $I_1$ .

Wprowadźmy w  $I_d$  rodzinę przekształceń  $W$ :

$$w_i(x_1, x_2, \dots, x_d) = \begin{cases} \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - \beta_{1,i})x_1 \\ \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - \beta_{2,i})x_2 \\ \dots \\ \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - \beta_{d,i})x_d \end{cases}$$

gdzie  $\beta_{j,i} \in \{0, 1\}$ .

Wszystkich takich przekształceń jest dokładnie  $2^d$ . Ponumerujemy je w taki sposób, że wektory  $B_i = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \dots, \beta_{d,i})^T$  definiujące jednoznacznie dane przekształcenie  $w_i$  są uporządkowane tak jak kody Graya [6] określające kolejność obchodzenia wierzchołków  $d$ -wymiarowej kostki  $I_d$ . Złożenie dowolnej skończonej liczby przekształceń  $w_{i_1} \circ w_{i_2} \circ \dots \circ w_{i_n}$ , generuje pewną podkostkę w  $I_d$  o boku równym  $2^{-n}$ .

Wprowadziliśmy w ten sposób system iterowanych funkcji (IFS), [1]

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_{2^d-1}, I_d \rightarrow I_d\}$$

którego atraktorem jest cała kostka  $I_d$ . Dalej zdefiniujemy system  $2^d$  przekształceń

$$G = \{g_0, g_1, \dots, g_{2^d-1}, I_1 \rightarrow I_1\}$$

działających na odcinku  $I_1$

$$g_i(t) = \frac{b_d}{2^{2d}} + 2^{-d}(i-1) + 2^{-d}t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2^d - 1.$$

$$g_0(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2^d - b_d}{2^{2d}} + 2^{-d}t, & 0 \leq t \leq \frac{2^d - b_d}{2^d} \\ -\frac{2^d - b_d}{2^{2d}} + 2^{-d}t, & \frac{2^d - b_d}{2^d} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

gdzie  $b_d$  jest współczynnikiem zależnym od wymiaru przestrzeni, przy czym

$$b_d = 2^{d-1} - b_{d-1} + 1, \quad b_1 = 1$$

Wartość  $b_d$  rośnie do nieskończoności wraz z  $d$  rosnącym do nieskończoności, natomiast  $b_d 2^{-d}$  zmienia się, co łatwo sprawdzić, od  $\frac{1}{2}$  dla  $d = 2$  do  $\frac{1}{3}$  dla  $d$  dążącego do nieskończoności. Każde z odwzorowań  $g_i$  przekształca  $I_1$  w przedział domknięty lub dwa przedziały domknięte o łącznej długości  $2^{-d}$ . Podobnie każde z odwzorowań  $w_i$  przekształca kostkę  $I_d$  w kostkę  $w_i(I_d)$  o objętości  $2^{-d}$ . Każdy punkt z odcinka  $I_1$  można przedstawić jako punkt stały pewnego złożenia nieskończenie wielu przekształceń  $g_i$ . Oba systemy przekształceń  $W$  i  $G$  mają te same przestrzenie kodowe  $\Sigma$ .

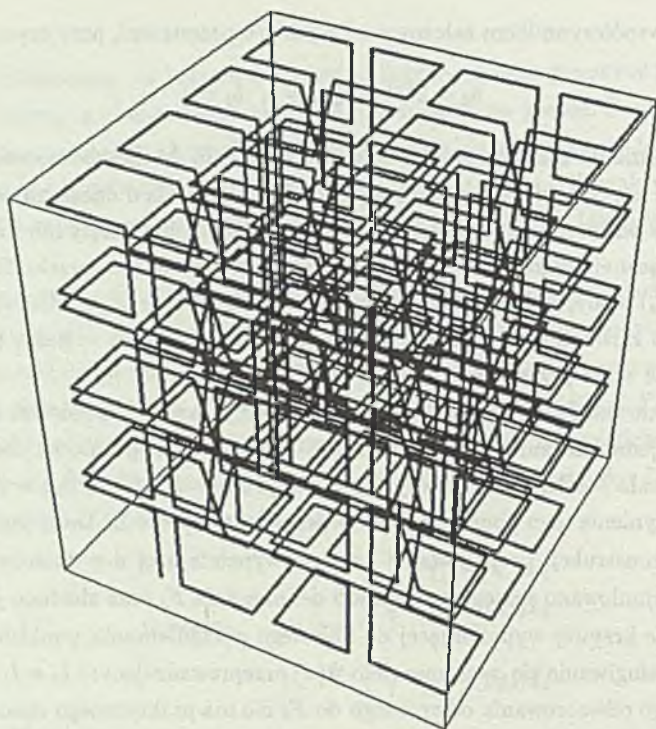
Aby zdefiniować funkcję  $F_d(t): I_1 \rightarrow I_d$  musimy każdemu punktowi  $t \in I_1$  przyporządkować jednoznacznie pewien punkt  $x \in I_d$  i to w taki sposób, by obrazem całego odcinka była cała kostka  $I_d$ , to znaczy:  $F_d(I_1) = \{x : x = F_d(t), t \in I_1\} = I_d$ . Naturalną drogą jest uczynienie tego poprzez adresy w przestrzeni kodów  $\Sigma$ . Tutaj przedstawiliśmy jedynie ideę konstrukcji proponowanej krzywej wypełniającej  $d$ -wymiarową kostkę. W pracy [13] sformułowano szczegółowo sposób definiowania  $F_d$  oraz zbadano jej własności. Wykorzystanie krzywej wypełniającej do liniowego porządkowania punktów leżących w  $I_d$  wymaga posługiwania się odwzorowaniem  $\Psi(x)$  przeprowadzającym  $I_d$  w  $I_1$ . Nieistnienie jednoznacznego odwzorowania odwrotnego do  $F_d$  nie ma praktycznego znaczenia. Jak to wynika z pracy [13], zbiór  $F_d^{-1}(x)$  dla każdego  $x \in I_d$  jest zbiorem skończonym zawierającym co najwyżej  $2^d$  punktów z odcinka, z których jeden należy wybrać. Dotyczy to wszystkich punktów, których współrzędne w  $I_d$  mają skończone dwójkowe rozwinięcia, a wybór  $\Psi(x)$  wiąże się z podjęciem decyzji, czy na przykład punkt o współrzędnej  $x_1 = 1/2$  należy do podkostki  $[0, 1/2] \times \dots$  czy do podkostki  $[1/2, 1] \times \dots$ .

## 2.1. Algorytm

Niech  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  będzie zbiorem punktów w  $I_d$ , dla których należy wyznaczyć trasę komiwojażera. Należy dla każdego punktu określić  $t_i = \Psi(X_i)$ , a następnie uporządkować punkty zgodnie z niemalejącymi wartościami  $t_i$ .  $\square$

W Dodatku umieszczono program napisany w Mathematice, który zawiera algorytm wyznaczania położenia punktu z  $I_d$  na krzywej wypełniającej, to znaczy obliczania  $\Psi(x)$ ,  $x \in I_d$ .

Na rysunku 1. przedstawiono przybliżenie omawianej krzywej przedstawione w postaci lamanej łączącej 511 punktów równomiernie rozmieszczonych w trójwymiarowej kostce.



Rys.1. Krzywa wypełniająca trójwymiarową kostkę  
 Fig.1. Spacefilling curve, which fills 3-dimensional cube

### 3. Wyniki eksperymentów numerycznych

W części tej przedstawione wyniki obliczeń numerycznych miały dać pogląd, jak zachowuje się badany algorytm. W tablicach 1-3 przedstawiono długość drogi ETSP otrzymaną za pomocą krzywej wypełniającej przestrzeń. Punkty losowano z kostki  $I_d$  z rozkładem równomiernym. Odległości między punktami były obliczane zgodnie z normą euklidesową. Wszystkie eksperymenty polegały na 100-krotnym losowaniu zestawów  $n$  punktów (z rozkładem równomiernym) z kostki  $d$ -wymiarowej i każdorazowym obliczeniu długości drogi wyznaczonej przez badaną heurystykę.

W tablicy 1. przedstawiono wyniki dla  $d = 3$  i różnych  $n$ . Wartość średnią długości drogi oznaczono przez  $h_{sr}$ , a wariancję długości drogi przez  $\sigma^2$ .

Poza średnią długością drogi wyznaczano jeszcze wartości współczynników  $\alpha = \frac{h_{sr}}{\sqrt{dn^{(d-1)}/d}}$  oraz  $\beta = \frac{h_{sr}}{\sqrt{d+6n^{(d-1)}/d}}$ . Jak wiadomo z badań Beardwooda, Haltona i Hammersleya (1959) [7], wartość oczekiwana optymalnej długości drogi ETSP, w przypadku gdy współrzędne punktów są realizacjami niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie równomiernym, a  $n \rightarrow \infty$ , ma postać

$$\alpha n^{(d-1)/d},$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem zależnym od  $d$ , którego wartość jest często wiązana z  $\sqrt{d}$  [10].

Tablica 1

Długość drogi ETSP wyznaczona metodą krzywej wypełniającej  $d = 3$

d wymiar przestrzeni	n liczba punktów	$h_{sr}$ długość drogi	$\sigma^2$	$\alpha$	$\beta$
3	10	5.07	0.34	0.63	0.34
3	50	15.48	0.57	0.66	0.38
3	100	24.50	0.68	0.66	0.38
3	500	72.49	1.56	0.66	0.38

W tablicy 2. przedstawiono wyniki dla różnych  $d$  i ustalonego  $n = 100$ .

Tablica 2

Długość drogi ETSP wyznaczona metodą krzywej wypełniającej  $n=100$

d wymiar przestrzeni	n liczba punktów	$h_{sr}$ długość drogi	$\sigma^2$	$\alpha$	$\beta$
4	100	37.84	2.30	0.482	0.34
5	100	49.025	1.23	0.551	0.371
6	100	60.02	3.42	0.528	0.373
7	100	70.73	4.28	0.516	0.379
8	100	80.84	4.16	0.508	0.384
9	100	90.75	3.70	0.505	0.391
10	100	99.40	1.58	0.498	0.394

Dla porównania, zamiast proponowanej krzywej użyto wielowymiarowego odpowiednika krzywej Peano wprowadzonego przez Milne'a [8]. Przy  $d = 3$  oraz 100 punktach losowych w taki sam sposób jak poprzednio otrzymano średnią długość trasy (średnia ze 100 eksperymentów) równą 25.05, natomiast dla  $d = 5$  i pozostałych parametrach bez zmian średnia ta wynosiła 53.11.

Przeprowadzono jeszcze wrywkowe eksperymenty dla innych  $d$  i  $n$ . Przedstawiono je w tablicy 3.

Tablica 3

Długość drogi ETSP wyznaczona metodą krzywej wypełniającej

d	n	$h_{sr}$	$\sigma^2$	$\alpha$	$\beta$
wymiar przestrzeni	liczba punktów	długość drogi			
5	500	72.71	0.41	0.67	0.38
10	500	424.01	14.3	0.499	0.39
20	10	17.21	0.92	0.43	0.38
20	100	163.63	4.24	0.46	0.40

Przedstawione eksperymenty wskazują, że wartość średnia długości drogi wyznaczonej metodą krzywej wypełniającej jest nie dłuższa w badanym zakresie niż

$$h_{sr} \leq 0.4\sqrt{d+6} \cdot n^{(d-1)/d},$$

Nie przeprowadzono badań dla  $d = 2$ , ponieważ odpowiednie wyniki można znaleźć w pracach [2], [9]. Otrzymana przez autorów tych prac wartość średnia (dla rozkładu równomiernego) nie przekraczała  $0.956\sqrt{n}$ .

#### 4. Dodatek

Poniżej zamieszczono program napisany w Mathematicie, który służy do wyznaczania położenia punktu z wielowymiarowej kostki na krzywej wypełniającej. Funkcja Kodm przypisuje każdemu punktowi z kostki  $I_d$  liczbę z przedziału  $[0, 1]$ . Argumentami funkcji są:  $d$  - wymiar przestrzeni (liczba naturalna),  $k$  - liczba naturalna określająca dokładność (długość dwójkowego rozwinięcia współrzędnych punktu),  $x\_List$  - współrzędne punktu przedstawione w postaci listy o długości  $d$ .

```
Kodm[d_,k_,x_List]:=
Block[{xx,beta,bd,cd,ii,jj,KM,km,kb,be},
bd=1;
xx=x;
beta={};
KM={};
Do[bd=2^ii-bd+1,{ii,d-1}];
cd=bd*2^(-d);
tt=1-cd;
(* dla kazdego x wyznaczamy be 0lub 1 w zaleznosci,czy x,0.5 czy nie *)
Do[ (* k razy *)beta={};
Do[xi=xx[[ii]]];
```



```

If[xi<1/2, be=0, be=1];
AppendTo[beta, be];
xx[[ii]]=(xi-1/2)/(be-1/2),
      {ii, d}}];
(* teraz wyznaczamy numer odwzorowania kb *)
ww=0; kb=0;
Do[be=beta[[d-ii+1]];
   If[be+ww==1, kb=kb+2^(d-ii),];
   ww=Abs[be-ww], {ii, d}];
If[kb==2^d, kb=0,];
AppendTo[KM, kb]
      , {jj, k}];
Do[ kb=KM[[k-jj+1]];
   tt=(cd+(kb-1)+tt)/2^d;
   If[tt<0, tt=1+tt,];
      , {jj, k}];
tt])

```

## LITERATURA

- [1] Barnsley M. , Fractals Everywhere. Academic Press, Inc. New York 1988.
- [2] Bartholdi J.J., Platzman L.K. , Heuristics based on spacefilling curves for combinatorial problems in Euclidean space, Management Sci. Vol.34 (1988), pp.291-305.
- [3] Bertsimas D., Grigni M., Worstcase Examples for the Spacefilling Curve Heuristic for the Euclidean Traveling Salesman Problem Vol.8(1989) s.241-244.
- [4] Dugundji J., Topology, Allyn and Bacon, Boston, MA 1970.
- [5] Gilbert W.J., A Cube-filling Hilbert Curve , The Mathematical Intelligencer Vol.6 (1984), pp 78.
- [6] Gilbert E.N. , Gray codes and Paths on the n-cube. Bell System Tech. J. Vol.37 (1957) pp. 815-826.
- [7] Karp R.M., Steele J.M., Probabilistic analysis of heuristics, in The Traveling Salesmen Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization, ed. by E.L. Lawler J.K. Lenstra, A.G.H. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, 1985 John Wiley and Sons Ltd., Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.

- [8] Milne S.C., Peano Curves and Smoothness of Functions, Advances in Mathematics Vol.35 (1980), pp.129-157.
- [9] Platzman L.K., Bartholdi J.J., Spacefilling Curves and the Planar Traveling Salesman Problem, Journal of ACM , Vol.36 (1989) pp. 719-737.
- [10] Steele J.M., Snyder T.L., Worst-Case Growth Rates of Some Classical Problems of Combinatorial Optimization, SIAM J. Computing Vol.18 (1989) nr 2 s.278-287.
- [11] Steele J.M., Efficacy of Spacefilling Heuristics in Euclidean Combinatorial Optimization, Operations Res. Letters Vol.8 (1989) s.237-239.
- [12] Steele J.M., Probabilistic and Worst Case Analysis of Classical Problems of Combinatorial Optimization in Euclidean Space, Mathematics of Operations Research, Vol.15 (1990), nr 4 s.749-770.
- [13] Skubalska-Rafajłowicz E., Krzywa typu Sierpińskiego wypełniająca d-wymiarową kostkę, Prace ICT 1993.

Recenzent: Prof.dr inż. Henryk Kowalowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

#### Abstract

The aim of the paper is to formulate a heuristic algorithm for Travelling Salesman Problem solution in multidimensional Euclidean space. The algorithm uses properties of a spacefilling curve, which fills d-dimensional cube. The curve is d-dimensional generalization of two-dimensional Sierpiński spacefilling curve. The construction of the curve is based on the existence of a continuous mapping  $F_d$  from the unit interval  $I_1 = [0, 1]$  onto the d-dimensional cube  $I_d = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ . The transformation is Lebesgue measure preserving and is Lipschitzian of order  $\frac{1}{d}$ . This means that it fills homogeneously the space and it preserves nearness. Points which are close together in the unit interval are mapped onto points close together in the cube. Bartholdi and Platzman have shown how one can build heuristics for ETSP in the plane based on the Sierpiński spacefilling curve. The idea of the spacefilling heuristic for ETSP consists in ordering points as they appear along a spacefilling curve. Some numerical experiments are reported.