ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1994
Seria: AUTOMATYKA z.115 Nr kol. 1251

Tadeusz SAWIK
Akademia Górniczo-Hutnicza

MODELE ZADAŃ RÓWNOWAŻENIA OBCIĄŻEŃ MASZYN W ELASTYCZNYCH SYSTEMACH MONTAŻOWYCH[1]

Streszczenie: W pracy przedstawiono modele programowania całkowitoliczbowego dla problemu równoważenia obciążeń maszyn w elastycznym systemie montażowym. Zastosowania proponowanych modeli ilustrują przykłady liczbowe.

INTEGER PROGRAMS FOR DESIGN AND BALANCING OF FLEXIBLE ASSEMBLY SYSTEMS

Summary: The paper presents several integer programming formulations for the design and balancing of flexible assembly systems. Numerical examples are presented to illustrate applications of the various models proposed.

MODELES POUR EQUILIBRAGE LES SYSTEMES DE ASSEMBLAGE FLEXIBLE

Resume: Nous preséntons les programmes linéaires à variables bivalentes pour allocation des pièces et équilibrage dans un système d'assemblage flexible. Des exemples présentés demontrent les applications des modèles proposès.

1. Wprowadzenie

Elastyczny system montażowy (ESM) jest ciągiem stacji montażowych połączonych przez zautomatyzowany system podawania i transportu materiałów, w którym jednocześnie mogą być montowane różne typy wyrobów. Każda stacja składa się z jednej lub kilku maszyn pracujących równolegle, zwykle robotów montażowych oraz urządzeń pomocniczych takich, jak zmieniacze palet, podajniki części składowych, magazynki chwytaków. Stacja dysponuje ograniczoną przestrzenią roboczą, w której można pomieścić ograniczoną liczbę różnych podajników części, co z kolei ogranicza liczbę możliwych do wykonania operacji montażowych.

Proces montażu przebiega następująco. Część bazowa montowanego wyrobu po zamocowaniu na palecie jest wprowadzana do systemu przez stację załadowczo/wyładowczą. Paleta wraz z częścią bazową przemieszcza się na transporterze lub wózku AGV odwiedzając kolejne stacje, na których do części bazowej montuje się kolejne elementy składowe. Po

[1] Praca była finansowana przez KBN, grant nr 681/S5/93/05.

zamontowaniu wszystkich elementów paleta wraca do stacji zaladowczo/wyladowczej i gotowy wyrób opuszcza system.

Najczęściej spotykanym typem elastycznego systemu montażowego jest tzw. elastyczna linia montażowa będąca jednokierunkowym systemem typu przepływowego, w którym część bazowa przechodzi kolejno przez stacje $1, 2, \ldots M$ aż do zakończenia montażu, omijając niektóre,ale nie powracając do stacji raz odwiedzanych.

W pracy przedstawiono modele programowania całkowitoliczbowego dla problemu obciążenia maszyn polegającego na wyznaczeniu takiego rozdziału części składowych pomiędzy stacje montażowe i przydziału do nich operacji montażowych, dla którego obciążenia wszystkich stacji zostaną zrównoważone (np. [2, 4]). Innym często stosowanym kryterium jest minimum przemieszczeń montowanych wyrobów pomiędzy stacjami. Jednak może ono z kolei prowadzić do nierównomiernego obciążenia maszyn.

W praktyce problem obciążenia maszyn w ESM łączy się często z problemem wyboru optymalnej konfiguracji systemu, polegającym na wyznaczeniu liczby i typów stacji montażowych wchodzących w skład systemu wraz z jednoczesnym przydziałem operacji. Taki problem rozwiązywany jest głównie w przypadku stabilnego asortymentu montowanych wyrobów, np. [3]. W pracy przedstawimy również modele dotyczące tego zadania.

W zależności od konfiguracji ESM, planu procesu montażu wyrobów i organizacji montażu, modele zadań obciążenia maszyn można podzielić na następujące klasy:

A. Modele bez alternatywnych marszrut montażu, w których każdy typ części jest przydzielany do tylko jednej maszyny.

   1. Modele dla elastycznych linii montażowych: jednokierunkowy przepływ wyrobów bez powrotów do odwiedzanych stacji.
   2. Modele dla ogólnych elastycznych systemów montażowych: przepływ wyrobów z możliwością wielokrotnego odwiedzania stacji.

B. Modele z alternatywnymi marszrutami montażu, w których dopuszcza się alternatywne przydziały części do maszyn.

   1. Modele dla elastycznych linii montażowych z maszynami równoległymi: jednokierunkowy przepływ wyrobów bez powrotów do odwiedzanych stacji.
   2. Modele dla ogólnych elastycznych systemów montażowych: przepływ wyrobów z możliwością wielokrotnego odwiedzania stacji.

C. Modele optymalizacji konfiguracji systemu z jednoczesnym równoważeniem obciążeń stacji w przypadku stabilnego asortymentu montowanych wyrobów.

W proponowanych modelach (z wyjątkiem modelu M3) przyjęto założenie, że ograniczenia kolejnościowe dla wszystkich typów montowanych wyrobów można reprezentować za pomocą jednego wspólnego grafu super-ograniczeń kolejnościowych,będącego połączeniem grafów ograniczeń kolejnościowych dla wszystkich typów wyrobów.

2. Optymalizacja obciążeń maszyn i przepływów międzyoperacyjnych

W ESM czasy wykonywania operacji montażowych na ogół są krótkie i porównywalne z czasami przemieszczania palety z wyrobem pomiędzy stacjami. W rezultacie każdy wózek

AGV jest przypisany do palety z montowanym przedmiotem od początku do końca procesu montażu, por. [5]. W celu osiągnięcia najlepszego wykorzystania maszyn, a w rezultacie najkrótszego czasu wykonania zadanego zbioru wyrobów, w ESM optymalne obciążenie maszyn powinno uwzględniać zarówno czasy montażu części,jak i czasy przemieszczania palet z wyrobami pomiędzy stacjami.

Poniżej przedstawiono trzy modele zadań obciążenia maszyn, których celem jest jednoczesna optymalizacja obciążeń stacji montażowych i przepływów pomiędzy nimi. Pierwsze dwa modele **M1** i **M2** dotyczą elastycznych linii montażowych, w których montowane wyroby nie wracają do wcześniej odwiedzanych stacji. W modelu **M1** każda stacja jest pojedynczą maszyną, zaś w modelu **M2** stacja może składać się z kilku maszyn pracujących równolegle. Model **M3** dotyczy ogólnego elastycznego systemu montażowego, w którym dopuszcza się powroty montowanych wyrobów do wcześniej odwiedzanych stacji. W modelach **M1** i **M2** ograniczenia kolejności montażu części składowych reprezentowane są przez jedno super-ograniczenie kolejnościowe wspólne dla wszystkich typów montowanych wyrobów, zaś w modelu **M3** wprowadza się indywidualne ograniczenia kolejnościowe dla każdego typu wyrobu.

Oznaczenia podstawowych parametrów i zmiennych występujących w proponowanych modelach zamieszczono w tablicy 1.

Model M1: *Równoważenie obciążeń stacji i minimalizacja przepływów międzystadialnych w elastycznej linii montażowej*

Zminimalizować

$$PQ_{max} = \alpha C_{max} + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{K} d_k y_{ik} \tag{1}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j\in J_k} d_k p_{jk} x_{ij} \le C_{max};\ \ \forall i \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1;\ \ \forall j \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \le s_i;\ \ \forall i \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{M} i x_{ij} \le \sum_{i=1}^{M} i x_{ir};\ \ \forall (j,r) \in R \tag{5}$$

$$y_{ik} \ge x_{ij};\ \ \forall i,k,j \in J_k \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\};\ \ \forall i,j \tag{7}$$

$$y_{ik} \in \{0,1\};\ \ \forall i,k \tag{8}$$

Funkcja celu PQ_{max} (1) zapewnia zrównoważenie obciążeń wszystkich stacji z uwzględnieniem łącznej liczby odwiedzin różnych stacji przez wszystkie montowane wyroby ($0 \le \alpha \le 1$ oznacza współczynnik wagi). Ograniczenie (2) wyznacza obciążenie C_{max} stacji będącej wąskim gardłem systemu. Ograniczenie (3) zapewnia przydział części każdego typu do tylko jednej stacji, zaś (4) uwzględnia ograniczoną liczbę podajników przy każdej stacji. Ograniczenie (5) zapewnia zachowanie kolejności montażu części składowych w jednokierunkowym systemie przepływowym bez powracania wyrobu do stacji wcześniej odwiedzanych. Jeżeli części typu r przydzielono do stacji i, to części każdego typu j, które

Tablica 1

Oznaczenia

		Indeksy
i	=	typ stacji montażowej (stadium montażu) ($i = 1, \ldots, M$)
j	=	typ części składowej ($j = 1, \ldots, N$)
h	=	numer równoległej maszyny w stadium i, ($h = 1, \ldots, m_i$)
k	=	typ montowanego wyrobu ($k = 1, \ldots, K$)
		Parametry wejściowe
d_k	=	zapotrzebowanie na wyrób typu k
m_i	=	liczba maszyn w stadium i
p_{jk}	=	czas montażu części typu j w wyrobie typu k
q_{il}	=	czas transportu części ze stadium i do stadium l
s_i	=	liczba podajników części przy każdej maszynie stacji typu i
J_k	=	zbiór typów części wchodzących w skład wyrobu typu k
R	=	zbiór par typów części (j, r) takich, że montaż części typu j musi bezpośrednio poprzedzać montaż części typu r
		Zmienne decyzyjne
C_{max}	=	długość cyklu montażowego
M_{max}	=	liczba stacji, do których przydzielono części
m_{imax}	=	liczba maszyn przy stacji i, do których przydzielono części
x_{ij}	=	1, jeżeli część typu j jest przydzielona do podajnika przy stacji i; inaczej $x_{ij} = 0$
X_{ihj}	=	1, jeżeli część typu j jest przydzielona do podajnika przy maszynie h stacji i; inaczej $X_{ihj} = 0$
y_{ik}	=	1, jeżeli wyrób typu k przechodzi przez stację i; inaczej $y_{ik} = 0$
Y_{iljk}	=	1, jeżeli wyrób typu k po wykonaniu operacji j przechodzi ze stacji i do stacji l; inaczej $Y_{iljk} = 0$
z_{ijk}	=	liczba wyrobów typu k przyslanych do stacji i w celu montażu części typu j

należy zamontować przed r powinny być przydzielone do stacji o numerze nie większym niż i. Warunek (6) zapewnia wybór dla każdego typu wyrobu marszruty przechodzącej przez te stacje, do których przydzielono wymagane typy części.

Model M2: *Równoważenie obciążeń stacji i przepływów międzystadialnych w elastycznej linii montażowej z maszynami równoległymi*

Zminimalizować

$$PQ_{max} \tag{9}$$

przy ograniczeniach

$$\alpha \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} d_k p_{jk} x_{ij} / m_i + (1-\alpha) \sum_{k=1}^{K} d_k y_{ik} \leq PQ_{max}; \quad \forall i \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1; \quad \forall j \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq m_i s_i; \quad \forall i \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{M} i x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{M} i x_{ir}; \quad \forall (j,r) \in R \tag{13}$$

$$y_{ik} \geq x_{ij}; \quad \forall i,k,j \in J_k \tag{14}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad \forall i, j y_{ik} \in \{0,1\}; \quad \forall i,k \tag{15}$$

Funkcja celu PQ_{max} (9) reprezentuje sumę ważoną ($0 \leq \alpha \leq 1$) czasów montażu i dopływów wyrobów do stacji będącej wąskim gardłem w systemie i określonej przez ograniczenie (10). Pierwszy składnik ograniczenia (10) reprezentuje obciążenie tej stacji, a drugi łączną liczbę odwiedzin przez wszystkie montowane wyroby, które wymagają montażu części przydzielonych do tej stacji. Można przyjąć, że drugi składnik reprezentuje łączny czas dowozu wyrobów do stacji dla przypadku jednostkowych czasów transportu. Ograniczenie (12) oznacza, że liczba różnych typów części przydzielonych do jednej stacji nie przekroczy liczby wszystkich podajników tej stacji. Ograniczenia (11), (13) i (14) pełnią funkcje podobne jak w modelu M1.

Następny model dotyczy ogólnego elastycznego systemu montażowego z możliwością wielokrotnego odwiedzania tej samej stacji przez dany wyrób przy dowolnych, różnych ograniczeniach kolejnościowych dla różnych typów wyrobów. Model ten uwzględnia szczegółowe czasy przemieszczania wyrobów pomiędzy stacjami i indywidualne dla każdego typu wyrobu ograniczenia kolejności montażu części składowych, co w wyniku prowadzi do ustalenia szczegółowych marszrut montażu.

Model M3: *Równoważenie łącznego czasu montażu i transportu w ogólnym ESM*

Zminimalizować

$$PQ_{max} \tag{16}$$

przy ograniczeniach

$$\alpha \sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} d_k p_{jk} x_{ij} + (1-\alpha) \sum_{k=1}^{K} \sum_{l \neq i} \sum_{j \in J_k} d_k q_{li} Y_{ijk} \leq PQ_{max}; \quad \forall i \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1; \quad \forall j \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq s_i; \quad \forall i \tag{19}$$

$$x_{ij} + x_{lr} - Y_{iljk} \leq 1; \quad \forall k, \ \forall i,l, \ l \neq i, \ \forall (j,r) \in R_k \tag{20}$$

$$-x_{ij} - x_{lr} + 2Y_{iljk} \leq 0; \quad \forall k, \ \forall i,l, \ l \neq i, \ \forall (j,r) \in R_k \tag{21}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad \forall i,j \tag{22}$$

$$Y_{iljk} \in \{0,1\}; \quad \forall i,l,k \tag{23}$$

Funkcja celu PQ_{max} (16) reprezentuje sumę ważoną ($0 \leq \alpha \leq 1$) czasów montażu i transportu wyznaczonych dla stacji będącej wąskim gardłem w systemie i określonej przez ograniczenie (17). Pierwszy składnik w ograniczeniu (17) reprezentuje obciążenie stacji będącej wąskim gardłem, a drugi łączny czas transportu montowanych wyrobów do tej stacji. Ograniczenie (18) zapewnia przydział części każdego typu do tylko jednej stacji, zaś (19) uwzględnia ograniczoną liczbę podajników części przy każdej stacji. Warunki

(20) i (21) zapewniają wybór dla każdego typu wyrobu marszruty przechodzącej przez te stacje, do których podajników przydzielono kolejno montowane typy części. Warunki te pośrednio uwzględniają również indywidualne ograniczenia kolejnościowe dla każdego typu wyrobu (R_k oznacza zbiór par typów części (j,r), które w wyrobie typu k muszą być montowane tak, aby montaż j bezpośrednio poprzedzał montaż r).

Z przedstawionych dotąd modeli jedynie M2 dopuszcza przypadek alternatywnych marszrut związany z możliwością jednoczesnego przydziału części tego samego typu do kilku równoległych maszyn jednej stacji. Jednak żaden z modeli M1, M2, M3 nie dotyczy przypadku, w którym części tego samego typu jednocześnie przydzielane są do różnych stacji, co umożliwia wybór alternatywnych marszrut w systemie bez równoległych maszyn. Podany poniżej model M4 dopuszcza dublowanie przydziałów części do różnych stacji i wyznacza alternatywne marszruty z możliwością powrotów.

Model M4: *Równoważenie obciążeń stacji dla montażu z alternatywnymi marszrutami*

Zminimalizować

$$C_{max} \tag{24}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} p_{jk} z_{ijk} \leq C_{max}; \quad \forall i \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \geq 1; \quad \forall j \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq s_i; \quad \forall i \tag{27}$$

$$x_{ij} \leq \sum_{l=i}^{M} x_{lr}; \quad \forall i, \ (j,r) \in R \tag{28}$$

$$x_{lr} \leq \sum_{i=1}^{l} x_{ij}; \quad \forall l, \ (j,r) \in R \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{M} z_{ijk} = d_k; \quad \forall k, \ j \in J_k \tag{30}$$

$$x_{ij} \leq \sum_{\{k: j \in J_k\}} z_{ijk} \leq \Big(\sum_{\{k: j \in J_k\}} d_k \Big) x_{ij}; \quad \forall i, j \tag{31}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad \forall i, j \tag{32}$$

$$z_{ijk} \geq 0, \ \ integer; \quad \forall i, j, k \tag{33}$$

Funkcja celu (24) zapewnia zrównoważenie obciążeń wszystkich stacji, a ograniczenie (25) wyznacza obciążenie C_{max} stacji będącej wąskim gardłem systemu. Ograniczenie (26) zapewnia przydział części każdego typu do co najmniej jednej stacji, zaś (27) uwzględnia ograniczoną liczbę podajników części przy każdej stacji. Ograniczenia (28) i (29) zapewniają taki wielokrotny przydział części składowych do stacji, dla którego montaż każdego typu wyrobu może odbywać się bez powracania do stacji raz odwiedzanych. Jednak aby zrównoważyć obciążenia wg funkcji celu (24),należy dopuścić możliwość wystąpienia marszrut z powrotami. Wykonanie wymaganych ilości wszystkich typów wyrobów zapewnia ograniczenie (30), a warunki (31) dla każdego typu wyrobu zapewniają

wybór zbioru marszrut (z dopuszczalnością powrotów) przechodzących przez te stacje, do których przydzielono wymagane typy części.
Modele M1, M2 i M3, z różnymi wartościami parametru α,oraz model M4 zastosowano do wyznaczenia obciążeń maszyn i marszrut montażu dla następującego przykładu.

Przykład 1

Rozważmy ESM zbudowany z $M = 3$ stacji montażowych, w którym montowane są $K = 2$ typy wyrobów w jednakowych ilościach $d_1 = d_2 = 100$ sztuk w ciągu okresu. Wyrób typu $k = 1$ wymaga pięciu typów części składowych o numerach 1,2,3,4,6, które należy montować w podanej kolejności, natomiast wyrób typu $k = 2$ wymaga montażu czterech typów części 1,2,5,6 w podanej kolejności. Super-ograniczenia kolejnościowe wspólne dla różnych typów wyrobów reprezentuje następujący zbiór par kolejno montowanych typów części: $R = \{(1,2),(2,3),(2,5),(3,4),(4,6),(5,6)\}$.
Czasy p_{jk} montażu części poszczególnych typów j w wyrobach różnego typu k są następujące: $p_{11} = p_{12} = 4$, $p_{21} = p_{22} = 2$, $p_{31} = 2$, $p_{41} = 2$, $p_{52} = 4$, $p_{61} = p_{62} = 2$.
Dla M1, M2 i M3 przyjmiemy, że każda stacja i, $(i = 1,2,3)$ dysponuje dwoma $(s_i = 2)$, zaś dla M4 czterema $(s_i = 4)$ podajnikami części. Stacje rozmieszczone są szeregowo w kolejności 1,2,3 wzdłuż trasy przejazdu wózka AGV. Czas transportu wyrobu pomiędzy sąsiednimi stacjami wynosi 2 jednostki czasu, stąd następujące wartości czasów q_{il} przemieszczania wyrobu pomiędzy każdą parą stacji i, l: $q_{12} = q_{21} = 2$, $q_{13} = q_{31} = 4$, $q_{23} = q_{32} = 2$.
Dla powyższych danych wyznaczono obciążenia uwzględniając wyłącznie dopływy do stacji $(\alpha = 0)$, łącznie czasy montażu i dopływy do stacji $(\alpha = 0.5)$ oraz wyłącznie czasy montażu $(\alpha = 1)$.
Ponadto w modelu M2 przyjęto, że każda stacja składa się z dwóch maszyn pracujących równolegle, tzn. $m_i = 2$, $i = 1,2,3$. Otrzymane wyniki zamieszczono w tablicy 2.

3. Optymalizacja obciążeń maszyn i konfiguracji systemu

Poniżej przedstawimy dwa modele zadań równoważenia obciążeń stacji z jednoczesną minimalizacją liczby stacji. Model M5 dotyczy elastycznej linii montażowej z pojedynczymi maszynami na każdej stacji, zaś model M6 linii zawierającej stacje z maszynami równoległymi.

Model M5: *Optymalizacja konfiguracji i obciążeń elastycznej linii montażowej*

Zminimalizować

$$\alpha C_{max} + (1-\alpha) M_{max} \tag{34}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} p_{jk} x_{ij} \leq C_{max}; \quad \forall i \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1; \quad \forall j \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq s_i; \quad \forall i \tag{37}$$

Tablica 2

Przydziały części do stacji i marszruty montażu

Model (zm,ogr)[d]	α	PQ_{max} [a]	Przydziały części [b]			Marszruty [c]	
			Stacja 1	Stacja 2	Stacja 3	Wyrób 1	Wyrób 2
M1 (26,47)	0	500	1,2	3,4	5,6	1,2,3	1,3
	0.5	850	1,2	3,4	5,6	1,2,3	1,3
	1	1200	1,2	3,5	4,6	1,2,3	1,2,3
M2 (25,46)	0	200	1,2	3,4,5,6	-	1,2	1,2
	0.5	300	1	2,3,4	5,6	1,2,3	1,2,3
	1	400	1	2,5	3,4,6	1,2,3	1,2,3
M3 (195,322)	0	400	2,5	1,6	3,4	2,1,3,2	2,1,2
	0.5	600	1,2	3,5	4,6	1,2,3	1,2,3
	1	1000	2,4	1,3	5,6	2,1,2,1,3	2,1,3
M4 (46,94)	-	800	1,2,3,5	1,2,4,6	3,4,5,6	2,1,3 (36)	1,2 (1)
						2,1,2,3 (34)	1,3,2 (63)
						2,1,3,2,3 (30)	1,2,3,2 (36)

(a) - dla M1 PQ_{max} uwzględnia łącznie dopływy wyrobów do wszystkich stacji, zaś dla M2 i M3 tylko dopływy do stacji będącej wąskim gardłem; dla M4 $PQ_{max} = C_{max}$
(b) - numery typów części przydzielonych do stacji
(c) - numery kolejno odwiedzanych stacji, a dla M4 dodatkowo liczba sztuk wyrobu
(d) - liczba zmiennych i liczba ograniczeń

$$\sum_{i=1}^{M} ix_{ij} \leq \sum_{i=1}^{M} ix_{ir}; \quad \forall (j,r) \in R \tag{38}$$

$$ix_{ij} \leq M_{max}; \quad \forall i,j \tag{39}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad \forall i,j \tag{40}$$

Funkcja celu (34) zapewnia osiągnięcie kompromisu pomiędzy minimalną długością cyklu C_{max} a minimalną liczbą stacji montażowych M_{max}, $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Dla $\alpha = 0$ minimalizowana jest liczba stacji, zaś dla $\alpha = 1$ długości cyklu. Ograniczenie (35) zabezpiecza każdą stację przed obciążeniem przekraczającym długość cyklu montażowego C_{max}, a (39) wyznacza numer M_{max} ostatniej stacji, do której przydzielono części. Ograniczenia (36), (37) i (38) pełnią funkcje podobne jak we wcześniej podanych modelach.

Model M6: *Optymalizacja konfiguracji i obciążeń elastycznej linii montażowej z maszynami równoległymi*

Zminimalizować

$$\alpha C_{max} + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{M} m_{imax} \tag{41}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{j \in J_k} p_{jk} X_{ihj} \leq C_{max}; \quad \forall i,\ h = 1, \ldots, m_i \tag{42}$$

$$\sum_{i=1}^{M} x_{ij} = 1; \quad \forall j \tag{43}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq m_i s_i; \quad \forall i \tag{44}$$

$$x_{ij} \leq \sum_{h=1}^{m_i} X_{ihj} \leq m_i x_{ij}; \quad \forall i, j \tag{45}$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ihj} \leq s_i; \quad \forall i,\ h = 1, \ldots, m_i \tag{46}$$

$$\sum_{i=1}^{M} i x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{M} i x_{ir}; \quad \forall (j, r) \in R \tag{47}$$

$$h X_{ihj} \leq m_{imax}; \quad \forall i, h, j \tag{48}$$

$$m_{imax}/m_i \leq m_{i-1max}/m_{i-1}; \quad \forall i > 1 \tag{49}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad \forall i, j \tag{50}$$

$$X_{ihj} \in \{0, 1\}; \quad \forall i, h, j \tag{51}$$

Podobnie jak w przypadku modelu **M5**, funkcja celu (41) oznacza szukanie kompromisu pomiędzy minimalną długością cyklu montażowego C_{max} a minimalną liczbą maszyn $\sum_{i=1}^{M} m_{imax}$, do których przydzielono części, $(0 \leq \alpha \leq 1)$.
Ograniczenie (42) zabezpiecza każdą stację przed obciążeniem przekraczającym przyjętą długość cyklu montażowego C_{max}. Ograniczenie (45) zapewnia przydział części każdego typu do co najmniej jednej i nie więcej niż wszystkich maszyn takiej stacji, do której przydzielono części tego typu. Ograniczenie (46) oznacza, że liczba typów części przydzielonych do jednej maszyny nie może przekroczyć liczby podajników przy tej maszynie. Ograniczenie (48) wyznacza dla każdej stacji i numer m_{imax} ostatniej maszyny, do której przydzielono części składowe, a (49) dopuszcza przydział części do każdej następnej stacji pod warunkiem wykorzystania wszystkich równoległych maszyn stacji poprzedniej. Ograniczenia (43), (44) i (47) pełnią funkcje podobne jak w modelu **M2**.

W przypadku minimalizacji wyłącznie długości cyklu montażowego C_{max} $(\alpha = 1)$, w modelu **M6** należy usunąć ograniczenia (48) i (49) zawierające zmienne m_{imax}.

Przykład 2

Modele **M5** i **M6** zastosujemy do zrównoważenia obciążeń i wyznaczenia optymalnej struktury elastycznej linii montażowej, w której z 15 typów części montowane są 4 typy wyrobów. Odpowiednie ciągi kolejno montowanych części $j \in J_k$ dla wyrobów typu $k = 1, 2, 3, 4$ są następujące: (1,2,3,4,6,12,14,15), (1,2,5,6,9,10,13,15), (2,4,5,7,8,9,10,14), (8,11,13,14,15).
Super-ograniczenia kolejnościowe wspólne dla różnych typów wyrobów reprezentuje następujący zbiór par kolejno montowanych typów części:
$R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (4,5), (4,6), (5,6), (5,7), (6,9), (6,12), (7,8), (8,9), (8,11), (9,10), (10,13), (10,14), (11,13), (12,14), (13,14), (13,15), (14,15)\}$.
Czasy p_{jk} montażu poszczególnych typów części j są jednakowe dla różnych typów wyrobów k, (tzn. $p_{jk} = p_j, \forall k,\ j \in J_k$) i wynoszą: $p_1 = 4$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$, $p_4 = 2$, $p_5 = 4$, $p_6 = 2$, $p_7 = 3$, $p_8 = 5$, $p_9 = 2$, $p_{10} = 4$, $p_{11} = 5$, $p_{12} = 2$, $p_{13} = 4$, $p_{14} = 2$, $p_{15} = 3$.
Linia montażowa może zawierać nie więcej niż 5 stacji, z których każda dysponuje 5 podajnikami części. W modelu **M6** dodatkowo przyjęto, że każda stacja może składać się z dwóch równoległych maszyn mających po 5 podajników. Otrzymane wyniki zamieszczono w tablicy 3.

Tablica 3

Długość cyklu, liczba maszyn i przydziały części do stacji

Model (zm,ogr)[c]	α	C_{max}	$\sum_i m_{imax}^{(a)}$	Przydziały części [b]				
				Stacja 1	Stacja 2	Stacja 3	Stacja 4	Stacja 5
M5	0	30	3	1,...,5	6,...,10	11,...,15	-	-
(76,123)	0.5	20	5	1,2	3,4,5,6	7,8,11,12	9,10,13	14,15
	1	20	5	1,2,3,4	5,6,7,12	8,11	9,10,13	14,15
M6	0	30	3	1,...,10	11,...,15	-	-	-
(231,367)	0.5	14	8	1,2,3,4	5,7,8	6,9,10,12	11,13,14,15	-
(226,213)	1[d]	12	9	1	2,3,4,5,6	7,8,11,12	9,10,13	14,15

(a) - łączna liczba maszyn, do których przydzielono części
(b) - numery typów części przydzielonych do stacji
(c) - liczba zmiennych i liczba ograniczeń, (d) - model M6 bez ograniczeń (48) i (49)

4. Wnioski

Zaproponowane modele programowania całkowitoliczbowego dla problemów równoważenia obciążeń maszyn w elastycznych systemach montażowych w praktyce prowadzą do zadań optymalizacji o dużej liczbie zmiennych i ograniczeń. W szczególności uwzględnienie przepływów międzyoperacyjnych, bardzo istotnych dla funkcjonowania ESM, wpływa na znaczny wzrost rozmiarów zadań. Typowe zadanie obciążenia maszyn w ESM obejmuje kilkaset typów części, kilkanaście typów montowanych wyrobów i kilka stacji, każda z kilkunastoma podajnikami części (np. [1]). Stosowanie gotowych pakietów optymalizacji dyskretnej może wiązać się więc z dużymi nakładami obliczeniowymi.
Przedstawione w pracy przykłady rozwiązano stosując pakiet optymalizacji dyskretnej LINGO [6] wykorzystujący metodę podziału i ograniczeń. Czasy CPU obliczeń na komputerze 486DX/25MHz wahały się w przedziale od kilku sekund do kilkunastu minut.
Opracowanie szybkich heurystyk do wyznaczania dobrych rozwiązań przybliżonych zaproponowanych modeli jest przedmiotem prowadzonych aktualnie prac badawczych.

LITERATURA

[1] Ammons J.C., Lofgren C.B., McGinnis L.F.: A large scale machine loading problem in flexible assembly. *Annals of Operations Research*, vol.3, 1985, pp.319-332.

[2] Ghosh S., Gagnon R.J.: A comprehensive literature review and analysis of the design, balancing and scheduling of assembly systems. *International Journal of Production Research*, vol.27, 1989, pp.637-670.

[3] Lee H.F., Johnson R.V.: A line-balancing strategy for designing flexible assembly systems. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, vol.3, 1991.

[4] Sawik T.: Modele zadań krótkookresowego planowania produkcji w elastycznym systemie produkcyjnym. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, z. 101, 1990, s.249-261.

[5] Sawik T.: *Optymalizacja dyskretna w elastycznych systemach produkcyjnych.* WNT, Warszawa 1992.

[6] Schrage L., Cunningham K., *LINGO, Optimization Modeling Language*, LINDO Systems Inc., Chicago 1991.

Recenzent: Prof.dr inż. Henryk Kowalowski

Wpłynęło do Redakcji do 30.04.1994 r.

Abstract

The paper presents several integer programming formulations for the design and balancing of flexible assembly systems (FASs) in which different product types are assembled simultaneously. The system is made up of a set of assembly stations of various types linked with an automated handling system. Each station consists of a single machine or of identical parallel machines, usually assembly robots. Two types of FAS are considered, a flexible flow line (FFL) and a general FAS. The FFL is a unidirectional flow system where a base part enters the system and is processed by a series of stations. A part may bypass some stations but does not revisit any station. In a general FAS however, a direction of flow varies for different products and a revisiting of stations is allowed. The balancing problem consists in assigning tasks to stations with limited staging capacities in order to balance station workloads and station-to-station product moves subject to precedence relations among the tasks for a mix of product types. For a stable product mix, integer programmes are proposed to select simultaneously the number of stations and the number of machines at each station and to allocate tasks to stations. Numerical examples are presented to illustrate applications of the various formulations proposed.