ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.115 Nr kol. 1251

Jan KAŁUSKI
Politechnika Śląska

ZASTOSOWANIE PROCESÓW MARKOWA DO OCENY NIEKTÓRYCH PARAMETRÓW SYSTEMU LINII MONTAŻOWYCH Z MAGAZYNEM

Streszczenie. W pracy rozważany jest dyskretny proces przemysłowy w postaci systemu dwóch linii montażowych z magazynem dla półproduktów. Przedstawiono model matematyczny takiego procesu jako łańcuch Markowa z czasem dyskretnym z przeliczalną liczbą stanów. Wprowadzono pewną klasę ciągłych procesów Markowa, zwanych procesami dyfuzyjnymi i pokazano, w jaki sposób za pomocą tych procesów można oceniać liczbę półproduktów w magazynie znajdującym się między wejściowymi i wyjściowymi liniami montażowymi.

MARKOV PROCESSES APPLICATION FOR ESTIMATION OF SOME PARAMETERS OF ASSEMBLY LINES SYSTEM WITH A STORE

Summary. In the paper an industrial discrete process which includes a system of two assembly lines with a store for semi-products is discussed. A mathematical model in the form of a discrete Markov chain with countable number of states is presented. A class of continuous Markov processes called diffusion processes is proposed and the way of using these processes for estimating a number of semi-products in the store placed between input and output assembly lines is explained.

DIE ANWENDUNG DER MARKOFF-PROZESSEN FÜR DIE BEWERTUNG MANCHER PARAMETERN DES SYSTEMS DER MONTAGELINIEN MIT DEM LAGER

Zusammenfassung: In der Arbeit wird einen diskreten Industrieprozeß in Gestalt von dem System der zwei Montagelinien mit dem Lager für die Halbfabrikaten untersucht. Es wird ein mathematisches Modell als Markoff-Kette mit der diskreten Zeit und mit der umrechbaren Zahl der Zustände vorgestellt. Eine Klasse der kontinuierlichen Markoff-Ketten, so genannten Diffusionsprozessen, wird eingeführt. Es wird mit Hilfe diesen Prozessen gezeigt, wie man die Zahl der Halbfabrikaten im Lager zwischen Eingangs- und Ausgangsmontagelinien bewerten kann.

1. Wprowadzenie

Dyskretne procesy przemysłowe charakteryzują się tym, że jako kompleksy operacji w czasie i przestrzeni, z warunkiem niepodzielności wykonywania pojedynczych operacji, z natury swej opisywane są dyskretnymi modelami matematycznymi w postaci logicznie określonych relacji matematycznych między parametrami operacji i parametrami stanowisk roboczych (obróbczych, montażowych, transportowych lub wszystkich jednocześnie) w dyskretnych chwilach czasu. Powoduje to, że jakikolwiek proces dyskretny jest "rozpisany" z

dokładnością do pojedynczych operacji różnego typu i z dokładnością czasową do określonego odcinka czasu, zwanego cyklem.

Inną ważną cechą dyskretnego procesu przemysłowego jest masowy charakter jednorodnych wyrobów, będących wynikiem określonego procesu technologicznego.

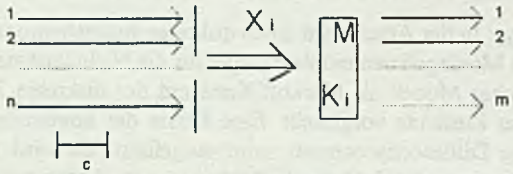
Właśnie duża liczba jednorodnych wyrobów gotowych lub półproduktów pozwala w niektórych przypadkach na opis dyskretnych procesów przemysłowych w postaci dyskretnych lub ciągłych w czasie modeli matematycznych. Jedną z możliwości takiego opisu jest stosowanie dyskretnych procesów Markowa ze skończoną lub przeliczalną liczbą stanów lub ciągłych procesów Markowa dyfuzyjnego typu w celu probabilistycznej oceny niektórych parametrów procesów produkcyjnych.

W związku z powyższym w punkcie 2 pracy przedstawiono dyskretny łańcuch Markowa z przeliczalną liczbą stanów jako model liczby półproduktów w magazynie między dwoma systemami linii montażowych. W punkcie 3 wprowadzono ciągłe procesy Markowa dyfuzyjnego typu. Podano definicje i twierdzenia niezbędne w dalszej części pracy. W punkcie 4 przeprowadzono aproksymację dyfuzyjną liczby półproduktów w magazynie. Punkt 5 pracy zawiera uwagi końcowe.

Niniejsza praca jest częściowo kontynuacją pracy [4].

2. Dyskretny łańcuch Markowa jako model liczby półproduktów w magazynie

Rozważmy układ systemu dwóch linii montażowych z magazynem na półprodukty między nimi jak na rys. 1.



Rys. 1. Układ linii montażowych z magazynem
Fig. 1. System of assembly lines with a store

W układzie tym n-jednakowych linii montażowych dostarcza synchronicznie co okres c, równy cyklowi linii, pewną liczbę X półproduktów, gromadzonych następnie w magazynie **M** o niegraniczonej pojemności. Można więc powiedzieć, że w chwili $t = c \cdot i$, $i \geq 0$ schodzi X_i dobrze zmontowanych wyrobów. Z magazynu **M** z tym samym cyklem czasowym c, pobierane są $m < n$ półprodukty do dalszego montażu na m liniach. X_i jest zmienną losową, zależną od usterkowości na n liniach montażowych i ich niezawodności. Nietrudno zauważyć, że X_i jest zmienną losową dyskretną o wartościach z przedziału [0, n],tzn.

$$P\{X_i = k\} = p_k, \quad k = 0,1,2,\ldots,n \tag{1}$$

Jest jasne, że po okresie czasu $t = i \cdot c, i \geq 0$, w zależności od parametrów systemu linii n, m, c oraz X_i, liczba K_i pozostających w magazynie półproduktów jest również zmienną losową i dla $i \geq 0$ może przybierać dowolne wartości, $K_i = 0,1,2,\ldots$. Z rys.1 widać, że dla K_i zachodzi następująca rekurencyjna zależność:

$$K_{i+1} = \max\{K_i + X_{i+1} - m, 0\} \tag{2}$$

Zakładając, że proces powstawania usterek oraz niezawodność jednej linii jest niezależna od usterek i niezawodności pozostałych linii montażowych,można pokazać, że ciąg $\{X_i\}, i \geq 0$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Wynika z tego, że z kolei ciąg $\{K_i\}, i \geq 0$ jest dyskretnym łańcuchem Markowa z przeliczalną liczbą stanów.

Na podstawie zależności (2) i nieskomplikowanych rozważań można pokazać, że jednokrokowa stochastyczna macierz prawdopodobieństw przejść takiego łańcucha dla określonych m, n, ($m < n$) oraz r,s=0,1,2,... ma postać

$$P^{m,n} = \left[p_{r,s}^{m,n}\right] = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{m} P_k & P_{m+1} & P_{m+2} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \sum_{k=0}^{m-1} P_k & P_m & P_{m+1} & P_{m+2} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{k=0}^{1} P_k & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot & P_{m-1} & P_m & P_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ P_0 & P_1 & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot & P_{m-1} & P_m & P_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot & P_{m-1} & P_m & P_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & \cdot & \cdot & \cdot & P_{m-1} & P_m & P_{m+1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{n-1} & P_n & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{3}$$

Jest to, jak widać, nieskończona macierz typu pasmowego o szerokości pasma wynoszącej n+1 elementów. W danej macierzy liczba elementów różnych od zera w pierwszych m+1 wierszach zmienia się od n-m+1 w zerowym wierszu, do n+1 elementów w m+1 wierszu. W następnych wierszach macierzy liczba elementów w wierszach jest stała i wynosi n+1. Są to kolejne wartości prawdopodobieństw przejść P_k, k=0,1,...,n.

W pracy [6], analizując podobny układ linii montażowych i przyjmując, że rozkład prawdopodobieństw $\{P_k\}$ jest rozkładem Bernoulliego o parametrach np i $np(1-p)$, gdzie p jest prawdopodobieństwem poprawnego montażu na każdej z n linii pokazano, że istnieje stacjonarny rozkład prawdopodobieństw łańcucha $\{K_i\}$, $i \geq 0$ dla dwóch przypadków:

1) gdy $m = 1, p < 1/n$ oraz 2) gdy $m = 1$, $p < 2/3$.

Wykazano tam również, że gdy 1) $p \to 1/n$ i 2) $p \to 2/3$, graniczna wartość oczekiwana liczby półproduktów w magazynie dąży do nieskończoności.

Nieznane są, jak na razie autorowi prace, gdzie wykazano by, że te dwa szczególne przypadki można uogólnić na dowolne m i n oraz $p < m/n$, gdy rozkładem zmiennej losowej X_i jest rozkład Bernoulliego lub inny rozkład.

W dalszej części pracy skoncentrujemy się nad aproksymacją dyfuzyjną wspomnianego problemu, tzn. aproksymacją z zastosowaniem ciągłych procesów Markowa dyfuzyjnego typu, i pokażemy w jaki sposób za pomocą tych procesów można ocenić liczbę K_i zapasów półproduktów w magazynie dla dowolnych $m,n>0$, ($m < n$).

3. Ciągłe procesy Markowa dyfuzyjnego typu

Całkiem ogólnie procesem dyfuzyjnym nazywamy pewną markowską rodzinę procesów losowych . Mówiąc niedokładnie dyfuzyjne procesy są to takie markowskie rodziny, których infinitezymalne operatory są operatorami różniczkowymi. Mówiąc dokładniej - są to takie markowskie rodziny, których trajektorie są ciągłymi funkcjami czasu.

Przy niedokładnej definicji procesu dyfuzyjnego mieliśmy na uwadze to, że nawet dla procesów wienerowskich w R^d, ($d > 1$) infinitezymalny operator niezupełnie pokrywa się z operatorem $\frac{1}{2}\Delta$, - operatorem Laplace`a.

Opisową nazwę "procesy dyfuzyjne" tłumaczy się tym, że są one modelami matematycznymi ruchu oddzielnej cząstki w procesie dyfuzji i w szeregu innych podobnych do dyfuzyjnych procesach.

Zwróćmy uwagę jeszcze na fakt, że ilościowo procesy dyfuzyjne opisywane są za pomocą równań różniczkowych cząstkowych oraz że trajektorie rzeczywistych cząstek fizycznych są w naturalny sposób ciągłe.

Dyfuzyjny proces charakteryzuje się dwoma parametrami: tzw. lokalną wartością oczekiwaną i lokalnymi kowariancjami (w jednowymiarowym przypadku - lokalnymi wariancjami). W zwykłym sensie rozumianej wartości oczekiwanej ani też wariancji ten proces nie ma.

W literaturze przyjmowane są różne nazwy dla wspomnianych parametrów; współczynnik przenoszenia lub dryf dla lokalnej wartości oczekiwanej oraz macierz dyfuzji w przypadku wielowymiarowym lub współczynnik dyfuzji w przypadku jednowymiarowym dla lokalnych kowariancji lub wariancji. Nazwy te związane są z fizyczną interpretacją procesów dyfuzyjnych.

Zauważmy jeszcze, że ruch Browna w jednorodnym izotropowym ośrodku, gdy na cząstkę nie działają żadne inne poboczne siły oprócz uderzeń molekuł, jest jednorodnym symetrycznym ruchem Browna, zwanym procesem Wienera.

Obecnie podamy dokładną definicję procesu dyfuzyjnego (zob. np [8] s.208).

Niech dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, β, P) oraz przestrzeń fazowa (mierzalna) (R^d, F^d).

Definicja 1. Markowską rodzinę (X_t, P_x) na przestrzeni fazowej (R^d, F^d) nazywamy procesem dyfuzyjnym w R^d, jeżeli:

1) infinitezymalny operator A tego procesu określony jest na ograniczonych ciągłych podwójnie różniczkowalnych funkcjach oraz istnieje ciągła funkcja wektorowa $(b^i(x))$ i macierzowa $(a^{ij}(x))$ (macierz $(a^{ij}(x))$ dla dowolnych x jest symetryczna i dodatnio określona) taka, że dla $f \in L_2^{ogr.}$

$$Af(x) = Lf(x) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}. \tag{4}$$

2) wszystkie trajektorie tego procesu są ciągłe.

Różniczkowy liniowy operator L postaci (4) nazywa się operatorem tworzącym procesu dyfuzyjnego.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali tylko jednowymiarowy proces dyfuzyjny, dla którego operator tworzący ma postać

$$Lf(x) = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x}. \tag{5}$$

Niech teraz $f(x) = f(t, x, y)$ jest warunkową gęstością prawdopodobieństwa przejścia procesu $\{X_t\}, t \geq 0$. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$, t i x spełnione są następujące zależności

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(|X_{t+\Delta t} - X_t| \geq \varepsilon / X_t = x) = 0. \tag{6}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y - x) f(t, x, t + \Delta t, y) dy = b(x, t). \tag{7}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|<\varepsilon} (y - x)^2 f(t, x, t + \Delta t, y) dy = a(x, t). \tag{8}$$

Oczywiście, parametry $b(x,t)$ i $a(x,t)$ są odpowiednio współczynnikiem przenoszenia i współczynnikiem dyfuzji jednowymiarowego procesu dyfuzyjnego.

Można pokazać, że funkcja $f(x,t)$ jest fundamentalnym rozwiązaniem równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych typu parabolicznego postaci

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}a(x,t)\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}. \tag{9}$$

a więc

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = Lf(x,t). \tag{10}$$

W dalszych rozważaniach będzie nam potrzebne pojęcie tzw. funkcji próbnych lub podstawowych.

Definicja 2. (zob. np [7], s.35). Klasę $\mathfrak{N}$ wszystkich nieskończenie różniczkowalnych funkcji rzeczywistych $\varphi(x)$ takich, że dla dowolnych $n \geq 0$ i $N>0$

$$|x|\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n} \to 0, gdy\ |x| \to \infty, \tag{11}$$

nazywa się klasą funkcji próbnych lub podstawowych. Dla

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t}), t>0, x<+\infty; u(t,x) \to \delta(x), \quad t \to 0, \tag{12}$$

słuszna jest następująca relacja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)u(x,t)dx \to \varphi(0), \quad t \to 0 \tag{13}$$

4. Aproksymacja dyfuzyjna liczby półproduktów w magazynie

Zobaczmy teraz jakim dyfuzyjnym procesem można aproksymować liczbę K_i półproduktów w magazynie.

Niech intensywności wzrostu i ubywania zapasu w magazynie (średnia liczba wzrostu i ubywania zapasu w jednostce czasu w przeliczeniu na jednostkę zapasu) zależą od ogólnej liczby $K(t)$ półproduktów w magazynie (od tej liczby zależy, czy wystarczy półproduktów w magazynie na zasilanie m wyjściowych linii) i wynoszą odpowiednio $\lambda(k)$ oraz $\mu(k)$. Dla małego przedziału czasu można założyć, że $K(t) \cong k$. Stąd λ i μ są w przybliżeniu również stałe i nie zależą od czasu. W naszym przypadku $\mu(k)$ jest również niezależne od k tzn. $\mu(k)=m$, gdyż jest to stała intensywność zmniejszania się zbioru półproduktów w magazynie w każdym cyklu.

Aby aproksymacja była bliska rzeczywistości należy założyć, że liczba wzrostu zapasu w krótkim okresie czasu, w okresie jednego cyklu, podlegała rozkładowi Poissone'a z parametrami $k\lambda(k)$ (w procesie Poissone'a - λt).

Obliczmy wartość oczekiwaną $E_k[K(t)-k]$ oraz wariancję $V_k[K(t)-k]$ zmiennej losowej ($K(t)-k$). Biorąc pod uwagę, że $K(t)$ ma rozkład Poissone`a o wartości oczekiwanej $k\lambda(k)$ i takiej samej wariancji oraz że $k \cong mt$ dla $t=ic$, $i \geq 0$ otrzymamy

$$E_k[K(t)-k] \cong [k\lambda(k)-m]\cdot t, \tag{14}$$

oraz

$$V_k[K(t)-k] \equiv V_k[K(t)] = k\lambda(k)\cdot t. \tag{15}$$

Otrzymujemy więc, że współczynnik przenoszenia zbudowanego procesu dyfuzyjnego wynosi

$$b(k)=k\lambda(k) - m \tag{16}$$

oraz współczynnik dyfuzji tego procesu

$$a(k)=k\lambda(k) \tag{17}$$

Odpowiedni operator różniczkowy L omawianego procesu dyfuzyjnego ma więc postać

$$Lf(k) = \frac{1}{2}k\lambda(k)\frac{\partial^2 f(k)}{\partial k^2} + [k\lambda(k) - m]\frac{\partial f(k)}{\partial k}. \tag{18}$$

Wprowadźmy obecnie funkcję $f(k) = P_m(t,k,s,r) = P_m(K_t = k / K_s = r)$, wyrażającą prawdopodobieństwo przejścia procesu Markowa z czasem ciągłym ze stanu $K_s = r$ w chwili s do stanu $K_t = k$ w chwili t, $t>s$, przy ustalonym m.

Można pokazać, że prawdopodobieństwo to wyznacza się jako rozwiązanie zagadnienia brzegowego Couchy'ego

$$\frac{\partial P_m(t,k)}{\partial t} = LP_m(t,k) \tag{19}$$

dla warunków początkowych $P_m(0,k) = 1$ dla $k \le 0$ oraz $k > m$.

Równanie dyfuzji, wiążące liczbę K półproduktów w magazynie dla systemu linii montażowych, ma więc postać

$$\frac{\partial P_m(t,k)}{\partial t} = \frac{1}{2}k\lambda(k)\frac{\partial^2 P_m(t,k)}{\partial k^2} + [k\lambda(k) - m]\frac{\partial P_m(t,k)}{\partial k}. \tag{20}$$

Będziemy rozważali dalej trzy szczegółowe przypadki:
1) $k\lambda(k) = m$, $m=1$; 2) $k\lambda(k) = m$, $m > 1$ oraz 3) $k\lambda(k) \neq m$, $m > 1$.

W pierwszym przypadku równanie (20) sprowadza się wprost do równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial P(t,k)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(t,k)}{\partial k^2}, \quad t > 0, \quad k < +\infty \tag{21}$$

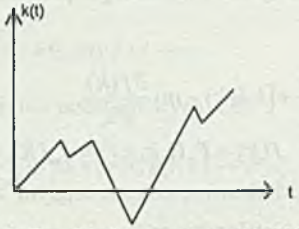
oraz P(0,k)=φ(k).

Rozwiązaniem równania (21) , jak wiadomo jest całka

$$P(t,k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(k-r)^2 / 2t)\varphi(r)dr, \tag{22}$$

gdzie φ jest poprzednio zdefiniowaną funkcją próbną.

Wróćmy obecnie do punktu 2 niniejszej pracy. Opisany tam łańcuch Markowa $\{K_i\}$, $i \geq o$ jest niczym innym, jak błądzeniem przypadkowym na płaszczyźnie. Niech w związku z tym $K_i(t)$ będzie łamaną na płaszczyźnie (k,t), jak na rys.2, przechodzącą przez punkt $(K\tau/\sqrt{i}, \tau/i)$, gdzie τ - dowolna ustalona chwila, w której ruch zaczyna się od nowa (jest to właściwość procesu Markowa).



Rys.2. Przykładowa zależność K(t)
Fig. 2. Example for relation K(t)

Można pokazać, że rozkład prawdopodobieństwa standaryzowanego błądzenia przypadkowego $\{K_i\}$ jest zbieżny do rozkładu ruchu Browna przy $i \to \infty$, który jest szczególnym przypadkiem procesu dyfuzyjnego.

Niech dla $K_0, (i = 0)$ wartość oczekiwana $E(K_0) = \kappa$. Wówczas (zob.np [7] s.66) dla $\kappa = 0$, $\tau = i$ zachodzi następująca relacja

$$E_0 f(\frac{K_i}{\sqrt{i}}) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{k^2}{2}) \varphi(k) dk. \tag{23}$$

Stąd na podstawie centralnego twierdzenia granicznego Chinczyna możemy napisać, że

$$P_0(k_1 \leq \frac{K_i}{\sqrt{i}} \langle k_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_2}^{k_1} \exp(-\frac{k^2}{2}) dk, \quad i \to \infty. \tag{24}$$

Biorąc pod uwagę (22) otrzymujemy

$$E_\kappa f(\frac{K_\tau}{\sqrt{i}}) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-{(k-r)^2}/{2t}) \varphi(r) dr, \tag{25}$$

gdy $\kappa/\sqrt{i} \to k$, $\tau/i \to t$, $i \to \infty$ dla wszystkich funkcji próbnych φ.

Oznacza to ostatecznie, że

$$P_\kappa(k_1 \le \frac{K_\tau}{\sqrt{i}} \langle k_2) = P_k(k_1 \le K_i(t) \langle k_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{k_1}^{k_2} \exp(-{(k-r)^2}/{2t}) dr \qquad (26)$$

gdzie $\kappa = [k \cdot \sqrt{i}]$, $\tau = [i \cdot t]$, $K_i = {K_\tau}/{\sqrt{i}}$, $i \to \infty$, $k_1, k_2 \langle +\infty$.

Przeprowadzone rozważania dotyczyły aproksymacji dyfuzyjnej błądzenia przypadkowego, modelującego w punkcie 2 niniejszej pracy liczbę K_i zapasu półproduktów w magazynie. Przypadek ten jednak nie uwzględnia, że $K_i \ge 0$ dla $i \ge 0$.

Rozpatrzmy w związku z tym ponownie proces dyfuzyjny na półosi $k \ge 0$ z odbiciem w zerze.

Jeżeli prawdopodobieństwo przejścia $P_1(k,t)$ dla $m = 1$ spełniało równanie (21), to gęstość tego prawdopodobieństwa, oznaczmy ją przez $g(k,t)$, winna spełniać podobne równanie przewodnictwa cieplnego postaci

$$\frac{\partial g(k,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(k,t)}{\partial k^2}, \quad k \rangle 0, \qquad (27)$$

gdzie

$$P(k,s,B,t) = \int_B g(k,s,r,t) dr, \quad r \in B \qquad (28)$$

dla warunków początkowo-brzegowych

$$\frac{\partial g(k,t)}{\partial k} /_{k=0} = 0, \; g(k,s,r,t) \to \delta(k-r), \quad gdy \; t \downarrow 0, \; k,r \langle +\infty.$$

Rozwiązaniem (27) jest gęstość (zob.np [3] s.89)

$$g(k,s,r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp(-{(k-r)^2}/{2t}) + \exp(-{(k+r)^2}/{2t}) \right]. \qquad (29)$$

Jest to gęstość prawdopodobieństwa przejścia procesu $\{K_t\}$, $t \ge o$ ze stanu $K_s = r$ w chwili s do stanu $K_t = k$ w chwili t z ekranem odbijającym w zerze.

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy $k\lambda(k) = m$, $m > 1$.

Równanie (27) zgodnie z równaniem (20) przyjmuje wówczas następującą postać:

$$\frac{\partial g_m(t,k)}{\partial t} = \frac{1}{2} m \frac{\partial^2 g_m(t,k)}{\partial k^2}. \qquad (30)$$

Wiadomo (zob.np [1] s.53 zadanie 77 i s.337 - rozwiązanie), że powyższe zagadnienie brzegowe z warunkami brzegowo-początkowymi jak poprzednio, w ogólnej postaci ma formę

$$\frac{\partial g}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial k^2}. \tag{31}$$

Rozwiązaniem (31) jest następująca gęstość

$$g(x,t,r) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\exp(-\frac{(x-r)^2}{4a^2 t} + \exp(-\frac{(x+r)^2}{4a^2 t})\right]. \tag{32}$$

Rozwiązaniem równania (30) jest więc gęstość

$$g_m(k,t,r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t m}}\left[\exp(-\frac{(k-r)^2}{2mt}) + \exp(-\frac{(k+r)^2}{2mt}\right], \quad k\langle 0, \quad r\langle +\infty \tag{33}$$

dla $a^2 = \frac{1}{2}m$.

Na koniec już bez szczegółowych objaśnień zauważmy, że gdy $k\lambda(k) \neq m$, z równania (20) dla gęstości $g_{m,\lambda}(k,t)$ można napisać

$$g_{m,\lambda}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t k\lambda(k)}}\left\{\exp\left[-\frac{(k-k\lambda(k)+m)^2}{2k\lambda(k)t}\right] + \exp\left[-\frac{(k+k\lambda(k)-m)^2}{2k\lambda(k)t}\right]\right\}. \tag{34}$$

Prawdopodobieństwo, że $(k_1 \le K_i(t) < k_2)$, $k_1, k_2 > 0$ można zatem obliczyć z zależności

$$P_{m,\lambda}(k_1 \le K_i(t)\langle k_2) = \int_{k_1}^{k_2} g_{m,\lambda}(k,t)dk. \tag{35}$$

Wprowadzając funkcję Laplace'a w postaci

$$\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{36}$$

otrzymamy obliczeniowy wzór dla $P_{m,\lambda}(\cdot)$

$$P_{m,\lambda}(k_1 \le K_i(t)\langle k_2) = [\Phi_{12}(u_{12}) - \Phi_{11}(u_{11})] + [\Phi_{22}(u_{22}) - \Phi_{21}(u_{21})], \tag{37}$$

gdzie

$$u_{11} = \frac{k_1 - k\lambda(k) + m}{\sqrt{k\lambda(k)t}} \tag{38}$$

$$u_{12} = \frac{k_2 - k\lambda(k) + m}{\sqrt{k\lambda(k)t}} \tag{39}$$

$$u_{21} = \frac{k_1 + k\lambda(k) - m}{\sqrt{k\lambda(k)t}} \tag{40}$$

$$u_{22} = \frac{k_2 + k\lambda(k) - m}{\sqrt{k\lambda(k)t}} \tag{41}$$

Niech dalej dane jest prawdopodobieństwo p poprawnego montażu na każdej z n linii i niech $p>>1/2$. Wówczas, odwracając zagadnienie aproksymacji rozkładu Bernoulliego dla dużych m i n rozkładem normalnym, a więc w rozkładzie normalnym parametry tego rozkładu zastępujemy parametrami rozkładu Bernoulliego, otrzymujemy

$$k\lambda(k) = np(1-p) \tag{42}$$

$$k\lambda(k) - m = np \tag{43}$$

a biorąc pod uwagę (42), (43) otrzymuje postać

$$np = -m/p\ , \tag{44}$$

gdzie jak wiadomo, np jest wartością oczekiwaną, a $np(1-p)$ wariancją rozkładu Bernoulliego.

Wobec tego wzory (38)-(41) przyjmują postać

$$u_{11} = \frac{k_1 p + m}{\sqrt{np^3(1-p)t}} \tag{45}$$

$$u_{12} = \frac{k_2 p + m}{\sqrt{np^3(1-p)t}} \tag{46}$$

$$u_{21} = \frac{k_1 p - m}{\sqrt{np^3(1-p)t}} \tag{47}$$

$$u_{22} = \frac{k_2 p - m}{\sqrt{np^3(1-p)t}} \tag{48}$$

Na zakończenie rozpatrzmy jeszcze przypadek, gdy $p=m/n$. Wówczas otrzymamy

$$u_{11} = \frac{k_1 + n}{\sqrt{m(1-m/n)t}} \tag{49}$$

$$u_{12} = \frac{k_2 + n}{\sqrt{m(1-m/n)t}} \tag{50}$$

$$u_{21} = \frac{k_1 - n}{\sqrt{m(1-m/n)t}} \tag{51}$$

$$u_{22} = \frac{k_2 - n}{\sqrt{m(1 - m/n)t}} \tag{52}$$

Interesujące może być również obliczenie prawdopodobieństw $P_{m,\lambda}(K_t \le m)$ lub $P_{m,\lambda}(K_t \rangle m)$. Na podstawie powyższych wzorów można już łatwo wyprowadzić zależności dla tych prawdopodobieństw. Należy jeszcze zauważyć, że podstawiając w odpowiednich wzorach $t=i.c$, $i \ge 0$ otrzymamy wzory końcowe dla obliczeń różnych prawdopodobieństw liczby półwyrobów K_t w magazynie.

5. Uwagi końcowe

Pierwsza aproksymacja dyfuzyjna w łańcuchach Markowa pochodzi od Fokkera i Plancka. Otrzymali oni równanie dla gęstości przejść procesu dyfuzyjnego, opisującego rozwój gęstości systemu cząstek w przestrzeni fazowej, z losowymi zderzeniami tych cząstek. Ścisłego matematycznego sformułowania i uzasadnienia problemu aproksymacji dyfuzyjnej dokonał A.N. Kołmogorow. Podał on tzw. równania retrospektywne i prospektywne dla gęstości przejść. Od tego czasu aproksymacja dyfuzyjna znalazła wiele różnych zastosowań w dziedzinach wydawałoby się bardzo odległych od procesów dyfuzyjnych; w szczególności procesy te występują jako graniczne dla dyskretnych modeli opisujących różne biologiczne zjawiska, takie jak zmiana liczby osobników jakiegoś gatunku lub koncentracji genu w populacji.

Najnowsze prace, jakie ukazały się ostatnio na temat zastosowań aproksymacji dyfuzyjnej, dotyczą modelowania zmian dokładności przyrządów pomiarowych [5] oraz pracy systemów komputerowych [2]. Ninejsza praca jest próbą takiej aproksymacji w dziedzinie dyskretnych procesów przemysłowych.

LITERATURA

[1] Budak B.M., Samarski A.A., Tichonow A.N.: Zadania i problemy fizyki matematycznej.PWN,Warszawa 1965.

[2] Czachórski T.: Procesy powrotów elementarnych w doskonaleniu aproksymacji dyfuzyjnej jako metody modelowania pracy systemów komputerowych.ZN Politechniki Śląskiej, seria Informatyka, z.9, Gliwice 1987.

[3] Dynkin F.B., Juszkiewicz A.A.: Twierdzenia i problemy procesów Markowa. PWN, Warszawa 1970.

[4] Kałuski J.: Procesy Markowa w sterowaniu dyskretnych procesów przemysłowych. ZN Politechniki Śląskiej, seria: Automatyka, z.108, Gliwice 1994.

[5] Kałuski J.: Zastosowanie równań Fokkera-Plancka-Kołmogorowa do wyznaczania niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych.ZN Politechniki Śląskiej, seria: Automatyka z.81, Gliwice 1986.

[6] Kimmel M.: Zastosowanie teorii procesów Markowa do badania granicznych procesów dyskretnych. ZN Politechniki Śląskiej, seria: Automatyka, z.63, Gliwice 1982.

[7] Schuss Z.: Teoria i zastosowania stochastycznych równań różniczkowych. PWN, Warszwa 1989.

[8] Wentzel A.D.: Kurs teorii sluczajnych processow. Izdat."Nauka", Moskwa 1975.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. Józef Korbicz

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

In the paper a diffusion approximation in industrial discrete processes is discussed. The industrial discrete processes are characterized by a large number or homogeneous details which result from a specified technological process. Therefore, it is possible to approximate the discrete processes by continuous or discrete mathematical models. If the parameters of the industrial discrete processes are random, it is possible to use discrete or continuous random Markov processes.

We consider an industrial discrete process which includes a system of two assembly lines with a semi-products store placed between the lines. The number of semi-products in the store during each cycle-time depends on the random parameters of input and output lines.

In the paper only the randomness of the input lines is considered. The output of the system is deterministic and its intensity is constant.

Under the conditions mentioned above a mathematical model of discrete process in the form of a Markov chain in discrete time with a countable number of states is presented. A certain class of continuous Markov process, called diffusion process, is used and the way of using the model to estimate a number of semi-products in the store is described. For the diffusion process which approximates the change of a number of details in the store the Fokker-Planck equation is constructed. Three cases of dependencies between the parameters in the assembly lines are discussed.

Computational times for finding a number of semi-products in the store in function of cycle-time with definite probability are given.

The final results can be used to control the industrial discrete procesess.