PEŁNOMOCNIK RZĄDU DO SPRAW ELEKTRONICZNEJ TECHNIKI OBLICZENIOWEJ

Prace Instytutu Maszyn Matematycznych

P. 2229 | 68

ROK X ZESZYT 1

Warszawa 1968

INSTYTUT MASZYN MATEMATYCZNYCH

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

PEŁNOMOCNIK RZADU D/S ELEKTRONICZNEJ TECHNIKI OBLICZENIOWEJ

P. 2229/68

P R A C E

Instytutu Maszyn Matematycznych

Rok X Zeszyt 1

Warszawa 1968

INSTYTUT MASZYN MATEMATYCZNYCH

DZIAŁOWY OŚRODEK INTE

Copyright © 1968 - by Instytut Maszyn Matematycznych
Poland
Wszelkie prawa zastrzeżone

Komitet Redakcyjny

Bartłomiej GŁOWACKI, Jerzy GRADOWSKI /redaktor naczelny/, Andrzej KOJEMSKI, Włodzimierz MARDAL /z-ca redaktora/, Jan RELUGA

Sekretarz redakcji: Romana NITKOWSKA

Adres redakcji: Warszawa, ul. Koszykowa 79, tel. 28-37-29.

Wykonano w Instytucie Maszyn Matematycznych
Nakł.400 egz.pap. offset kl.III g.70 zam.nr 66/68, GP-IV/1843/67

Od redakcji

Począwszy od roku 1968 wydawnictwo Instytutu Maszyn Matematycznych pn. "PRACE Instytutu Maszyn Matematycznych", obejmujące publikacje naukowe i badawcze pracowników Instytutu w zakresie projektowania i budowy elektronicznych maszyn cyfrowych oraz systemów przetwarzania informacji, będzie się ukazywało w formie zeszytów.

Artykuły zamieszczane w "PRACACH IMM" będą dotyczyły nowych rozwiązań w dziedzinie organizacji, konstrukcji, technologii, metod kontroli i systemów programowania maszyn cyfrowych oraz ich zastosowań.

Dotychczasowe serie "PRAC IMM": "A", "B", "C" i "Sprawozdania" nie będą kontynuowane.

"PRACE IMM" można, jak dotychczas, nabywać za pośrednictwem Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN /Wzorcownia/, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki oraz w Domach Książki /księgarnie techniczne/.

Editor's Note

Since 1968 the publication of the Institute of Mathematical Machines, entitled "PRACE Instytutu Maszyn Matematycznych", will be issued in parts.

The articles will discuss new solutions of digital computers in the fields of organization, construction, technology methods of control and system programming, as well as their applications.

Former series of "PRACE IMM" "A", "B", "C" and "Reports" will be continued.

"PRACE IMM" are available by the agency of "ARS POLONA", Krakowskie Przedmieście 7, Warszawa.

S P I S T R E Ś C I Z E S Z Y T U 1

C O N T E N T S I S S U E 1

1. Głowacki B., Waligórska P., Ziemkiewicz A.

The method of parallel-serial carry propagation in fast binary adders 5

Metoda równoległo-szeregowej propagacji przeniesień w szybkich sumatorach binarnych.

2. Kojemski A.

Poprawność transformacji sygnałów w linii cyfrowej 25

The correctness of signal transformation in a digital

wiring systems.

4. Wojtowicz B.

Pewna metoda formułowan
lizy numerycznej obwodó

A method of formulating
electric circuit numeri

ia równań różniczkowych dla ana-
w elektrycznych 101

differential equations for
cal analysis.

5. Autorzy artykułów zamieszcz

Authors of articles publish

onych w zeszycie 1 "PRACE IMM" . 137

ed in issue 1 "PRACE IMM".

6. Wykaz "PRAC IMM" opublikowa

nych w 1967 r. 139

The list of "PRACE IMM" pub

lished 1976.

PRACE IMM
Zeszyt 1
© 1968.03

681.325.55.055.023.22

THE METHOD OF PARALLEL-SERIAL CARRY PROPAGATION IN FAST BINARY ADDERS

Bartłomiej GŁOWACKI
Pelagia WALIGÓRSKA
Andrzej ZIEMKIEWICZ

Received March, 1967

The authors present a certain class of parallel binary adders on typical logical elements for transistor-diode techniques. The presented general method permits to design adders in which the number of serially connected elements in the carry circuit is several times smaller than the one in adders with a serial carry propagation, which results in shortening the time of binary number addition /subtraction/.

1. INTRODUCTION

A parallel binary adder is composed of circuits destined to form resulting digits in separate stages, and circuits which implement a binary carry from lower stages of the adder to higher ones.

Circuits implementing the carries in separate adder stages are connected in the so-called carry path.

The main factor that decides about the speed of the execution of operations in adders is the time needed for carry completion.

This time can be minimalized by means of:

- applying circuits detecting the moment of carry completion [1], [2] and [3], due to which effective speed of the adder action depends on the mean time of carry completion /not on the maximal time/;
- applying the so-called carry skip by means of additional circuits [4], the action of which consists in adder carry propagation neg-

leoting several elements of the path of carries. This method permits to shorten the maximal time of carry completion;

- applying look-ahead carries in which certain stages of the carry path are distinguished, and a stage group of the adder between two distinguished positions is treated as one macro-position, in the range of which carries get simultaneously completed [5], [6].

The solution presented in the paper is a new method of the carry path implementation, permitting a multiple /depending on the implementation/ shortening of the maximal time of carry completion. The division of a path of carries into m sub-paths acting in parallel, as well as serial carry propagation in each of them is characteristic of the considered method.

In the paper an exemplary implementation is given of an adder on NORAND logical elements. Such an adder may also be implemented on NOR, NAND or NANDOR elements.

2. ADDER STAGE

A full parallel adder is composed of n stages. Let the two binary numbers given below be operands:

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \; ; \qquad b = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

where $a_i, b_i \in \{0,1\}$

Theorem 1

The action of a adder stage can be described by the following two-element Boolean algebra expressions:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= x_i + \sum_{k=1}^{m_i-1} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} \\ \bar{p}_i &= y_i + \sum_{k=1}^{m_i-1} y_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} \end{aligned}\right\} \qquad /1/$$

and

$$S_i = R_i \, \bar{p}_{i-1} + \bar{R}_i \, p_{i-1}$$

where: $1 \leq m_i \leq i \qquad /i = 1, 2, \ldots, n-1/$

$x_i = a_i \, b_i$

$y_i = \bar{a}_i \, \bar{b}_i$

$R_i = a_i \bar{b}_i + \bar{a}_i b_i$

p_i - carry from the i-th adder stage

S_i - bit of the sum in position i.

We assume that if $m_i = 1$, than

$$\sum_{k=1}^{m_i-1} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} = 0$$

Proof

The action of the adder stage is described in the following table:

a_i	b_i	p_{i-1}	S_i	p_i
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

To the so determined functions S_i and p_i correspond the following dependences:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= a_i b_i + (a_i \bar{b}_i + \bar{a}_i b_i)\, p_{i-1} = x_i + R_i\, p_{i-1} \\ \bar{p}_i &= \bar{a}_i \bar{b}_i + (a_i \bar{b}_i + \bar{a}_i b_i)\, \bar{p}_{i-1} = y_i + R_i\, \bar{p}_{i-1} \end{aligned}\right\} \qquad /2/$$

and

$$S_i = R_i\, \bar{p}_{i-1} + \bar{R}_i\, p_{i-1}$$

For $m_i = 1$ the theorem is true as the sums in formulae /1/ do not contain an element and dependences /2/ are obtained.

Assume that the theorem holds for all $1 \leq m_i < M$.

The dependence is:

$$p_{i-(M-1)} = x_{i-(M-1)} + R_{i-(M-1)}\, p_{i-M} \qquad /3/$$

Thus, in virtue of the induotive assumption, one obtains:

$$p_i = x_i + \sum_{k=1}^{(M-1)-1} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-(M-1)} \prod_{j=0}^{(M-1)-1} R_{i-j} =$$

$$= x_i + \sum_{k=1}^{(M-1)-1} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \left(x_{i-(M-1)} + \right.$$

$$\left. + R_{i-(M-1)}\, p_{i-M} \right) \prod_{j=0}^{(M-1)-1} R_{i-j} =$$

$$= x_i + \sum_{k=1}^{M-1} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-M} \prod_{j=0}^{M-1} R_{i-j}$$

The expression for $\bar{p}_i$ is obtained in an identical way. Thus, the theorem is valid for $m_i = M$.

The validity of the following identities is easy to be checked

$$\left.\begin{aligned} p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} &= \sum_{k=m_i}^{r_i} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \\ &+ p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} \\ \bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} &= \sum_{k=m_i}^{r_i} y_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \\ &+ \bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} \end{aligned}\right\} \quad /4/$$

where: $r_i \geqslant m_i$

On substituting /4/ to /1/ one obtains

$$\left.\begin{aligned} p_i &= x_i + \sum_{k=1}^{r_i} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} \\ \bar{p}_i &= y_i + \sum_{k=1}^{r_i} y_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \overline{p_{i-m_i}} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} \end{aligned}\right\} \quad /5/$$

where: $r_i \geqslant m_i - 1$.

As it results from identity /4/, the components of sums*) for $r_i \geq m_i$ in formulae /5/ may be neglected. Let us determine the set of indicators for each adder stage:

$$Q_i = \{q : q = m_i + 1, m_i + 2, \ldots, i\}$$

Let Q_i^* denote any of its subset: $Q_i^* \subset Q_i$. It can be checked that for $q > m_i$ the following identities occur:

$$p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} = p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} + p_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j}$$

$$\bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} = \bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} + \bar{p}_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j}$$

Therefore, dependences /5/ are equivalent to the following:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= x_i + \sum_{k=1}^{r_i} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} + \\ &+ \sum_{q \in Q_i^*} p_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j} \\ \bar{p}_i &= y_i + \sum_{k=1}^{r_i} y_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} + \\ &+ \sum_{q \in Q_i^*} \bar{p}_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j} \end{aligned}\right\} \quad /6/$$

*) The presence of components of sums for $r_i \geq m_i$ in formulae /5/ may speed up the adder action.

where:

$$r_i \geqslant m_i - 1$$

Definition 1. If Q_i^* is a non empty set, it is said that in the i-th stage a carry skip occours.

3. TYPICAL METHODS OF BINARY ADDER IMPLEMENTATION

All methods considered below concern dependences /6/ ich which:

$$r_i = m_i - 1$$

a/ Let

$$\left.\begin{aligned} m_i &= 1 \\ Q_i^* &= \Lambda \end{aligned}\right\} \text{ for every } i$$

where Λ denotes an empty set.
Under such assumptions, formulae /6/ take the form /2/, which corresponds to the adders with a serial path of carries /fig.1/

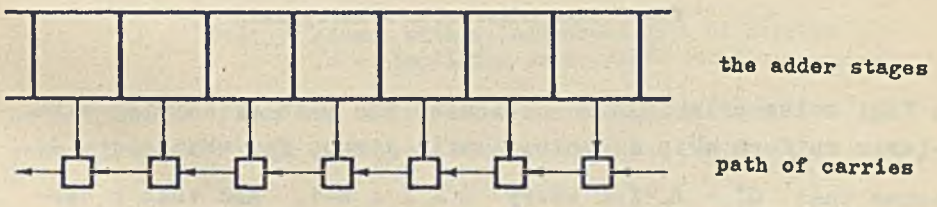


Fig. 1. An adder with a serial carry path

b/ Let $m_i = 1$ for every i. If there exists a subset of indicators $\{i_s\}$ for $s = 1, 2, \ldots, S$

$$0 < i_1 < i_2 < \ldots\ldots < i_S \leqslant n-1$$

such that:

$$Q_{i_s}^* \neq \Lambda$$

$$Q_i^* = \Lambda \text{ for } i \neq i_s$$

it is said that formulae /6/ describe the serial path of carries with carry skips. In [4] the analysis is given of optimal distribution of carry skips, i.e. the choice of the optimal subset i_s for the given adder.

If every set $Q^*_{i_s}$ /s = 1, 2, ..., S/ comprises k various elements:

$$Q^*_{i_s} = \{q_{i_s 1}, q_{i_s 2}, \ldots, q_{i_s k}\}$$

it is said that the path of carries has a k-layer skip distribution. The path of carries in which $q_{i_s k} = q_k$ for every i_s, is called a path with a uniform skip distribution.

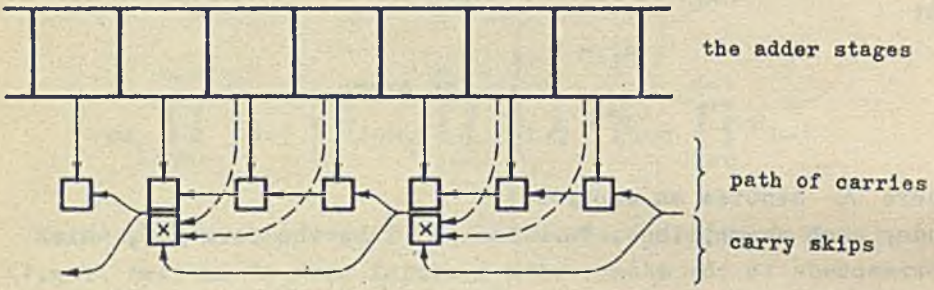


Fig. 2. An adder with a carry skip

In fig. 2 the principle of action of the path of carries with 1-layer uniform skip distribution is given, for which q = 3.

c/ Assume that $Q^*_i = \Lambda$ for every $0 \leqslant i \leqslant n-1$, and that a certain string of indicators is distinguished $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n-1$. Assume the following dependence

$$m_i = i - i_{s-1} \quad \text{for} \quad i_{s-1} < i \leqslant i_s.$$

Under such assumptions formulae /6/ describe the path of look-ahead carries. Also simplified circuits are applied for which:

$$m_i = \begin{cases} i - i_{s-1} & \text{for} \quad i \neq i_s \\ 1 & \text{for} \quad i = i_s \end{cases}$$

Fig. 3 schematically presents the principle of action of look-ahead carries with a constant group length, for which $i_s - i_{s-1} = 3$ /fig. 3a presents a simplified principle/.

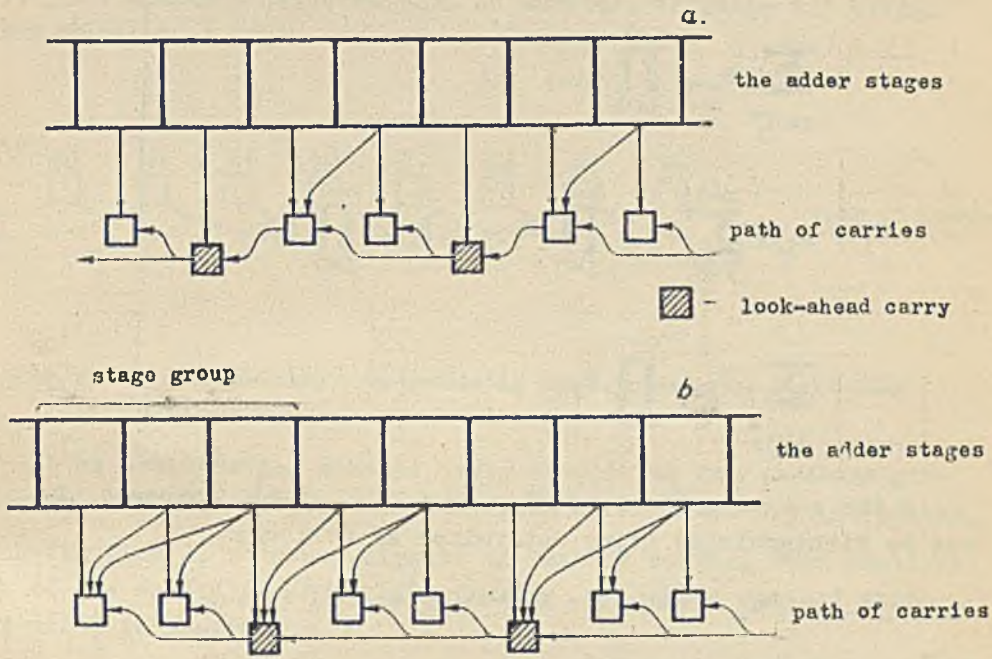


Fig. 3. Adders with a look-ahead path of carries
/a – simplified principle/

As it results from the above said formulae /6/ describe in a general way various types of binary adders.

4. PROPOSED METHOD OF CARRY PATH IMPLEMENTATION

Let m be a number greater than 1. Assume:

$$m_i = \begin{cases} m & \text{for} \quad m < i \leq n-1 \\ 1 & \text{for} \quad 0 < i \leq m \end{cases} \qquad /7/$$

and

$$r_i = m_i - 1$$

Under such assumptions, dependences/6/ take the form:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= x_i + \sum_{k=1}^{m-1} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-m} \prod_{j=0}^{m-1} R_{i-j} + \\ &+ \sum_{q \in Q_i^*} p_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j} \\ \bar{p}_i &= y_i + \sum_{k=1}^{m-1} y_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \bar{p}_{i-m} \prod_{j=0}^{m-1} R_{i-j} + \\ &+ \sum_{q \in Q_i^*} \bar{p}_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j} \end{aligned}\right\} \quad /8/$$

In the set of indioators $I = \{0,1, \ldots, n-1\}$, subsets I_s oan be distinguished being determined as follows:

$$I_s = \{i : i = m \cdot k+s, \quad k = 0, 1, \ldots\},$$

where: $s = 0, 1, \ldots, m-1$

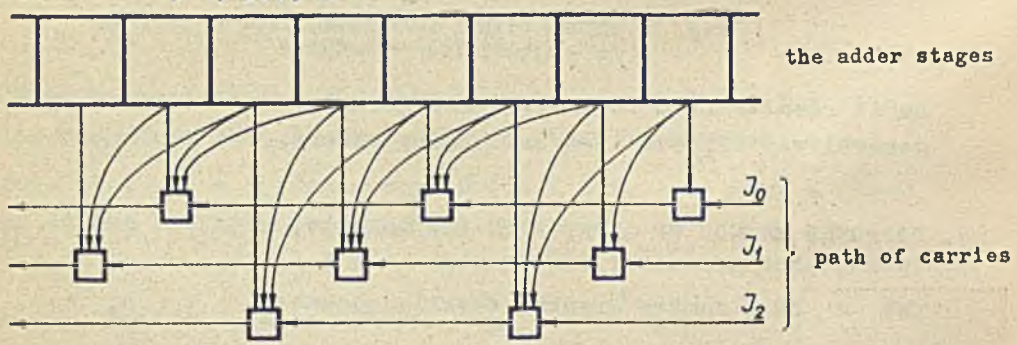


Fig. 4. Proposed implementation of an adder with distinguished subpaths of carries

Fig. 4 presents the principle of action of the path of carries determined as above, for whioh $m = 3$. Sets I_0, I_1, I_2 deter-

mine parallel acting subpaths in the path of carries. In each of them the carry propagation is serial.

Fig. 5 presents the same path of carries, subpaths not being distinguished.

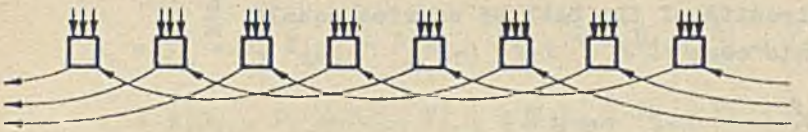


Fig. 5. The way of carry propagation in the proposed method of adder implementation

Let us evaluate the time of carry completion in the above given path. For this purpose the following definitions are introduced.

Definition 2. To every circuit of path of carries that realizes one of the equations /8/, the parameter τ called maximal unitary delay is assigned.

Assume that the propagation time for a set of serially connected elements, through which the carry passes equals the sum of maximal unitary delays of the elements.

Definition 3. The maximal carry completion time is the greatest propagation time in the path of carries for all combinations of input operands of the adder, i.e. for all possible cases of carry propagation in the path of carries.

Theorem 2

For a path of carries of an n-stage binary adder, built according to /6/, where m_i are determined by /7/ and $Q_i^* = \Lambda$ /i = 0, 1, ..., n-1/, maximal time of carry completion is determined by the formula

$$T = \left(E\left[\frac{n-1}{m}\right] + 1 \right) \tau \qquad /9/$$

Proof

From /7/ and from the definition of sets I_s result the following properties of a so built path of carries:

- if there exists $k > 0$ such that $n = m \cdot k$, then every set I_s /$s = 1, \ldots k$/ comprises exactly $\frac{n}{m}$ circuits that realize one of the equations /8/. It means that the number of serially connected circuits of the path of carries equals $\frac{n}{m}$. Thus, for this case

$$T = \frac{n}{m}\tau$$

- if $n \neq m \cdot k$ /$k = 1, 2, \ldots$/, there exists the set I_s comprising $E\left[\frac{n}{m}\right] + 1$ elements, therefore

$$T = \left(E\left[\frac{n}{m}\right] + 1\right)\tau$$

But for $n = m \cdot k$ the following equality occurs:

$$E\left[\frac{n-1}{m}\right] = E\left[\frac{n}{m}\right] - 1 = \frac{n}{m} - 1$$

thus

$$\frac{n}{m} = E\left[\frac{n-1}{m}\right] + 1$$

On the other hand, for $n \neq m \cdot k$ /$k = 1, 2, \ldots$/

$$E\left[\frac{n}{m}\right] = E\left[\frac{n-1}{m}\right]$$

Thus, formula /9/ is true in every case.

There are no assumptions about sets Q_1^* in this chapter. The application of carry skips in order to reach a further increase of speed is therefore not limited. The path of carries can be equipped with a circuit detecting the moment of carry completion.

5. IMPLEMENTATION OF AN ADDER ON NORAND ELEMENTS

Let us accept n = 24 and m = 5. Dependences /8/ take the form:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= x_i + R_i x_{i-1} + R_i R_{i-1} x_{i-2} + R_i R_{i-1} R_{i-2} x_{i-3} + \\ &+ R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} x_{i-4} + R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} R_{i-4} p_{i-5} \\ \bar{p}_i &= y_i + R_i y_{i-1} + R_i R_{i-1} y_{i-2} + R_i R_{i-1} R_{i-2} y_{i-3} + \\ &+ R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} y_{i-4} + R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} R_{i-4} \overline{p_{i-5}} \end{aligned}\right\} /10/$$

The structure of every stage of this adder is indentical. Every stage of the path of carries contains one NORAND element. In view of the inverting action of this element the following condition must be satisfied: if a carry from i-th stage is represented by p_i then a carry from the /i - 5/ - th stage must be represented by $\overline{p_{i-5}}$ and conversely.

In the discussed example it has been accepted that in carry path stages with even indicators, the carry out is represented by a carry complement whereas on those with odd indicators - by a carry.

Fig. 6 represents an implementation of an adder stage. It results from formulae /10/ that in stages with even indicators the signals α, β, ν, μ and λ /fig. 6/ are equal respectively:

$$\lambda_i = \bar{p}_i ,$$
$$\alpha_i = a_i , \qquad \beta_i = b_i$$
$$\nu_i = x_i \qquad \mu_i = y_i$$

and in stages with odd indicators:

$$\lambda_i = p_i ,$$
$$\alpha_i = a_i , \qquad \beta_i = b_i ,$$
$$\nu_i = y_i , \qquad \mu_i = x_i$$

BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

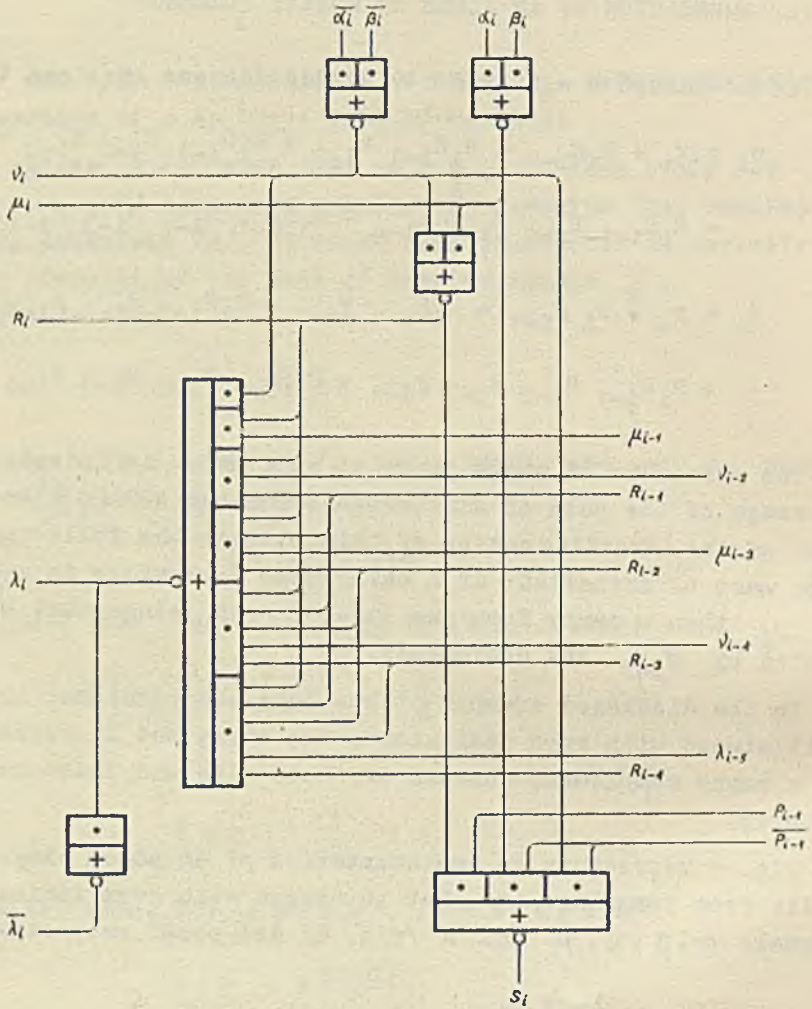


Fig. 6. The stage of an adder on elements NORAND

Maximal time of carry completion in a path of carries of an adder described by formulae /10/ on the basis of the theorem 2 is:

$$T = \left(E \left[\frac{24-1}{5} \right] + 1 \right) \tau = 5\tau$$

where τ is the maximal delay of the element NORAND. In the considered adder a carry skip has been additionally applied. Fig. 7

illustrates the carry skip p_{23} from the adder highest stage, for which $Q^*_{23} = \{8, 16\}$. If the carry is generated in the stage with a number that belongs to one of the intervals: $< 0,7 >$, $< 8,15 >$ or $< 16,23 >$, then, on the basis of theorem 2, p_7, p_{15} or p_{23} respectively appears on the input /Fig. 8/ after a time not greater than

$$T = \left(E\left[\frac{8-1}{5}\right] + 1 \right) \tau = 2\tau$$

As arguments R_1 are fixed before the path starts acting, the carry skip $\bar{p}^*_{23}$ is completed after a time no greater than 3τ. Carry speeding-up from this stage is very important because of the recognizing an over-flow in the adder.

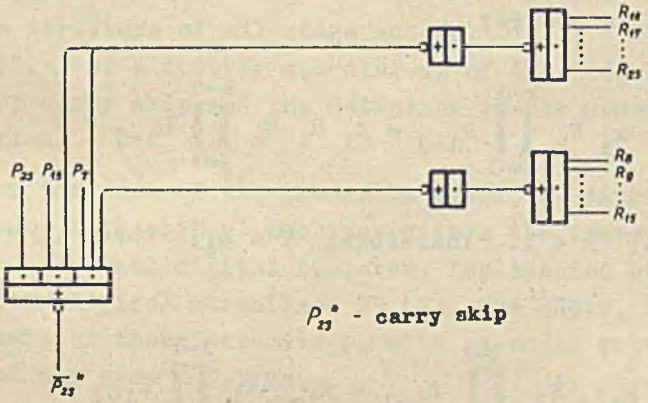


Fig. 7. Carry skip circuit

Theorem 3

In disjunctive normal forms /5/ determining carry and carry complement in any adder stage at any moment, at most one of the products is equal to 1.

Proof

Let us note that for every i the following dependences occur:

$$R_i\, x_i = \left(a_i\, \bar{b}_i + \bar{a}_i\, b_i \right) a_i\, b_i = 0$$

$$R_i\, y_i = \left(a_i\, \bar{b}_i + \bar{a}_i\, b_i \right) \bar{a}_i\, \bar{b}_i = 0 \qquad /11/$$

Expressions /5/ can be presented in the form:

$$p_i = x_i + \sum_{k=1}^{m_i} \xi_k \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j}, \quad \text{where} \quad \xi_k = \begin{cases} x_{i-k} & \text{for} \quad k < m_i \\ p_{i-m_i} & \text{for} \quad k = m_i \end{cases}$$

$$\bar{p}_i = y_i + \sum_{k=1}^{m_i} \eta_k \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j}, \quad \text{where} \quad \eta_k = \begin{cases} y_{i-k} & \text{for} \quad k < m_i \\ p_{i-m_i} & \text{for} \quad k = m_i \end{cases}$$

It should be shown that the product of any two different components in each of the above normal expressions equals zero. The following dependence occurs:

$$x_i \, \xi_k \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} = x_i \, R_i \, \xi_k \prod_{j=1}^{k-1} R_{i-j} = 0$$

Assume, that $k < l$. Therefore, $k < m_i$, thus $\xi_k = x_{i-l}$. Thus

$$\xi_k \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} \, \xi_l \prod_{j=0}^{l-1} R_{i-l} = x_{i-k} \, \xi_l \prod_{j=0}^{l-1} R_{i-l} =$$

$$= x_{i-k} \, R_{i-k} \, \xi_l \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i-k}}^{l-1} R_{i-j} = 0$$

For the second disjunctive normal form the proof is analogous.

The property determined by theorem 3 is an important feature of the method from the viewpoint of technical implementation, as many of implementing techniques require the action of input products of elements NORAND not being simultaneous.

6. FINAL NOTES

The main features of the presented method are the following:

- division of the adder path of carries into several subpaths,
- serial carry propagation in every subpath,
- parallel action of all subpaths.

These features permit a much faster carry propagation than in adders with a serial carry propagation.

The following properties are characteristic of the presented implementation of an adder on NORAND elements:

- application of one NORAND element in one stage of the path of carries,
- uniform structure of all stage adders,
- possibility of a further speeding-up of the adder action by means of carry skip and the detection of the moment of carry completion.

Work on the idea of the presented adder was carried out at the Institute of Mathematical Machines within the framework of the design of a universal digital computer, implemented on semiconductor /silicon/ logical circuits S 50 [7]. The adder, implemented on the basis of these circuits permits to adder subtract 24 bit numbers at the time $\leq 0{,}5$ μs.

The authors thank doc. dr Z. Pawlak, L. Łabanowski and A. Kojemski for their valuable remarks on the manuscript of the paper.

References

[1] GILSHRIST B., POMARENE I.H., WONG S.Y.: Fast Carry Logic for Digital Computers, IRE Trans. on EC, December 1955:EC-4, 133-136.

[2] POMARENE I.H., COCKE I.: Asynchronous Adder-Substractor System, US Patent 3051387, Patented, August 1962.

[3] MAJERSKI S., WIWEGER M.: NOR-Gate Binary Adder with Computation Detection, IEEE Trans. on EC, February 1967.

[4] MAJERSKI S.: On Determination of Optimal Distribution of Carry Skip in Adders, IEEE Trans. on EC, February 1967.

[5] MAC SORLEY O.L.: High-Speed Arithmetic in Binary Computer, Proc. IRE, January 1961:49, 1, 67.

[6] FLORES I.: The Logic of Computer Arithmetic, Prentice-Hall, 1963:83-89.

[7] KOJEMSKI A., KOWALEWSKA M., KULIŃSKA E., SINKIEWICZ T., ŚWIATKOWSKI Z.: Szybkie tranzystorowe układy logiczne S 50 /Opis ogólny/, PRACE IMM, Sprawozdanie Nr 4, 1965.

METODA RÓWNOLEGŁO-SZEREGOWEJ PROPAGACJI PRZENIESIEŃ W SZYBKICH SUMATORACH BINARNYCH

Streszczenie

Równoległe sumatory binarne zawierają układy do tworzenia cyfr wyniku na poszczególnych pozycjach oraz układy realizujące przeniesienie z mniej znaczących na bardziej znaczące pozycje sumatora. Metoda połączenia układów realizujących przeniesienia decyduje o szybkości wykonania operacji w sumatorze.

Znane metody połączenia układów realizujących: szeregową linię przeniesień /rys. 1/, szeregową linię przeniesień ze skokowym przyspieszeniem /rys.2/, linię przeniesień grupowych /rys. 3/, mogą być w sposób ogólny opisane następującymi wyrażeniami dwuargumentowej algebry Boole'a:

$$A \ldots \begin{cases} p_i = x_i + \sum_{k=1}^{r_i} x_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + p_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} + \sum_{q \in Q_i^*} p_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j} \\ \bar{p}_i = y_i + \sum_{k=1}^{r_i} y_{i-k} \prod_{j=0}^{k-1} R_{i-j} + \bar{p}_{i-m_i} \prod_{j=0}^{m_i-1} R_{i-j} + \sum_{q \in Q_i^*} \bar{p}_{i-q} \prod_{j=0}^{q-1} R_{i-j} \end{cases}$$

gdzie: p_i - przeniesienie sumatora z pozycji o numerze i,

$a_i, b_i \in \{0,1\}$ - są cyframi liczb dodawanych

$x_i = a_i b_i$; $y_i = \bar{a}_i \bar{b}_i$; $R_i = a_i \bar{b}_i + \bar{a}_i b_i$

$1 \leq m_i \leq r_i + 1 \leq i$ /i = 1, 2, ..., n-1/

oraz

Q_i^* - jest dowolnym podzbiorem zbioru wskaźników Q_i

$$Q_i^* \subset Q_i = \left\{ q : q = m_i + 1, m_i + 2, \ldots, i \right\},$$

Proponowana nowa metoda realizacji linii przeniesień charakteryzuje się rozdzieleniem tej linii na m podlinii działających równolegle, przy czym w każdej podlinii następuje szeregowa propagacja przeniesienia /rys. 4 i 5/. Metodę tę można również opisać wyrażeniami /A/, przyjmując:

$$m_i = \begin{cases} \cdot m & \text{dla} \quad m < i \leqslant n-1 \\ i & \text{dla} \quad 0 < i \leqslant m \end{cases}$$

$$r_i = m_i - 1$$

W zbiorze wskaźników $I = \left\{0,1, \ldots, n-1\right\}$ można wyróżnić m podzbiorów I_s definiowanych następująco:

$$I_s = \left\{ i : i = m \cdot k + s, \quad k = 0, 1, \ldots, E\left(\frac{n-1}{m}\right) \right\}$$
$$s = 0, 1, \ldots, m-1$$

określających równolegle działające podlinie linii przeniesień.

Maksymalny czas ustalania się przeniesień w linii przeniesień zrealizowanej w oparciu o proponowaną metodę, bez skokowego przyspieszania /gdy Q_i^* jest zbiorem pustym dla każdego i/, wynosi

$$T = \left(E\left[\frac{n-1}{m}\right] + 1 \right) \cdot \tau$$

gdzie

τ - jest maksymalnym opóźnieniem jednostkowym układu linii przeniesień realizującego jedno z równań /A/.

Ważną cechą metody z punktu widzenia realizacji technicznej jest to, że w wyrażeniach /A/ w każdej chwili spełniony jest co najwyżej jeden iloczyn, a w wielu dwuwarstwowych technikach realizacyjnych wymagane jest, aby działanie bramek wejściowych było rozłączne.

Przykładową realizację sumatora na elementach NORAND /rys. 6/ można opisać wzorami:

$$p_i = x_i + R_i x_{i-1} + R_i R_{i-1} x_{i-2} + R_i R_{i-1} R_{i-2} x_{i-3} + R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} x_{i-4} +$$
$$+ R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} R_{i-4} p_{i-5}$$

$$\bar{p}_i = y_i + R_i y_{i-1} + R_i R_{i-1} y_{i-2} + R_i R_{i-1} R_{i-2} y_{i-3} + R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} y_{i-4} +$$
$$+ R_i R_{i-1} R_{i-2} R_{i-3} R_{i-4} \bar{p}_{i-5}$$

gdzie przyjęto, że $m = 5$. Przy dodawaniu 24-bitowych liczb maksymalny czas ustalania się przeniesienia wynosi 5τ, gdzie τ jest maksymalnym opóźnieniem elementu NORAND. Możliwa jest również realizacja takiego sumatora na elementach NOR, NAND lub NANDOR.

PRACE IMM
Zeszyt 1
© 1968.03
681.325.65.093

POPRAWNOŚĆ TRANSFORMACJI SYGNAŁÓW W LINII CYFROWEJ

Andrzej KOJENSKI
Pracę złożono 31.12.1965

W pracy rozpatrzono warunki prawidłowej współpracy elementów logicznych połączonych kaskadowo w tzw. linię cyfrową. Uwzględniono przy tym relacje zachodzące pomiędzy parametrami fizycznymi sygnałów na wejściu i wyjściu każdego elementu logicznego, które reprezentują ich wartości logiczne. Podano kryterium poprawnej transformacji wartości tych parametrów sygnału w dowolnej linii cyfrowej, budowanej z elementów logicznych należących do rozpatrywanego zespołu. Sformułowano algorytm oceny poprawności takich transformacji na podstawie zbioru funkcji opisujących zależności wejściowo-wyjściowe dla elementów logicznych.

S p i s t r e ś c i

1. WSTĘP 2
2. CHARAKTERYSTYKA PRZENOSZENIA SYGNAŁU CYFROWEGO PRZEZ ELEMENT LOGICZNY I LINIĘ CYFROWĄ 28
3. PRZYKŁADY TRANSFORMACJI WARTOŚCI FIZYCZNYCH SYGNAŁU W LINIACH CYFROWYCH I WSTĘPNE WNIOSKI 30
4. TRANSFORMACJE WARTOŚCI FIZYCZNYCH SYGNAŁU W PRZYPADKU RÓŻNYCH CHARAKTERYSTYK PRZENOSZENIA 37
5. OGÓLNE WARUNKI POPRAWNEJ TRANSFORMACJI SYGNAŁÓW W LINII CYFROWEJ .. 42

6. ALGORYTM OCENY POPRAWNOŚCI TRANSFORMACJI SYGNAŁÓW W LINII CYFROWEJ 45
6.1. Przypadek monotonicznych charakterystyk granicznych 45
6.2. Przypadek niemonotonicznych charakterystyk granicznych 50
7. ZAKOŃCZENIE 59
Literatura 61
Summary 61

1. WSTĘP

Elementami logicznymi nazywamy te składniki urządzenia cyfrowego /a w szczególności maszyny cyfrowej/, które realizują pomiędzy pewnymi wielkościami fizycznymi sygnału na wyjściu i sygnałów wejściowych zależności odpowiadające określonym funkcjom logicznym. Zwykle nazwę tę przypisuje się tylko najmniejszym dającym się wyróżnić układom fizycznym, które mają wyraźnie wyprowadzone na zewnątrz zaciski wejściowe i wyjściowe. Bardziej złożone układy traktuje się wówczas jako zestawy odpowiednio powiązanych elementów logicznych. Najczęściej stosowane są elementy logiczne dwójkowe i dlatego rozważania w tej pracy ograniczymy do tego typu elementów logicznych.

Budowa urządzenia cyfrowego złożonego z elementów logicznych polega na dokonaniu właściwych połączeń między ich wejściami i wyjściami. Przy realizacji takich połączeń obok właściwości logicznych istotne są również pewne właściwości fizyczne poszczególnych elementów logicznych, związane ze współpracą z innymi elementami logicznymi. Do tych właściwości fizycznych należy zaliczyć przede wszystkim:

a. opóźnianie sygnałów wyjściowych względem sygnałów wejściowych

b. dokonywanie pomiędzy wejściami i wyjściami poszczególnych elementów logicznych określonych transformacji wartości tych fizycznych parametrów sygnałów, które reprezentują ich wartości logiczne.

Właściwa ocena opóźnień sygnałów wnoszonych przez poszczególne elementy logiczne jest ważna przy ich łączeniu, gdyż umożliwia odpowiednie zsynchronizowanie w czasie oddziaływań różnych sygnałów. Znajomość transformacji poprzez elementy logiczne wartości tych parametrów fizycznych sygnałów, które są "nośnikami" wartości logicznych sygnałów, umożliwia prześledzenie sposobu przekazywania sygnałów pomiędzy elementami logicznymi od strony fizycznej.

Tematem artykułu są rozważania dotyczące procesów fizycznych zachodzących przy współpracy elementów logicznych, z uwzględnieniem właściwości wymienionych tylko w punkcie b. Ogólne rozpatrzenie tych procesów w złożonych sieciach logicznych jest trudne. Najłatwiej prześledzić je w przypadku prostych konfiguracji połączeń elementów logicznych. Do takich najprostszych konfiguracji należy l i n i a c y f r o w a , stanowiąca kaskadowe połączenie dwóch lub większej liczby elementów logicznych, przy którym sygnał wyjściowy poprzedniego elementu stanowi jednocześnie sygnał wejściowy następnego elementu logicznego /rys. 2/.

Proces fizycznych zmian sygnałów wzdłuż linii cyfrowych był rozpatrywany w kilku publikacjach [1-5]. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie algorytmu oceny poprawności tego procesu. Zaprezentowano tu inny sposób podejścia do tego zagadnienia, ze szczególnym zwróceniem uwagi na przypadek niemonotonicznych zależności pomiędzy parametrami fizycznymi sygnału na wejściu i wyjściu elementów logicznych.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia: $\wedge$ - koniunkcja, $\vee$ - dysjunkcja, $\cap$ - iloczyn zbiorów, $\cup$ - suma zbiorów, $\times$ - iloczyn kartezjański zbiorów, $\bigwedge$ - kwantyfikator ogólny, $\bigvee$ - kwantyfikator szczegółowy /egzystencjalny/. Uporządkowany zestaw liczb oznaczono przez ujęcie ich w nawiasy okrągłe. Zbiór elementów x spełniających funkcję zdaniową $\varphi(x)$ oznaczono następująco: $\{x: \varphi(x)\}$ Zbiór wartości funkcji $f(x)$ dla wszystkich wartości $x \in X$ oznaczono jako $f(X)$. Zbiór pusty oznaczono symbolem 0.

2. CHARAKTERYSTYKA PRZENOSZENIA SYGNAŁU CYFROWEGO PRZEZ ELEMENT LOGICZNY I LINIĘ CYFROWĄ

Dla zespołu elementów logicznych zwykle jeden z parametrów fizycznych, najczęściej ten sam dla sygnałów wejściowych i wyjściowych, reprezentuje wartość logiczną sygnałów. W dalszych rozważaniach załóżmy, że właśnie to zachodzi i wartość tego parametru fizycznego dla określonego sygnału będziemy nazywali w skrócie wartością fizyczną tego sygnału /w odróżnieniu od jego wartości logicznej "1" lub "0"/.

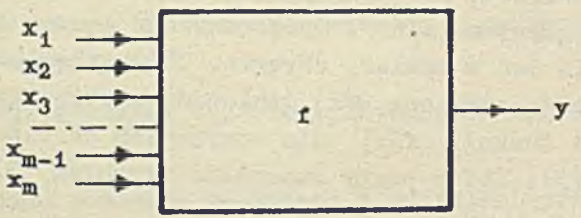
C h a r a k t e r y s t y k ą p r z e n o s z e n i a s y g n a ł u c y f r o w e g o /zwaną dalej w skrócie charakterystyką przenoszenia/ elementu logicznego nazwiemy funkcję określającą zależność wartości fizycznej sygnału na wyjściu tego elementu od wartości fizycznej sygnałów na jego wejściach. Ogólnie charakterystykę przenoszenia elementu logicznego o jednym wyjściu i m wejściach /rys. 1/ można przedstawić jako funkcję f

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_m, r\right) \qquad /1/$$

gdzie y - wartość fizyczna sygnału wyjściowego

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ - wartości fizyczne sygnałów wejściowych

r - punkt pracy elementu logicznego; współrzędne tego punktu są określone w wielowymiarowej przestrzeni parametrów pracy tego elementu



Rys. 1. Element logiczny przedstawiony w postaci pudełka z jednym wyjściem i m wejściami. Wewnątrz pudełka zaznaczono charakterystykę przenoszenia f. Kierunki przepływu sygnału oznaczono strzałkami.

Po założeniu stałych wartości fizycznych dla m-1 sygnałów wejściowych, tj. dla wszystkich wejść z wyjątkiem i-tego, otrzymamy uproszczoną charakterystykę przenoszenia

$$y = f(x_i, r), \qquad /2/$$

która dla określonego punktu pracy r ma postać funkcji jednej zmiennej. Przedstawia ona przekształcanie wartości fizycznej sygnału poprzez element logiczny przy jego pracy w linii cyfrowej.

Podobnie jak dla pojedynczego elementu logicznego, można określić jednoargumentową charakterystykę przenoszenia dla linii cyfrowej złożonej z n elementów logicznych /rys. 2/. Za wejście linii cyfrowej przyjmujemy przy tym wejście pierwszego elementu logicznego, na które oddziaływuje sygnał przyłożony z zewnątrz, a jako wyjście linii cyfrowej traktujemy wyjście ostatniego elementu logicznego, które nie oddziaływuje na pozostałe elementy tej linii. Charakterystykę przenoszenia linii cyfrowej można przedstawić w postaci superpozycji charakterystyk przenoszenia kolejnych elementów logicznych

$$f^n(x) = f_n\left(f_{n-1}\left(f_{n-2} \cdots f_2(f_1(x))\cdots\right)\right) \qquad /3/$$

gdzie x - wartość fizyczna sygnału na wejściu linii cyfrowej

$f^n(x)$ - charakterystyka przenoszenia linii cyfrowej złożonej z n elementów logicznych

$f_1, f_2, \cdots f_{n-2}, f_{n-1}, f_n$ - charakterystyki przenoszenia kolejnych elementów logicznych w linii cyfrowej, numerowanych poczynając od wejścia tej linii

Rys. 2. Schemat linii cyfrowej złożonej z n elementów logicznych. Elementy logiczne przedstawiono w postaci pudełek.

Najczęściej charakterystyki przenoszenia elementów logicznych są nieliniowe. Stąd określanie charakterystyki przenoszenia linii

cyfrowej na podstawie charakterystyk przenoszenia elementów logicznych jest zwykle złożone. Należy przy tym zwrócić uwagę, że charakterystyka linii cyfrowej zależy nie tylko od charakterystyk składowych poszczególnych elementów logicznych, ale również od kolejności w jakiej one występują.

3. PRZYKŁADY TRANSFORMACJI WARTOŚCI FIZYCZNYCH SYGNAŁU W LINIACH CYFROWYCH I WSTĘPNE WNIOSKI

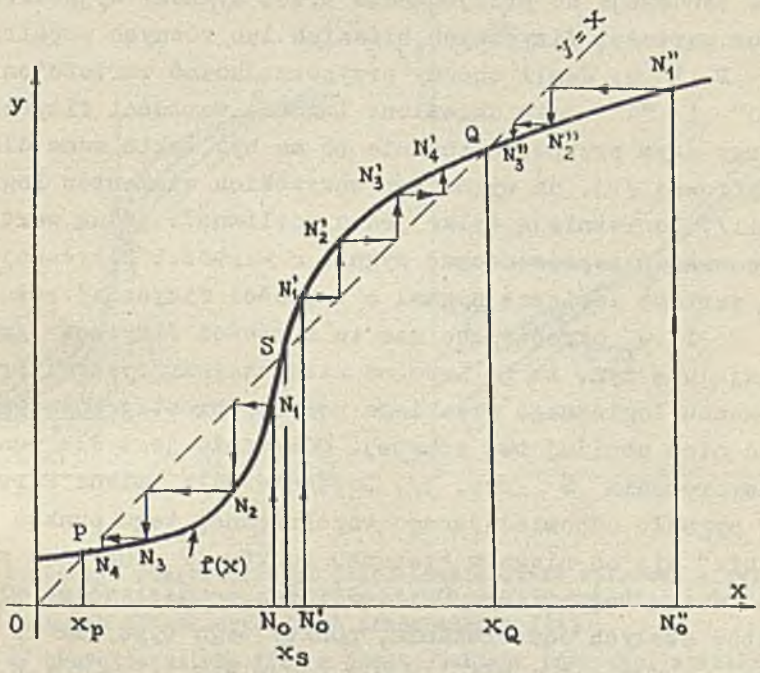
Przyjmijmy, że jednoargumentowa charakterystyka przenoszenia elementu logicznego ma postać funkcji ciągłej, monotonicznej niemalejącej, o przebiegu we współrzędnych prostokątnych x y tak jak na rys. 3. Załóżmy dla uproszczenia, że rozpatrujemy linię cyfrową złożoną z elementów logicznych o identycznych charakterystykach przenoszenia, takich jak powyższa. Poprowadźmy przez początek O układu współrzędnych prostą o równaniu

$$y = x, \qquad /4/$$

którą nazwijmy p r o s t ą r ó w n o w a g i. Zauważmy, że punkty P, S, Q, w których prosta równowagi przecina się z charakterystyką przenoszenia, stanowią punkty stałe odwzorowania wartości fizycznych sygnału wejściowego na wartości fizyczne sygnału wyjściowego. Stąd sygnały wejściowe linii cyfrowej o wartościach równych współrzędnym x_P, x_S i x_Q tych punktów /odcięte równają się rzędnym/ nie zmieniają swej wartości przy przejściu przez dowolną liczbę elementów logicznych. Charakterystyka przenoszenia linii cyfrowej powinna więc również przebiegać przez punkty P, S i Q.

Zmianę fizycznych wartości sygnałów wejściowych linii cyfrowej, różnych od x_P, x_S i x_Q, łatwo można zobrazować graficznie. Przez wykreślenie dla dowolnego sygnału wejściowego x łamanej linii złożonej z pionowych i poziomych odcinków /rys. 3/, których końce leżą na prostej równowagi i charakterystyce przenoszenia elementu logicznego, otrzymamy ciąg punktów N_1, N_2, N_3... . Rzędne tych punktów określają odpowiednio wartości fizyczne sygnału na wyjściu pierwszego, drugiego, trzeciego i dalszych elementów logicz-

nych linii cyfrowej. Przy przyjętych założeniach dla rozpatrywanej linii cyfrowej, dowolnej wartości fizycznej sygnału wejściowego, różnej od x_P, x_S i x_Q, odpowiada pewien monotonicznie zmieniający się ciąg wartości fizycznych sygnałów na wyjściach kolejnych elementów logicznych. Każdy z tych ciągów jest przy tym zbieżny i dąży do granicy równej wartości współrzędnej odpowiedniego punktu stałego odwzorowania. Dla dostatecznie dużej liczby elementów w



Rys. 3. Ilustracja zmian wartości fizycznej sygnału na kolejnych wyjściach elementów logicznych o identycznych charakterystykach przenoszenia, w linii cyfrowej złożonej z tych elementów.

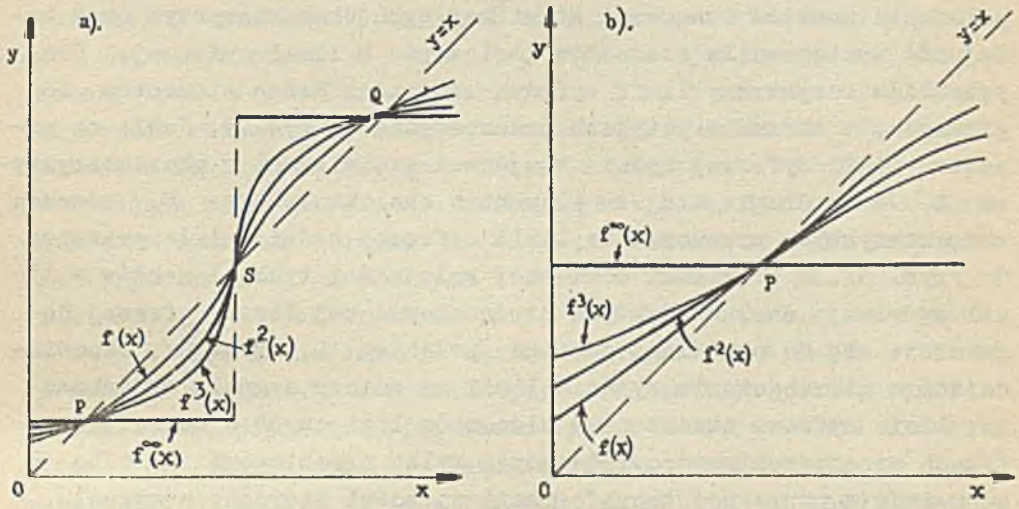
linii cyfrowej sygnały wejściowe linii o wartościach $x > x_S$ dają sygnały na wyjściu linii o wartości dowolnie mało różniącej się od x_Q, a sygnały wejściowe o wartościach $x < x_S$ dają sygnały wyjściowe dowolnie mało różniące się od x_P. W efekcie, charakterystyka przenoszenia $f^{\infty}(x)$, dla linii cyfrowej o liczbie elementów logicznych dążącej do nieskończoności, ma przebieg skokowy tak jak pokazano na rys. 4a. Charakterystyki przenoszenia linii cyfrowej złożonej z dwu elementów / $f^2(x)$ /, trzech elementów

$/f^3(x)/$ i większej liczby elementów leżą w obszarze zawartym pomiędzy charakterystykami $f(x)$ i $f^{\infty}(x)$ /rys. 4a/. Przy zwiększaniu liczby elementów w linii cyfrowej wzrasta nachylenie jej charakterystyki przenoszenia w punkcie S.

Widać stąd, że w rozpatrywanej linii cyfrowej, złożonej z elementów logicznych o jednakowych charakterystykach przenoszenia, istnieje tendencja do przyjmowania przez sygnały wyjściowe tych elementów wartości fizycznych bliskich lub równych współrzędnym punktów P i Q. Jeśli chcemy przyporządkować wartościom logicznym "0" i "1" dwie określone i różne wartości fizyczne sygnału, przy czym przyporządkowanie to ma być takie same dla całej linii cyfrowej /tj. na wyjściach wszystkich elementów logicznych tej linii/, to istnieje tylko jedna możliwość: jedną wartość logiczną powinien reprezentować sygnał o wartości fizycznej x_P, a drugą wartość logiczną sygnał o wartości fizycznej równej x_Q. Punkty P i Q określające nam te wartości fizyczne /rys. 3/ odznaczają się tym, że na lewo od nich charakterystyka przenoszenia elementu logicznego przebiega powyżej prostej równowagi i na prawo od nich poniżej tej prostej. Odwrotnie jest dla punktu stałego odwzorowania S /rys. 3/. Dowolnie mała zmiana wartości fizycznej sygnału odpowiadającego współrzędnej tego punktu powoduje "oddalanie" się od niego w kierunku punktu P lub Q, w zależności od znaku tej zmiany. Uwzględniając te szczególne właściwości punktów stałych odwzorowania, punkty tego typu jak P i Q nazwijmy p u n k t a m i r ó w n o w a g i s t a b i l n e j, a punkty tego typu jak S p u n k t a m i r ó w n o w a g i n i e s t a b i l n e j.

Aby lepiej zobrazować rolę punktów równowagi stabilnej można prześledzić charakterystyki przenoszenia linii cyfrowej złożonej z elementów logicznych o takich charakterystykach $f(x)$ wg rys. 4b, które posiadają tylko jeden punkt równowagi stabilnej. Widać tu, że wraz ze wzrostem liczby elementów logicznych charakterystyka linii cyfrowej przebiega coraz bardziej poziomo, a dla krańcowego przypadku, przy nieskończonej liczbie elementów degeneruje się do odcinka linii prostej, poziomej $f^{\infty}(x)$. Pomimo pełnych zmian wartości fizycznej sygnału na wejściu linii cyfrowej, przy

dostatecznej liczbie elementów logicznych, zmiany sygnału na wyjściu linii mogą być mniejsze od dowolnie małego założonego progu rozróżnialności. Nie można tu wyróżnić dwóch różnych wartości fizycznych sygnałów, którym podobnie jak poprzednio można by przypisać wartości logiczne "0" i "1".



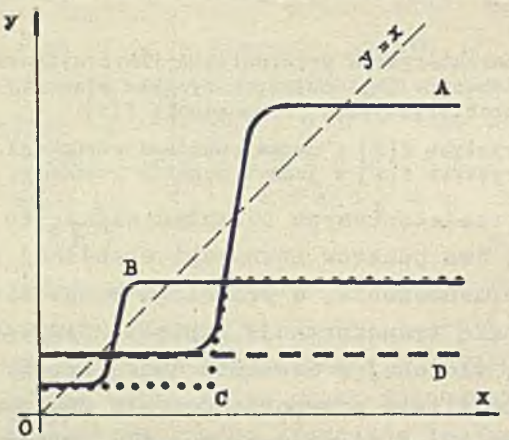
Rys. 4. Przebiegi charakterystyk przenoszenia linii cyfrowej w zależności od liczby elementów logicznych. Wszystkie elementy logiczne o jednakowych charakterystykach przenoszenia $f(x)$

a/ charakterystyka $f(x)$ z dwoma punktami równowagi stabilnej,
b/ charakterystyka $f(x)$ z jednym punktem równowagi stabilnej.

Na podstawie przedstawionych rozważań widać, że jedynie posiadanie co najmniej dwu punktów równowagi stabilnej przez ciągłą charakterystykę przenoszenia, o przebiegu monotonicznym niemalejącym, zapewnia taką transformację wartości fizycznych sygnału w linii cyfrowej, złożonej z dowolnie dużej liczby elementów logicznych, która umożliwia przyporządkowanie dwu wartościom logicznym różnych wartości fizycznych sygnału. Będziemy mówili, że dla tego przypadku występuje p o p r a w n a t r a n s f o r m a c j a w a r t o ś c i f i z y c z n y c h s y g n a ł u w linii cyfrowej. Brak dwu punktów równowagi stabilnej uniemożliwia znalezienie dwu różnych wartości fizycznych sygnału, którym

można by przypisać różne wartosci logiczne. Będziemy mówili, że w tym przypadku, w przeciwieństwie do poprzedniego, występuje n i e p o p r a w n a t r a n s f o r m a c j a wartości fizycznych sygnału.

W przypadku współpracy w jednej linii cyfrowej elementów logicznych o różnych charakterystykach przenoszenia istotne są: wzajemne położenia punktów równowagi stabilnej tych charakterystyk oraz kolejność występowania elementów logicznych w linii cyfrowej. Dla przykładu rozpatrzmy linię cyfrową złożoną z dwóch elementów logicznych, o charakterystykach przenoszenia wg rys. 5. Jeśli na początku linii cyfrowej będzie znajdował się element o charakterystyce A, a na drugim miejscu element o charakterystyce B, wówczas charakterystyka przenoszenia linii cyfrowej będzie miała przebieg C /rys. 5/. W przypadku odwrotnej kolejności tych elementów w linii cyfrowej, charakterystyka przenoszenia tej linii cyfrowej degeneruje się do poziomego odcinka /przebieg D, rys. 5/, odpowiadającego niereagowaniu wyjścia linii na zmiany sygnału wejściowego. Linie cyfrowe zbudowane z elementów logicznych o charakterystykach przenoszenia odpowiadających tylko przebiegowi A albo B odpowiadają poprawnej transformacji wartości fizycznych sygnału.



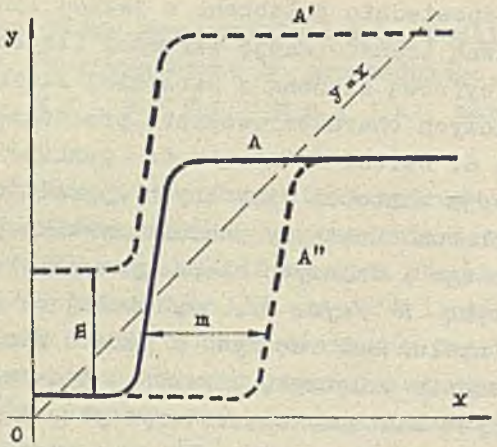
Rys. 5. Przebiegi charakterystyk przenoszenia dwóch elementów logicznych /A i B/ oraz dwóch odpowiadających im linii cyfrowych /C i D/

Inny przykład zilustruje, że elementy logiczne o takich charakterystykach przenoszenia, które mają tylko po jednym punkcie równo-

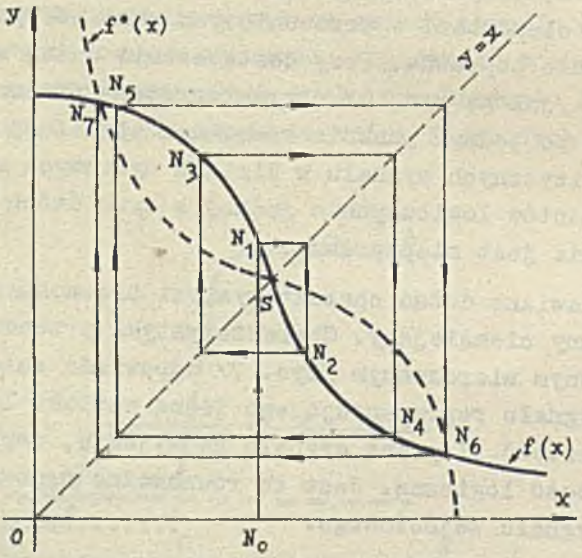
wagi stabilnej, odpowiednio połączone w jednej linii cyfrowej mogą zapewnić poprawną transformację wartości fizycznych sygnału. Rozpatrzmy linię cyfrową złożoną z parzystej liczby elementów logicznych o jednakowych charakterystykach przenoszenia, wg przebiegu A na rys. 6. Dzięki istnieniu dwu punktów równowagi stabilnej transformacja wartości fizycznych sygnału w takiej linii cyfrowej jest poprawna. Zastąpmy charakterystykę przenoszenia pierwszego, trzeciego i dalszych nieparzystych elementów logicznych charakterystyką A' /rys. 6/, odpowiadającą przesunięciu charakterystyki A wzdłuż osi rzędnych w górę o odcinek m. Charakterystykę przenoszenia drugiego, czwartego i dalszych parzystych elementów logicznych zastąpmy charakterystyką A'' /rys. 6/, odpowiadającą przesunięciu charakterystyki A wzdłuż osi odciętych w prawo o taki sam odcinek m. Ponieważ charakterystyka przenoszenia pary elementów logicznych o charakterystykach A' i A'' jest taka sama jak charakterystyka pary elementów o charakterystykach A i A, więc transformacja wartości fizycznych sygnału linii cyfrowej z elementami o przesuniętych charakterystykach przenoszenia będzie poprawna. Przy dostatecznie dużej wartości przesunięcia m /jak na rys. 6/ charakterystyki przenoszenia A' i A'' mają tylko po jednym punkcie równowagi stabilnej i transformacja wartości fizycznych sygnału w liniach cyfrowych złożonych wyłącznie z elementów logicznych o jednej z tych dwóch charakterystyk przenoszenia jest niepoprawna.

Przedstawiane dotąd charakterystyki przenoszenia miały przebieg monotoniczny niemalejący. Charakterystyka przenoszenia o przebiegu monotonicznym nierosnącym /rys. 7/ odpowiada zmianie wartości fizycznej sygnału reprezentującego jedną wartość logiczną na wejściu na inną wartość fizyczną sygnału na wyjściu, reprezentującą przeciwną wartość logiczną. Jest to równoważne negowaniu wartości logicznej sygnału wejściowego.

Transformacja wartości fizycznych sygnałów w linii cyfrowej złożonej z elementów logicznych o jednakowych charakterystykach przenoszenia wg rys. 7, może być przedstawiona podobnie jak poprzednio /rys. 3/ za pomocą linii łamanej /rys. 7/. Rzędne kolejnych punktów N_1, N_2, N_3 ... leżących na charakterystyce przeno-



Rys. 6. Charakterystyka przenoszenia A o dwóch punktach równowagi stabilnej i odpowiadające jej charakterystyki przenoszenia o jednym punkcie równowagi stabilnej, otrzymane przez przesunięcie pionowe /A'/ i poziome /A''/



Rys. 7. Ilustracja zmian wartości fizycznych sygnału na kolejnych wyjściach elementów logicznych o identycznych nierosnących charakterystykach przenoszenia w linii cyfrowej złożonej z tych elementów. Krzywa $f^*(x)$ jest odwróconą charakterystyką przenoszenia względem normalnej charakterystyki $f(x)$

szenia odpowiadają tu wartościom fizycznym sygnałów na wyjściach kolejnych elementów linii. Również i tu można wyróżnić punkty równowagi stabilnej i niestabilnej, odpowiadające stałym punktom odwzorowania wartości fizycznej sygnału poprzez parę kolejnych elementów logicznych. Punkty te łatwo można wyznaczyć przez naniesienie we współrzędnych prostokątnych xy o d w r ó c o n e j c h a r a k t e r y s t y k i p r z e n o s z e n i a /rys. 7/, odpowiadającej wzajemnej zamianie współrzędnych charakterystyki normalnej*. Punkty przecięcia się charakterystyki normalnej z charakterystyką odwróconą wyznaczają poszukiwane punkty równowagi.

Sygnał na wejściu rozpatrywanej linii cyfrowej, o wartości fizycznej równej odciętej jednego z punktów równowagi stabilnej, daje na wyjściu pierwszego elementu logicznego sygnał o wartości fizycznej równej rzędnej tego punktu** . Ten ostatni sygnał z kolei powoduje pojawienie się na wyjściu drugiego elementu logicznego w linii cyfrowej sygnału o wartości fizycznej takiej samej jak dla sygnału wejściowego tej linii. Dla następnych elementów logicznych w linii cyfrowej zachodzi podobna transformacja jak dla pierwszej pary. Oznacza to, że co drugi element logiczny w tej linii daje na wyjściu sygnał o takiej samej wartości fizycznej.

Rozpatrzenie współpracy elementów logicznych o różnych charakterystykach przenoszenia, włączając w to również charakterystyki o przebiegu niemonotonicznym, jest dość złożonym zadaniem i zostanie dokonane w dalszej części tej pracy.

4. TRANSFORMACJE WARTOŚCI FIZYCZNYCH SYGNAŁU W PRZYPADKU RÓŻNYCH CHARAKTERYSTYK PRZENOSZENIA

W zależności od wartości logicznej sygnałów na wyjściu i jednym z rozpatrywanych wejść elementu logicznego, będziemy mówili, że element ten działa t w i e r d z ą c o lub n e g u j ą c o, przyjmując przy tym te nazwy zgodnie z określeniami podanymi w ta-

---

* Przy jednakowej skali dla obu współrzędnych odwrócona charakterystyka przenoszenia stanowi zwierciadlane odbicie normalnej charakterystyki przenoszenia względem prostej równowagi.

** Można zauważyć, że punkty równowagi stabilnej są tu wzajemnie powiązane. Odcięta i rzędna danego punktu jest równa odpowiednio rzędnej i odciętej związanego z nim punktu, leżącego po przeciwnej stronie prostej równowagi.

beli 1. Podobnie określimy charakterystykę przenoszenia odpowiadającą twierdzącemu działaniu elementu logicznego jako charakterystykę przenoszenia typu twierdzącego /typ "t"/ i przy negującym działaniu elementu jako charakterystykę przenoszenia typu negującego /typ "n"/.

Dla przypadków podanych w p. 3, gdzie dodatkowo założono monotoniczność charakterystyk przenoszenia elementów logicznych, charakterystyki typu twierdzącego mają przebieg niemalejący /rys. 3/, a charakterystyki typu negującego nierosnący /rys. 7/.

Tabela 1

Określenie elementu logicznego o działaniu twierdzącym i negującym

Wartość logiczna sygnału na wejściu elementu logicznego	Wartość logiczna sygnału na wyjściu elementu logicznego	
	Element o działaniu twierdzącym /oznaczenie: t /	Element o działaniu negującym /oznaczenie: n/
0	0	1
1	1	0

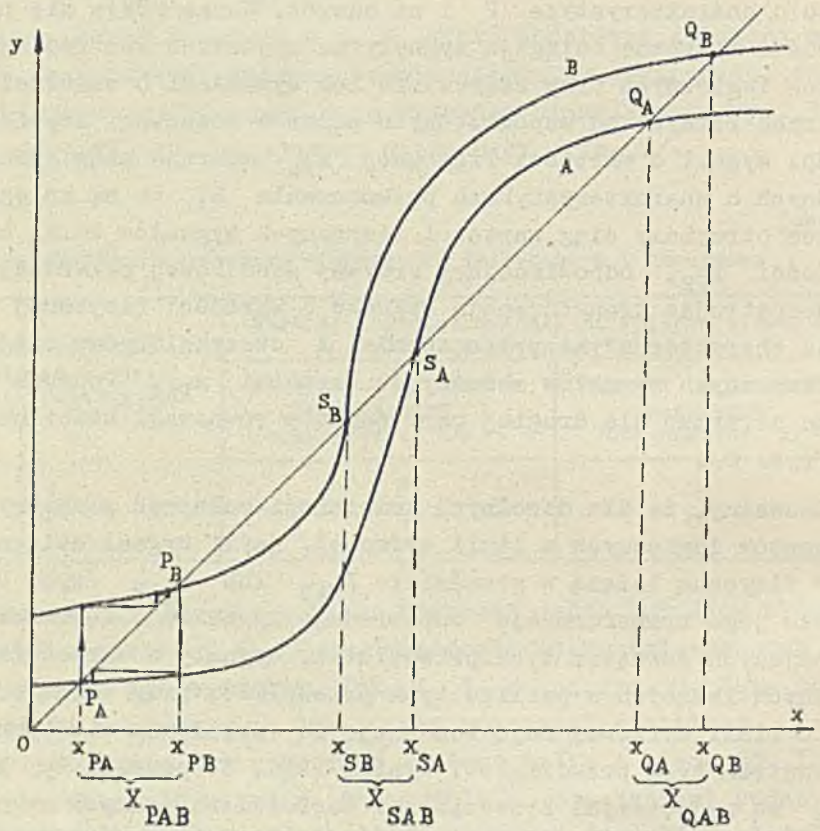
Rozpatrzmy współpracę w linii cyfrowej dwóch rodzajów elementów logicznych o różnych, ciągłych, monotonicznych, twierdzących charakterystykach przenoszenia, jak A i B na rys. 8. Obie te charakterystyki posiadają po dwa punkty równowagi stabilnej. Jeśli weźmiemy pod uwagę linię cyfrową złożoną tylko z elementów logicznych o charakterystykach A, to zgodnie z rozważaniami podanymi w p. 3, jako reprezentacje wartości logicznych sygnałów należy przyjąć dla tej linii wartości fizyczne x_{PA} i x_{QA}, równe odciętym punktów równowagi stabilnej P_A i Q_A. Podobnie jeśli będziemy rozpatrywali linię cyfrową złożoną tylko z elementów logicznych o charakterystykach B, to jako reprezentacje wartości logicznych sygnałów należy przyjąć ich wartości fizyczne x_{PB} i x_{QB}, równe odciętym punktów równowagi stabilnej P_B i Q_B.

Dla linii cyfrowej złożonej z dowolnej kombinacji elementów logicznych o charakterystykach przenoszenia A i B ogólnie biorąc

nie możemy zachować poprzednio przyjętej umowy, że wartości logiczne na wyjściach elementów logicznych są reprezentowane przez wartości fizyczne sygnałów równe odciętym odpowiednich punktów równowagi. Wynika to stąd, że na wejście elementu logicznego o charakterystyce A może być przyłożony sygnał wyjściowy pochodzący z elementu o charakterystyce B i na odwrót. Ważne staje się tu, jakie wartości fizyczne osiągają sygnały na wyjściach obu rodzajów elementów logicznych przy sterowaniu ich sygnałami o wartościach fizycznych różnych od współrzędnych punktów równowagi stabilnej. Jeśli np. sygnał o wartości fizycznej x_{PA} steruje ciąg elementów logicznych o charakterystykach przenoszenia B, to na kolejnych wyjściach otrzymamy ciąg wartości fizycznych sygnałów coraz bliższych wartości x_{PB}, odpowiadający krzywej schodkowej pokazanej na rys. 8. Rozpatrując transformacje sygnału o wartości fizycznej x_{PB} przez charakterystyki przenoszenia A otrzymalibyśmy ciąg wartości fizycznych sygnałów zbieżny do wartości x_{PA}. Podobne relacje można otrzymać dla drugiej pary punktów równowagi stabilnej Q_A i Q_B /rys. 8/.

Zauważmy, że dla dowolnych kombinacji połączeń rozpatrywanych elementów logicznych w linii cyfrowej, jeśli sygnał osiągnął wartość fizyczną leżącą w przedziale X_{PAB} lub X_{QAB} /rys. 8/, to dalsze jego transformacje odpowiadają sygnałom o wartościach pozostających wewnątrz tych przedziałów. Sygnały o wartościach fizycznych leżących w pobliżu tych przedziałów przy transformacji ich w linii cyfrowej mają tendencję do zbliżania się i wnikania do wnętrza tych przedziałów. Wynika stąd, że przedziały X_{PAB} i X_{QAB} są najwęższymi przedziałami wartości fizycznych sygnałów, dla których kolejne transformacje w linii cyfrowej odpowiadają pozostawaniu wewnątrz tych przedziałów. Szersze przedziały o tych właściwościach można uzyskać przesuwając odpowiednio krańce przedziału X_{PAB} lub X_{QAB}. Zauważmy, że zachodzi duże podobieństwo właściwości tego typu przedziałów z właściwościami poprzednio określonych punktów równowagi stabilnej. Z tego względu przedziały tego typu nazwiemy ogólnie p o d z b i o r a m i r ó w n o w a g i s t a b i l n e j. Jeśli dla całej rozpatrywanej linii cyfrowej /tj. na wyjściach wszystkich elementów logicznych tej linii/ chcemy jednolicie przyporządkować wartościom logicznym pewne

wartości fizyczne sygnałów, to należy to tak zrobić, aby poszczególnym wartościom logicznym odpowiadały różne rozłączne podzbiory równowagi stabilnej.



Rys. 8. Dwie charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego z odpowiednio zaznaczonymi podzbiorami równowagi stabilnej i niestabilnej

Pewne szczególne właściwości mają też sygnały o wartościach fizycznych leżących wewnątrz przedziału X_{SAB}, którego krańce są wyznaczone przez punkty równowagi niestabilnej charakterystyk przenoszenia A i B /rys. 8/. Kolejne transformacje takich sygnałów

linii cyfrowej mogą dawać sygnały o wartościach pozostających wewnątrz tego przedziału lub też wychodzących poza ten przedział w kierunku wartości mniejszych lub większych, w zależności od konkretnych sekwencji charakterystyk przenoszenia. Przedziały tego typu, posiadające właściwości podobne do poprzednio określonych punktów równowagi niestabilnej, nazwiemy ogólnie p o d z b i o r a m i r ó w n o w a g i n i e s t a b i l n e j. Wspomniana poprzednio możliwość rozszerzania podzbiorów równowagi stabilnej jest ograniczona właśnie przed podzbiór równowagi niestabilnej. Nie mogą istnieć dwa rozłączne podzbiory równowagi stabilnej w ten sposób, aby co najmniej jeden z nich zawierał pewne wartości należące do podzbioru równowagi niestabilnej, który jest położony na osi wartości fizycznych sygnałów między nimi.

Przykładem takiej sytuacji, gdy dwie charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego nie pozwalają na wyznaczenie dwóch rozłącznych podzbiorów równowagi stabilnej są przebiegi charakterystyk typu A i B na rys. 5. Odcięte obu punktów równowagi stabilnej charakterystyki B mają tu mniejsze wartości od odciętej punktu równowagi niestabilnej charakterystyki A.

Przedstawione powyżej rozważania dotyczące charakterystyk przenoszenia typu twierdzącego można odnieść odpowiednio do monotonicznych charakterystyk przenoszenia typu negującego, jeśli będziemy rozpatrywali transformacje wartości fizycznych sygnałów poprzez pary połączonych ze sobą elementów logicznych. Kierując się podobnymi jak poprzednio przesłankami, poszczególnym wartościom logicznym można przypisać różne rozłączne podzbiory równowagi stabilnej. Jednak w odróżnieniu od tego, jak to się robi dla charakterystyk przenoszenia typu twierdzącego, podzbiory równowagi stabilnej dla charakterystyk przenoszenia typu negującego powinny być wzajemnie powiązane. Powinny one być tak dobrane, aby transformacja wartości fizycznych w linii cyfrowej polegała na tym, że sygnał o wartości fizycznej należącej do jednego takiego podzbioru przyłożony do wejścia elementu logicznego wywołuje na jego wyjściu sygnał o wartości fizycznej należącej do drugiego podzbioru. Ten sygnał z kolei powinien wywoływać na wyjściu sterowanego elementu logicznego sygnał o wartości fizycznej należącej do pierwszego podzbioru itd.

Jeśli elementy logiczne o charakterystykach przenoszenia typu twierdzącego i negującego mają takie same dwa rozłączne podzbiory równowagi stabilnej /przy czym dla charakterystyk typu negującego są one wzajemnie powiązane, tak jak określono to wyżej/, wówczas przy ich wzajemnej współpracy w jednej linii cyfrowej możemy zachować przyjętą umowę przypisującą jednemu z tych podzbiorów równowagi stabilnej jedną wartość logiczną i drugiemu drugą wartość logiczną.

5. OGÓLNE WARUNKI POPRAWNEJ TRANSFORMACJI SYGNAŁÓW W LINII CYFROWEJ

Załóżmy, że rozpatrujemy pewien zespół elementów logicznych, któremu ze względu na to, że obejmuje różne rodzaje elementów oraz ze względu na rozrzuty wynikające z tolerancji elementów konstrukcyjnych i rozmaitych warunków pracy /np. różnych obciążeń wyjść elementów/, odpowiada zbiór F /skończony lub nie/ charakterystyk przenoszenia. W skład tego zbioru niech wchodzą charakterystyki typu twierdzącego i negującego.

Dodatkowo załóżmy, zgodnie z najpowszechniej występującymi przypadkami, że rozpatrywane charakterystyki przenoszenia są funkcjami jednoznacznymi ciągłymi. Przyjmijmy też, że wszystkie charakterystyki przenoszenia zbioru F są określone w takim przedziale wartości fizycznych sygnałów wejściowych

$$X = \left\{ x : \alpha \leqslant x \leqslant \delta \right\} \qquad /5/$$

gdzie α i δ oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość sygnałów wejściowych elementów logicznych, którą przyjęto do rozważań

który odwzorowuje się poprzez te charakterystyki zawsze w siebie*, tzn. zachodzi

$$f(X) \subset X \quad \text{dla dowolnej funkcji } f \in F \qquad /6/$$

* Ze względów fizycznych wartości sygnałów wyjściowych elementów logicznych są zwykle ograniczone od góry i od dołu, tak że znalezienie takiego przedziału nie sprawia kłopotu.

Nie wprowadzajmy, w odróżnieniu od poprzednich rozważań, żadnych ograniczeń co do monotoniczności charakterystyk przenoszenia.

Rozważmy transformacje wartości fizycznych sygnału w liniach cyfrowych złożonych z elementów logicznych należących do rozpatrywanego zespołu. Podobnie jak poprzednio przyjmijmy, że sygnały o tych samych wartościach fizycznych, występujące na wyjściach różnych elementów logicznych linii cyfrowej, mogą reprezentować tylko jedną i zawsze tę samą wartość logiczną sygnału. Z przedstawionych w p. 4 rozważań wynika, że w ogólnym przypadku nieidentycznych charakterystyk przenoszenia elementów logicznych w linii cyfrowej, wartości logiczne sygnałów w tej linii nie mogą być reprezentowane przez dwie wyróżnione wartości fizyczne sygnałów. Stąd wartości logiczne sygnałów powinny być reprezentowane przez pewne rozłączne podzbiory wartości fizycznych sygnałów. Oznaczmy podzbiór odpowiadający wartości logicznej "0" jako X_0 i podzbiór odpowiadający wartości logicznej "1" jako X_1. Podzbiory te powinny spełniać zależności

$$X_0 \cap X_1 = 0; \qquad /X_0 \cup X_1/ \subset X \qquad /7/$$

Jeśli uwzględnimy, że relacjom pomiędzy wartościami logicznymi sygnałów na wejściu i wyjściu każdego elementu logicznego /tabela 1/ powinny odpowiadać określone relacje wartości fizycznych sygnałów, to otrzymamy

$$\left.\begin{array}{l} f(X_0) \subset X_0 \\ f(X_1) \subset X_1 \end{array}\right\} \quad \text{dla } f \in F \quad \text{gdzie f jest charakterystyką przenoszenia typu twierdzącego} \qquad /8/$$

$$\left.\begin{array}{l} f(X_0) \subset X_1 \\ f(X_1) \subset X_0 \end{array}\right\} \quad \text{dla } f \in F \quad \text{gdzie f jest charakterystyką przenoszenia typu negującego} \qquad /9/$$

Gdy weźmiemy pod uwagę tylko charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego, to zależność /8/ określa nam podzbiory X_0 i X_1 jako dwa rozłączne podzbiory równowagi stabilnej dla tych charakterystyk, zdefiniowane w p. 4*. Podobnie jeśli uwzględnimy tylko charakterystyki przenoszenia typu negującego, to zależność /9/

---

* Rozszerzamy w porównaniu do rozważań podanych w p. 4 pojęcie podzbioru równowagi stabilnej, nie wprowadzając ograniczenia co do monotoniczności charakterystyk przenoszenia.

określa nam dwa podzbiory X_0 i X_1 jako dwa rozłączne podzbiory równowagi stabilnej dla tych charakterystyk, odpowiednio powiązane ze sobą, tak jak to opisano w p. 4. Zależności /8/ i /9/ łącznie uwzględniają fakt przyjęcia takich samych podzbiorów równowagi stabilnej dla dwu typów charakterystyk przenoszenia.

Spójrzmy teraz na zależności /8/ i /9/ z drugiej strony. Jeśli dla rozpatrywanego zbioru F charakterystyk przenoszenia istnieją podzbiory wartości fizycznych X_0 i X_1 spełniające zależności /8/ i /9/, to podzbiory te można przypisać dwu różnym wartościom logicznym sygnałów. Uogólniając określenie podane poprzednio w p.3 będziemy mówili, że zachodzi wówczas poprawna transformacja wartości fizycznych sygnału w liniach cyfrowych złożonych z elementów logicznych o charakterystykach przenoszenia ze zbioru F.

Najprostszy model i zarazem najbliższy rzeczywistym warunkom pracy elementów logicznych otrzymamy wtedy, gdy założymy, że podzbiory X_0 i X_1 są w postaci przedziałów wartości*

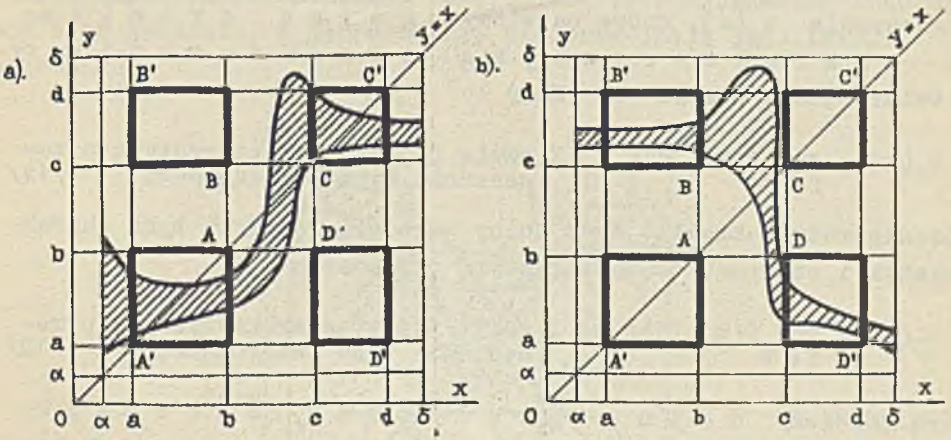
$$X_0 = \{x: a \leqslant x \leqslant b\} ; \quad X_1 = \{x: c \leqslant x \leqslant d\} \qquad /10/$$

gdzie $\alpha \leqslant a \leqslant b < c \leqslant d \leqslant \delta$.

W tym przypadku warunek poprawnej transformacji wartości fizycznych ma prostą interpretację geometryczną. We współrzędnych prostokątnych xy, w których przedstawione są charakterystyki przenoszenia ze zbioru F, narysujmy cztery prostokątne obszary odpowiadające odpowiednim kombinacjom par wartości współrzędnych (a, b) i (c, d) na obu osiach /rys. 9, prostokąty zaznaczono grubą linią/. Warunek nasz sprowadzi się teraz do tego, by każda charakterystyka przenoszenia dla zakresu wartości fizycznych sygnałów wejściowych $x \in X_0$ i $x \in X_1$ leżała w odpowiednim obszarze prostokątnym. Prawidłowy przebieg charakterystyk przenoszenia pokazano na rys. 9a i b, gdzie w postaci zakreskowanych obszarów przedstawiono pola, wewnątrz których przebiegają wszystkie charakterystyki typu twierdzącego i negującego

* Założenie takie jest uzasadnione między innymi tym, że funkcje rozkładów wartości parametrów elementów konstrukcyjnych i wartości napięć zasilających wewnątrz przedziałów rozrzutów są ciągłe. Oprócz tego przy konstrukcji różnych rodzajów elementów logicznych wchodzących w skład tego samego zespołu zwykle, ze względu na ich współpracę, przyjmuje się podobne nominalne wartości fizyczne sygnałów wyjściowych.

których przebiegają wszystkie charakterystyki typu twierdzącego i negującego.



Rys. 9. Ilustracja poprawnego przebiegu charakterystyk przenoszenia typu twierdzącego /a/ i negującego /b/, zapewniającego poprawną transformację wartości fizycznych sygnału w dowolnej linii cyfrowej.

Dla wykazania, że przy przyjęciu zależności /10/ zachowana jest poprawna transformacja wartości fizycznych sygnału należy udowodnić, że dla danego zbioru F charakterystyk przenoszenia można znaleźć co najmniej jedną czwórkę liczb (a, b, c, d) spełniających określone wymagania. Na podstawie braku jakiejkolwiek czwórki odpowiednich liczb można wnioskować, że istnieje taki ciąg elementów logicznych, któremu odpowiada niepoprawny proces transformacji wartości fizycznych sygnału. Dalsza część artykułu jest poświęcona sformułowaniu algorytmu oceny istnienia takiej czwórki liczb.

6. ALGORYTM OCENY POPRAWNOŚCI TRANSFORMACJI SYGNAŁÓW W LINII CYFROWEJ

6.1. Przypadek monotonicznych charakterystyk granicznych

Weźmy pod uwagę charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego, należące do rozpatrywanego zbioru F charakterystyk przenoszenia.

Dla każdej wartości odciętej x można określić kres górny wartości rzędnych tych charakterystyk. Jeśli zrobimy tak dla całego zakresu zmian $x \in X$, to otrzymane punkty dadzą nową charakterystykę przenoszenia $t_g(x)$, którą nazwiemy g ó r n ą g r a n i c z n ą c h a r a k t e r y s t y k ą p r z e n o s z e n i a typu twierdzącego zbioru F. Mamy

$$t_g(x) = \sup_{f \in F} f(x) \quad \text{dla } x \in X \text{ gdzie } f \text{ jest charakterystyką przenoszenia typu twierdzącego} \qquad /11/$$

Podobnie można określić kres dolny wartości rzędnych tych charakterystyk i otrzymać charakterystykę przenoszenia

$$t_d(x) = \inf_{f \in F} f(x) \quad \text{dla } x \in X \text{ gdzie } f \text{ jest charakterystyką przenoszenia typu twierdzącego} \qquad /12/$$

którą nazwiemy d o l n ą g r a n i c z n ą c h a r a k t e r y s t y k ą p r z e n o s z e n i a typu twierdzącego zbioru F.

Postępując podobnie jak wyżej dla charakterystyk przenoszenia typu negującego należących do zbioru F, możemy określić górną graniczną charakterystykę przenoszenia typu negującego zbioru F

$$n_g(x) = \sup_{f \in F} f(x) \quad \text{dla } x \in X \text{ gdzie } f \text{ jest charakterystyką przenoszenia typu negującego} \qquad /13/$$

i dolną graniczną charakterystykę przenoszenia typu negującego zbioru F

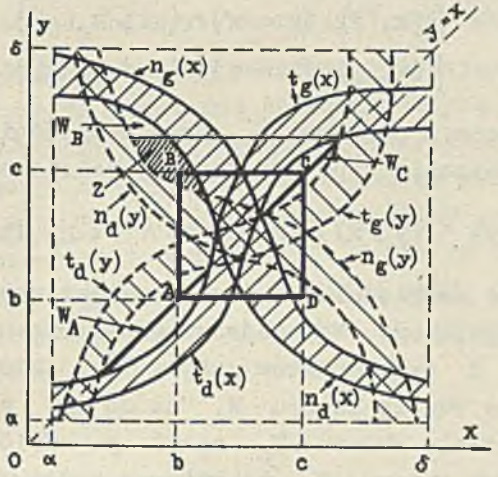
$$n_d(x) = \inf_{f \in F} f(x) \quad \text{dla } x \in X \text{ gdzie } f \text{ jest charakterystyką przenoszenia typu negującego} \qquad /14/$$

Załóżmy, że wszystkie powyższe graniczne charakterystyki przenoszenia mają przebieg monotoniczny. Łatwo spostrzec, że w tym przypadku poszukiwanie wartości fizycznych sygnałów (a, b, c, d) określonych w p. 5 można sprowadzić do poszukiwania tylko wartości (b, c), zakładając bez wpływu na dalsze postępowanie

$$a = \alpha; \qquad d = \delta \qquad /15/$$

Przy przyjęciu jednakowej skali dla obu osi współrzędnych x i y, w których przedstawione są graniczne charakterystyki, za-

danie można interpretować geometrycznie jako badanie, czy istnieje kwadrat ABCD /rys. 9 i 10/, który ma tę właściwość, że graniczne charakterystyki przenoszenia zbioru F przecinają dolny i górny bok tego kwadratu, a jednocześnie nie przecinają jego lewego i prawego boku.



Rys. 10. Normalne i odwrócone graniczne charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego i negującego o przebiegu monotonicznym. Na rysunku zaznaczono obszary odpowiadające zbiorom opisywanym w tekście.

Utwórzmy zwierciadlane odbicie obrazu charakterystyk przenoszenia względem prostej równowagi. Otrzymamy w ten sposób odwrócone graniczne charakterystyki przenoszenia /rys. 10/.

Rozpatrzmy też zwierciadlane odbicie kwadratu ABCD. Ponieważ jego wierzchołki A i C leżą na prostej równowagi, więc ich odbicie pokrywa się z nimi samymi. Pozostałe wierzchołki kwadratu B i D są wzajemnie symetryczne względem prostej równowagi i ich odbicia zwierciadlane zamieniają się odpowiednio na te same dwa punkty D i B. Stąd zamiast rozpatrywania położenia punktów A, B, C i D względem granicznych charakterystyk przenoszenia można badać położenie punktów A, B i C względem normalnych i odwróconych granicznych charakterystyk przenoszenia. Miejscami geometrycznymi punktów A, B i C będą przy tym odpowiednie obszary ograni-

czone przez normalne i odwrócone graniczne charakterystyki przenoszenia. Miejscem geometrycznym punktów A i C, przy uwzględnieniu tylko charakterystyk przenoszenia typu twierdzącego, będą odpowiednio zbiory W_A i W_C w postaci odcinków położonych na prostej równowagi

$$W_A = \left\{ (x, y): (y = x) \wedge (x \geqslant t_g(x)) \right\} \qquad /16/$$

$$W_C = \left\{ (x, y): (y = x) \wedge (x \leqslant t_d(x)) \right\} \qquad /17/$$

Miejscem geometrycznym punktów B, przy uwzględnieniu tylko charakterystyk przenoszenia typu negującego, będzie zbiór W_B

$$W_B = \left\{ (x, y): \quad (y \geqslant x) \wedge (x \geqslant n_g(y)) \wedge (y \leqslant n_d(x)) \right\} \qquad /18/$$

Jeśli jednocześnie uwzględnimy charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego i negującego, to miejscem geometrycznym punktów B będzie podzbiór Z tych punktów zbioru W_B, których współrzędne x zawierają się w rzucie zbioru W_A na oś x, a współrzędne y zawierają się w rzucie zbioru W_C na oś y. Zbiór Z można określić jako iloczyn zbioru W_B ze zbiorem będącym wynikiem mnożenia kartezjańskiego rzutów zbiorów W_A i W_C na odpowiednie osie

$$Z = W_B \cap \left\{ \left\{ x: \bigvee_y ((y = x) \wedge (x \geqslant t_g(x))) \right\} \times \left\{ y: \bigvee_x ((y = x) \wedge (x \leqslant t_d(x))) \right\} \right\} \qquad /19/$$

Gdy zbiór Z nie jest pusty, to przyjmując jeden z jego punktów za wierzchołek B poszukiwanego kwadratu jednoznacznie wyznaczamy wartości fizyczne sygnałów b i c, równe odpowiednio odciętej i rzędnej tego punktu. Stąd warunek poprawności transformacji sygnałów w linii cyfrowej ma dla rozpatrywanego przypadku postać

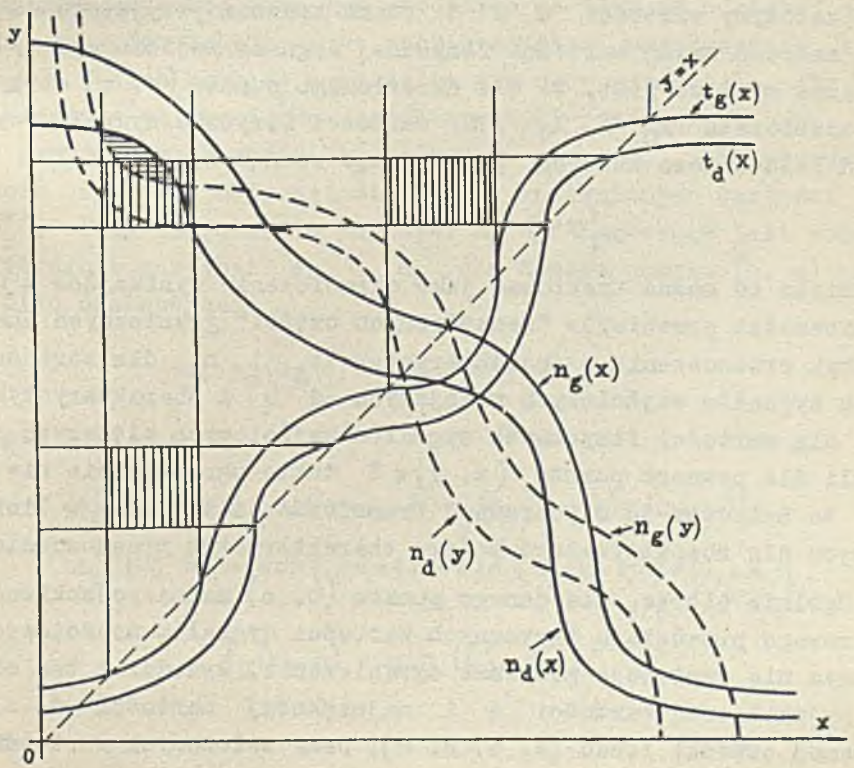
$$Z \neq 0 \qquad /20/$$

Sprawdzanie powyższego warunku ma prostą interpretację geometryczną /rys. 11/. Na prostej równowagi określamy te jej odcinki, które leżą powyżej górnej granicznej charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego* . Przez końce tych odcinków przeprowadzamy pół-

* Często występuje tylko jeden taki odcinek. Dla zilustrowania, że przedstawiona metoda obejmuje również bardziej złożone przypadki, na rys. 11 specjalnie przedstawiono graniczne charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego i negującego o dość złożonym przebiegu odpowiadające większej liczbie rozpatrywanych odcinków.

proste pionowe ponad prostą równowagi. Obszary zawarte między tymi półprostymi wyznaczają pasy pionowe. Następnie określamy na prostej równowagi te jej odcinki, które leżą poniżej dolnej granicznej charakterystyki przenoszenia typu twierdzącego. Przez końce tych odcinków prowadzimy w lewo półproste, które wyznaczają obszary w postaci pasów poziomych. Przecięcia się pasów pionowych i poziomych dają nam prostokątne obszary /na rys. 11 zakreskowane pionowo/.

Z kolei znajdujemy obszary położone powyżej prostej równowagi i zwarte między dolną graniczną charakterystyką przenoszenia typu negującego i odwróconą górną graniczną charakterystykę przenoszenia typu negującego /na rys. 11 zakreskowane poziomo/. Sprawdzamy czy te obszary mają co najmniej jeden wspólny punkt z poprzednio wyznaczonymi obszarami prostokątnymi. Jeśli to zachodzi, to zbiór Z jest niepusty. W przeciwnym przypadku zbiór Z jest pusty i nie jest spełniony warunek poprawności transformacji sygnałów dla rozpatrywanych charakterystyk przenoszenia.



Rys. 11. Geometryczna ilustracja sprawdzania czy istnieje niepusty zbiór Z określony zależnością /19/

6.2. Przypadek niemonotonicznych charakterystyk przenoszenia

W przypadku niemonotonicznego przebiegu granicznych charakterystyk przenoszenia możemy przeprowadzić podobne rozumowanie jak dla charakterystyk o przebiegu monotonicznym, w p. 6.1. Jeśli okaże się, że zbiór Z /zależność 19/ jest pusty, to świadczy to o niepoprawnej transformacji sygnałów dla rozpatrywanego zbioru F charakterystyk przenoszenia. Gdy jednak zbiór Z jest niepusty, to nie wystarcza to, by można było stwierdzić poprawność transformacji sygnałów. Fakt ten wynika z tego, że przy niemonotonicznym przebiegu granicznych charakterystyk przenoszenia istotna staje się sprawa doboru wartości pary liczb (a, d).

Wartości pary liczb (b, c) są określane przez odpowiednie współrzędne wybieranego punktu $/x, y/ \in Z$, tj.

$$b = x \quad i \quad c = y \qquad /21/$$

Gdy założymy wartości a i d równe krańcom przyjętego do rozważań zakresu zmian wartości fizycznej sygnału wejściowego /15/, wówczas możliwe jest, że dla określonego punktu (b, c) otrzymamy w podzbiorach X_0 i X_1 /10/ wartości fizyczne sygnałów wyjściowych leżące poza zbiorem $X_0 \cup X_1$, tj. wewnątrz przedziału

$$\{y: b < y < c\} \qquad /22/$$

Zjawisko to można traktować jako ograniczenie wynikające z niemotoniczności przebiegów "wewnętrznych części" granicznych charakterystyk przenoszenia - charakterystyk t_g i n_d dla wartości fizycznych sygnałów wejściowych mniejszych od b i charakterystyk t_d i n_g dla wartości fizycznych sygnałów wejściowych większych od c. Jeśli dla pewnego punktu $(x, y) \in Z$ takie ograniczenie nie występuje, to świadczy to o poprawnej transformacji sygnałów w liniach cyfrowych dla rozpatrywanego zbioru charakterystyk przenoszenia.

Ogólnie biorąc, dla danego punktu (b, c) można poszukiwać najszerszego przedziału fizycznych wartości sygnałów wejściowych, w którym nie występuje powyższe ograniczenie. Przedział ten odpowiada najmniejszej wartości a i największej wartości d z poszukiwanej czwórki liczb (a, b, c, d), przy założonych wartościach

dwójki liczb (b, c) i przy uwzględnieniu wymagań wynikających tylko z przebiegów "wewnętrznych części" granicznych charakterystyk przenoszenia. Oznaczmy te ekstremalne wartości a jako a_m i d jako d_M. Powinny one spełniać nierówności

$$\alpha < a_m \leqslant b; \qquad c \leqslant d_M < \delta \qquad /23/$$

Poszukiwany przedział możemy określić następująco

$$\left\{x: (a_m \leqslant x \leqslant d_M) \wedge \bigwedge_{a_m \leqslant x \leqslant b} ((t_g(x) \leqslant b) \wedge (n_d(x) \geqslant c)) \wedge \bigwedge_{c \leqslant x \leqslant d_M} ((t_d(x) \geqslant c) \wedge (n_g(x) \leqslant b))\right\} \qquad /24/$$

Geometryczna ilustracja znajdowania wartości a_m i d_M dla wybranego punktu (b, c) została przedstawiona przykładowo na rys. 12. Wychodząc z punktu (b, c) kreśli się dwie proste poziome odpowiadające rzędnym o wartościach b i c. Przy poszukiwaniu wartości a_m określa się wartości a'_m i a''_m równe odciętym najbliższych punktów przecięcia tych prostych na lewo od odciętej o wartości b, odpowiednio przez charakterystyki przenoszenia t_g i n_d. Gdy takich punktów przecięcia nie ma w przedziale, dla którego określone są graniczne charakterystyki przenoszenia /5/, wówczas przyjmujemy wartość a'_m lub a''_m równą α. Jako poszukiwaną wartość a_m przyjmuje się większą ze znalezionych wartości a'_m i a''_m. Przy znajdowaniu wartości d_M postępowanie jest podobne. Analitycznie wartości a_m i d_M dla danego punktu (b, c) można określić następująco

$$a_m(b, c) = \max (a'_m, a''_m) \qquad /25/$$

gdzie

$$a'_m(b) = \sup \left\{x: (\alpha < x < b) \wedge (t_g(x) > b) \vee (x = \alpha)\right\}$$

$$a''_m(b, c) = \sup \left\{x: (\alpha < x < b) \wedge (n_d(x) < c) \vee (x = \alpha)\right\}$$

$$d_M(b, c) = \min (d'_M, d''_M) \qquad /26/$$

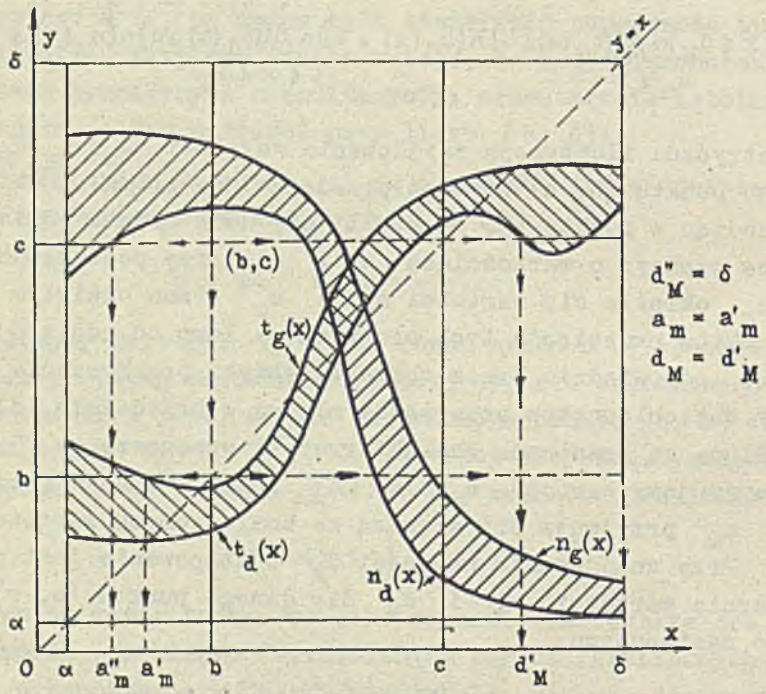
gdzie

$$d'_M(c) = \inf \left\{x: (c < x < \delta) \wedge (t_d(x) < c) \vee (x = \delta)\right\}$$

$$d''_M(b, c) = \inf\{x: (c < x < \delta) \wedge (n_g(x) > b) \vee (x = \delta)\}$$

Z przeprowadzonych dotąd rozważań, uwzględniających ograniczenia dotyczące wartości a i d tylko ze względu na "wewnętrzne części" przebiegów granicznych charakterystyk przenoszenia, otrzymujemy następujące warunki dla określonego punktu (b, c)

$$a \geq a_m(b, c); \qquad d \leq d_M(b, c) \qquad /27/$$



Rys. 12. Graficzna ilustracja znajdowania wartości a_m i d_M dla wybranego punktu (b, c)

Rozpatrzymy obecnie jak dla danego punktu (b, c) można uwzględnić wymagania związane z "zewnętrznymi częściami" przebiegów granicznych charakterystyk przenoszenia - charakterystyk t_d i n_g na lewo od odciętej o wartości b oraz charakterystyk t_g i n_d na prawo od odciętej o wartości c. Badanie możliwości określenia poszukiwanej czwórki liczb (a, b, c, d) dla wybranych już wartości pary (b, c), odpowiadających współrzędnym danego

punktu, polega na sprawdzeniu, czy można dobrać taką wartość a i taką wartość d przy zachowaniu warunku /27/, aby spełnione było

$$\left.\begin{aligned} n_g(x) &\leqslant d \\ t_d(x) &\geqslant a \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$$\left.\begin{aligned} n_d(x) &\geqslant a \\ t_g(x) &\leqslant d \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad c \leqslant x \leqslant d \qquad /28/$$

Postawione zadanie można zrealizować zaczynając od wyznaczenia dla rozpatrywanego punktu (b, c), przy uwzględnieniu tylko ograniczeń wynikających z "zewnętrznych części" przebiegów granicznych charakterystyk przenoszenia, największej dopuszczalnej wartości a oznaczonej jako a_M i najmniejszej dopuszczalnej wartości d oznaczonej jako d_m. Obie określone wartości a_M i d_m odpowiadają najmniejszemu kwadratowi $A'B'C'D'$ /rys. 9/ dla danego punktu (b, c).

Otrzymanie wartości a_M i d_m jest bardziej złożone niż poprzednio poszukiwanych wartości a_m i d_M. Geometryczną ilustrację sposobu określania tych wartości metodą kolejnych przybliżeń przedstawiono na rys. 13. Przy pomocy strzałek zaznaczono tu kolejne przesuwanie się wzdłuż odcinków prostych i części przebiegów granicznych charakterystyk przenoszenia, poczynając od zadanego punktu (b, c). Doprowadza ono do uzyskania poszukiwanego najmniejszego kwadratu. W czasie takiej procedury otrzymujemy nierosnący ciąg wartości /rys. 13/ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oraz niemalejący ciąg wartości $d_1, d_2, d_3, \ldots$ Oba te ciągi jako ograniczone odpowiednio przez wartości α i δ są zbieżne i to do granic równych właśnie poszukiwanym wartościom a_M i d_m. Wzory obliczeniowe będą następujące

$$a_1(b) = \max_{\gamma_1} \inf \left\{ y: \bigvee_x (y \leqslant x) \wedge (y \geqslant t_d(x)) \wedge (\gamma_1 \leqslant x \leqslant b) \right\} \qquad /29/$$

gdzie $\gamma_1 \in \left\{ x: x \leqslant t_d(x) \right\}$

oraz ogólnie dla $i \geqslant 1$

$$d_i(b, c) = \max (d_i', d_i'') \qquad /30/$$

gdzie

$$d_i'(b, c) = \sup\left\{y: \bigvee_x (y \leqslant n_g(x)) \wedge (a_i \leqslant x < b)\right\}$$

$$d_i''(b, c) = \min_{\gamma_2} \sup\left\{y: \bigvee_x (y \geqslant x) \wedge (y \leqslant t_g(x)) \wedge (c \leqslant x \leqslant \gamma_2)\right\}$$

$$\gamma_2 \in \left\{x: (x \geqslant t_g(x)) \wedge (x \geqslant d_i')\right\}$$

$$a_{i+1}(b, c) = \min\left(a_{i+1}', a_{i+1}''\right) \qquad /31/$$

gdzie

$$a_{i+1}'(b, c) = \inf\left\{y: \bigvee_x (y \geqslant n_d(x)) \wedge (c \leqslant x \leqslant d_i)\right\}$$

$$a_{i+1}''(b, c) = \max_{\gamma_3} \inf\left\{y: \bigvee_x (y \leqslant x) \wedge (y \geqslant t_d(x)) \wedge (\gamma_3 \leqslant x \leqslant b)\right\}$$

$$\gamma_3 \in \left\{x: (x \leqslant t_d(x)) \wedge (x \leqslant a_{i+1}')\right\}$$

Aby dla danego punktu (b, c) można było dobrać poszukiwana czwórkę liczb powinno być spełnione

$$a_m(b, c) \leqslant a_M(b, c); \qquad d_m(b, c) \leqslant d_M(b, c) \qquad /32/$$

Jeśli zachodzą powyższe nierówności to można przyjąć

$$a = a_M; \qquad d = d_m \qquad /33/$$

Ostatecznie warunek poprawnej transformacji sygnałów w liniach cyfrowych dla danego zbioru F charakterystyk przenoszenia można zapisać w postaci istnienia niepustego zbioru M takich punktów, dla których są spełnione określone powyżej zależności /32/.

$$M = \left\{(x, y) \in Z: (a_m(x, y) \leqslant a_M(x, y)) \wedge (d_m(x, y) \leqslant d_M(x, y))\right\} \neq 0 \qquad /34/$$

Badanie poprawności transformacji sygnałów w liniach cyfrowych według przedstawionych zależności polega na przeszukiwaniu zbioru Z i jest dość pracochłonne. Dlatego celowe jest przed rozpoczęciem tego dokonanie wstępnych sprawdzeń, które w wielu przypadkach pozwolą prościej wykryć poprawność transformacji sygnałów w liniach cyfrowych lub też ustalić niespełnianie odpowiednich wymagań.

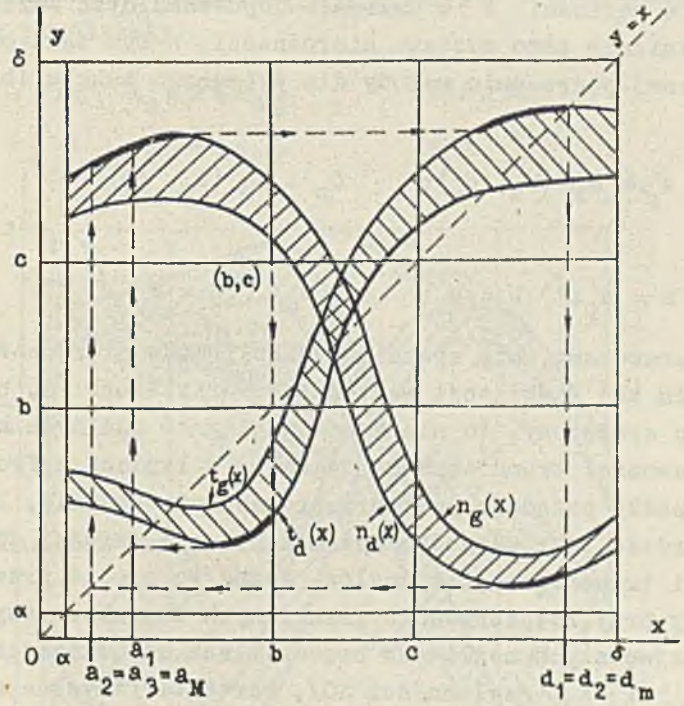
Na początku badań, po stwierdzeniu, że zbiór Z jest niepusty, można sprawdzić czy istotne są ograniczenia wynikające z przebiegów "wewnętrznych części" granicznych charakterystyk przenoszenia. W tym celu wybieramy punkt $(x, y) \in Z$ odpowiadający kwadrato-

wi ABCD /rys. 9/ o najkrótszym boku. Jest to punkt zbioru Z położony najbliżej prostej równowagi o odciętej równej największej możliwej wartości b

$$b_M = \sup\left\{x: \bigvee_y (x, y) \in Z\right\} \qquad /35/$$

i rzędnej równej najmniejszej możliwej wartości c

$$c_m = \inf\left\{y: \bigvee_x (x, y) \in Z\right\} \qquad /36/$$



Rys. 13. Graficzna ilustracja określania metodą kolejnych przybliżeń wartości a_M i d_m dla wybranego punktu (b, c)

Podstawiając

$$a = \alpha; \quad b = b_M; \quad c = c_m; \quad d = \delta; \qquad /37/$$

należy sprawdzić, czy zachodzi

$$\left.\begin{aligned} t_g(x) &\leqslant b \\ n_d(x) &\geqslant c \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$$\left.\begin{aligned} t_d(x) &\geqslant c \\ n_g(x) &\leqslant b \end{aligned}\right\} \quad \text{dla} \quad c \leqslant x \leqslant d \qquad /38/$$

Jeśli powyższy zestaw nierówności będzie spełniony, to świadczy to o poprawnej transformacji sygnałów w liniach cyfrowych. W przeciwnym przypadku można sprawdzić, czy zwiększenie wartości a i zmniejszenie wartości d w zakresie dopuszczalnych zmian nie wpłynie na spełnienie tego zestawu nierówności. W tym celu określamy według podanej poprzednio metody dla wybranego punktu (b_M, c_m) wartości

$$a_p = a_M(b_M, c_m); \qquad d_p = d_m(b_M, c_m) \qquad /39/$$

Przyjmując

$$a = a_p; \quad b = b_M; \quad c = c_m; \quad d = d_p \qquad /40/$$

ponownie sprawdzamy, czy spełniony jest zestaw nierówności /38/. Jeżeli i dla tej kombinacji wartości czwórki liczb (a, b, c, d) nie jest on spełniony, to nie można wyciągnąć ogólnych wniosków co do poprawności transformacji sygnałów w liniach cyfrowych. W takim przypadku pożądane jest przeprowadzenie badania, które pozwoli stwierdzić, czy zachodzą pewne konieczne warunki dotyczące poprawności transformacji sygnałów. Można to zrobić przez sprawdzenie, czy przy rozpatrywaniu granicznych charakterystyk przenoszenia w najwęższych możliwych przedziałach odpowiadających podzbiorom X_0 i X_1 /zależności 10/, wartości fizyczne sygnałów wyjściowych nie leżą wewnątrz najwęższego przedziału, w którym nie powinny występować, tj. przedziału

$$Y_w = \left\{ y: b_M < y < c_m \right\} \qquad /41/$$

Aby ustalić najwęższe przedziały dla sygnałów wejściowych określimy najmniejszą wartość odciętej dla punktów zbioru Z

$$b_m = \inf \left\{ x: \bigvee_y (x, y) \in Z \right\} \qquad /42/$$

oraz największą wartość rzędnej dla punktów zbioru Z

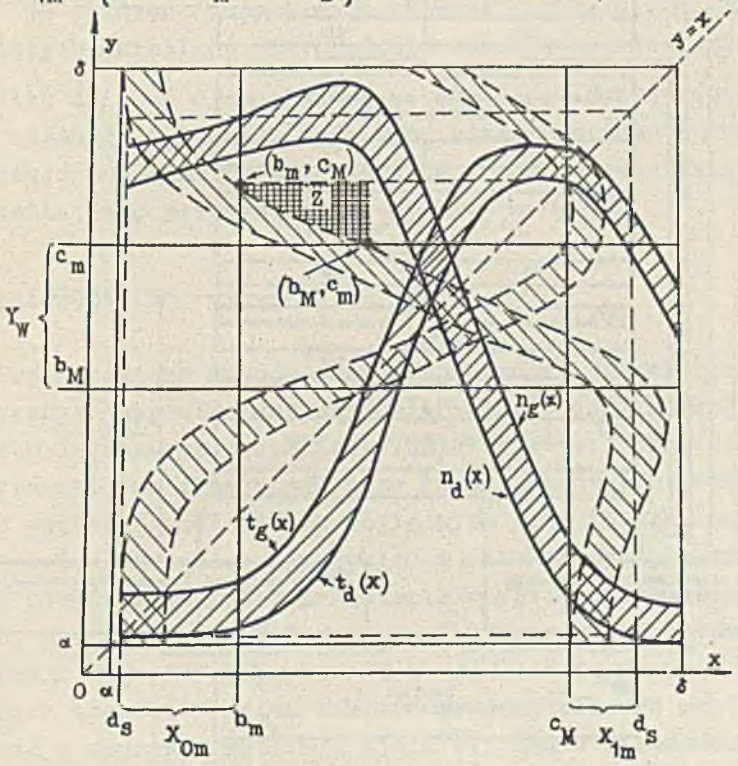
$$c_M = \sup \left\{ y: \bigvee_x (x, y) \in Z \right\} \qquad /43/$$

Dla punktu* (b_m, c_M) znajdziemy według podanej poprzednio metody wartości

$$a_s = a_M (b_m, c_M) \; ; \quad d_s = d_m (b_m, c_M) \qquad /44/$$

Ostatecznie jako przedziały odpowiadające podzbiorom X_0 i X_1 przy badaniu koniecznego warunku poprawności kwantowania sygnałów przyjmiemy przedziały

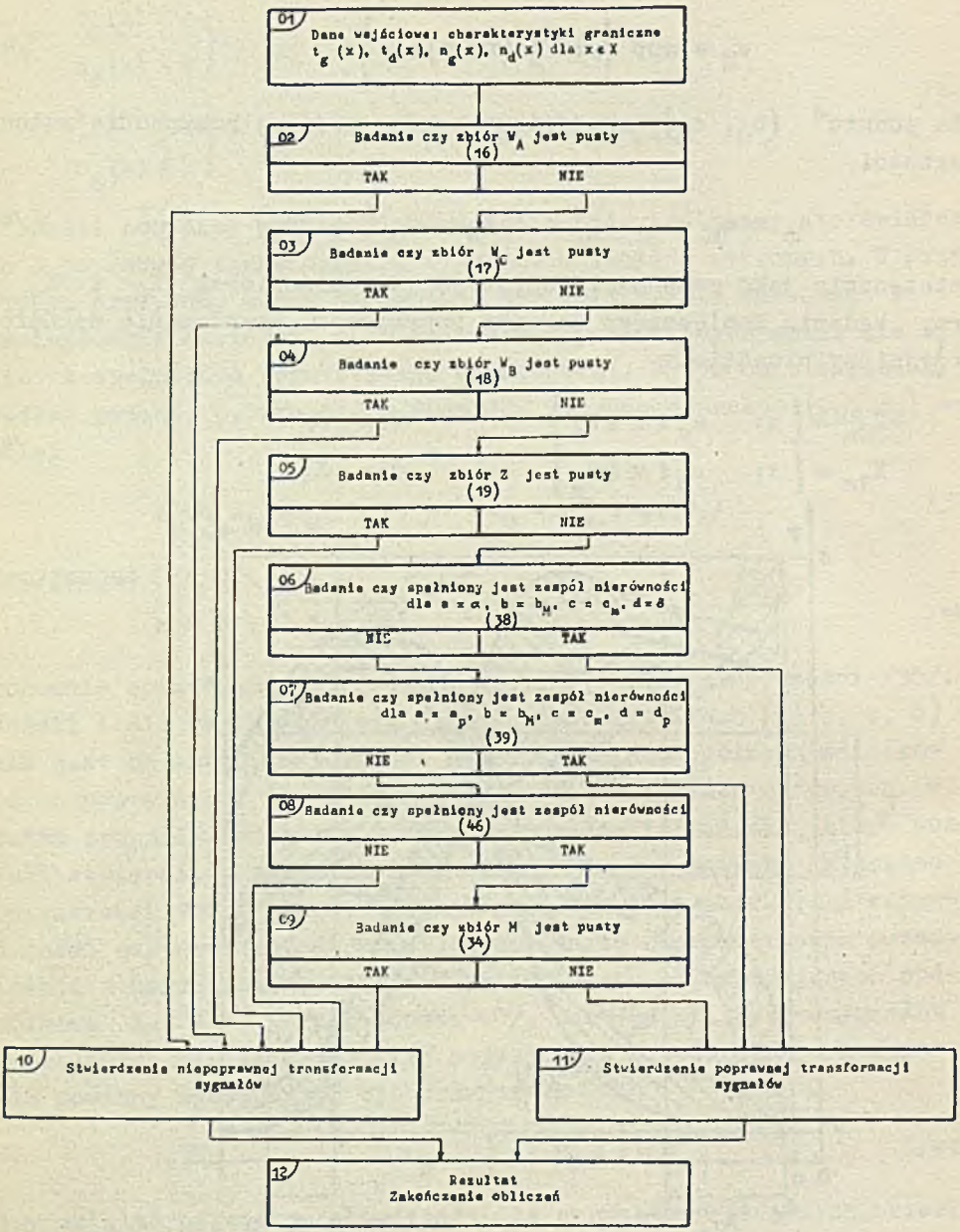
$$X_{0m} = \left\{ x: \quad a_s \leqslant x \leqslant b_m \right\} \quad \text{dla } X_0$$
$$X_{1m} = \left\{ x: \quad c_M \leqslant x \leqslant d_s \right\} \quad \text{dla } X_1 \qquad /45/$$



Rys. 14. Graficzna ilustracja przedziałów występujących przy badaniu warunku koniecznego poprawności transformacji sygnałów

X_{0m}, X_{1m} - przedziały sygnałów wejściowych, dla których są rozpatrywane fizyczne wartości sygnałów wyjściowych; Y_w - przedział, w którym badana jest obecność sygnałów wyjściowych

* Może przy tym zachodzić $(b_m, c_M) \notin Z$



Rys. 15. Sieć działań do sprawdzania poprawności transformacji sygnałów w liniach cyfrowych dla przypadku zbioru charakterystyk przenoszenia typu twierdzącego i negującego. W prostokątach podano numery tych zależności, których one dotyczą

Badanie warunku koniecznego polega na sprawdzeniu czy jest spełniony podobny do /38/ zestaw nierówności

$$\left.\begin{aligned} t_g(x) &< b_M \\ n_d(x) &> c_m \end{aligned}\right\} \quad \text{dla } x \in X_{0m}$$

$$\left.\begin{aligned} t_d(x) &> c_m \\ n_g(x) &< b_M \end{aligned}\right\} \quad \text{dla } x \in X_{1m} \qquad /46/$$

Jeśli powyższy zestaw nierówności nie będzie spełniony, to można stwierdzić niepoprawność transformacji sygnałów i zakończyć badania. W przypadku przeciwnym należy rozpocząć badanie warunku określonego zależnością /34/, poprzez przeszukiwanie zbioru Z. Na rys. 14 pokazano przykładowo wybrane przedziały na osi rzędnych i odciętych określane przy badaniu warunku koniecznego.

Sieć działań dla opisanej metody badań poprawności transformacji sygnałów w liniach cyfrowych została przedstawiona na rys. 15. Obejmuje ona również monotoniczne graniczne charakterystyki przenoszenia jako przypadek szczególny.

7. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda oceny poprawności transformacji wartości fizycznych sygnału dotyczy najprostszej konfiguracji połączeń elementów logicznych, jaką jest linia cyfrowa. Można jednak sądzić, że stanowi ona zasadniczą bazę do ogólniejszych rozważań dotyczących współpracy elementów logicznych przy innych konfiguracjach połączeń. Jako jeden z przykładów może służyć prosty typ przerzutnika utworzonego przez połączenie w pętlę dwóch elementów logicznych, np. A i B. W tym przypadku zagadnienie poprawności transformacji sygnałów pokrywa się ze zdolnością do pamiętania dwóch różnych stanów. Modelem takiego przerzutnika ze względu na transformacje sygnałów może być linia cyfrowa o nieskończenie dużej liczbie połączonych kaskadowo par elementów A i B /o charakterystyce przenoszenia tego typu jak $f^{\infty}(x)$ na rys. 4/.

Inną sprawą jest uwzględnienie jednoczesnego oddziaływania kilku wejść tego samego elementu logicznego na jego wyjście. Należy

rozpatrzyć jakie kombinacje odpowiadające różnym liczbom wejść oraz wartościom fizycznym sygnałów wejściowych są krytyczne ze względu na przebieg granicznych charakterystyk przenoszenia. Dla najczęściej spotykanych elementów logicznych, w których każde z wejść oddziaływuje w ten sam sposób na wyjście, zwykle łatwo jest przeprowadzić taką analizę. Na przykład, w powszechnie stosowanych tranzystorowych elementach logicznych NAND w technice DTL, dolnej granicznej charakterystyce przenoszenia odpowiada przypadek, gdy jest tylko jedno wejście, a górnej granicznej charakterystyce przenoszenia przypadek, gdy występuje największa możliwa liczba wejść, które są sterowane sygnałem o takiej samej wartości fizycznej.

Przebieg granicznych charakterystyk przenoszenia jest zależny od określonego zbioru parametrów pracy zespołu elementów logicznych. Korzystając z tego można przeprowadzać obliczenia wielowymiarowych obszarów poprawnej transformacji sygnałów. W szczególności można w ten sposób na drodze analitycznej określać "dopasowanie" poszczególnych elementów logicznych do współpracy z pozostałymi elementami danego zespołu. Oczywistym jest, że ze względu na pracochłonność przeprowadzanie takich obliczeń jest efektywne tylko przy użyciu maszyny cyfrowej.

Przedstawione w pracy zależności można wykorzystać nie tylko na drodze analitycznej, ale również do eksperymentalnej oceny skonstruowanych elementów logicznych, przez pomiar ich charakterystyk przenoszenia. Szybką ocenę oraz obserwację zmian całej charakterystyki przenoszenia umożliwia wyświetlanie jej przebiegu na ekranie oscyloskopu. Duże możliwości stwarza przy tym jednoczesne oglądanie kilku charakterystyk na ekranie [6].

Charakterystyki przenoszenia stanowią zewnętrzny opis elementu logicznego, podając zależności zachodzące pomiędzy jego wejściami i wyjściem. Stąd charakterystyka przenoszenia jest jednym z zasadniczych sposobów opisu statycznych właściwości pudełka spełniającego określoną funkcję logiczną, bez wnikania w fizykę jego wnętrza. Takie podejście jest istotne zwłaszcza w obecnym etapie rozwoju elementów logicznych, gdy coraz powszechniejsze zastosowanie znajdują układy scalone.

Autor pragnie złożyć podziękowanie prof. dr inż. J. Bromirskiemu, mgr inż. Z. Świątkowskiemu, dr inż. S. Majerskiemu i mgr B. Głowackiemu za przeczytanie rękopisu i udzielenie szeregu cennych rad uwzględnionych przy ostatecznej redakcji tej pracy.

Literatura

[1] GAŠNKOVETZ I., VASILEVA N.P.: Voprosy ustojčivosti raboty zamknutych /ili dlinnych/ schiem postrojennych na niekotorych tipach logičeskich elementov, Avtomatika i telemechanika, 1960: XXI, 6.

[2] LO A.W.: Physical Realization of Digital Logic Circuits, Micropower Electronics, Pergamon Press, 1964.

[3] NARUD J.A., MEYER C.S.: Characterization of Integrated Logic Circuits, Proceedings of the IEEE, December 1964: 52, 12.

[4] PIERCE W.H.: Predicting Signal Degeneration and Gate Compatibility in Logic Circuits, IEEE transactions, June 1963: 3, EC-12.

[5] VASILEVA N.P., MATORINA W.S., PETRUCHIN B.P., PROCHOROV N.L., SEDYCH O.A., GERM E.I.: Oblasti vzaimno ustoičivych charakteristik logičeskich elementov i voprosy ich projektirovanija, Avtomatika i telemechanika, 1965: XXVI, 6.

[6] KOJEMSKI A.:A Device for Static Evaluation of Transistor Level Logic Circuits, Report, Automatizacija Mjerenje Regulacija Računala. JUREMA X Jugoslavenski Seminar, Zagreb, 1965.

THE CORRECTNESS OF SIGNAL TRANSFORMATION IN A DIGITAL LINE

Summary

The paper considers logic element cooperation in a simplest configuration in the form of a digital line. This digital line is a cascade connection of two or more logic elements, where the output signal of the prior element is simultaneously the input signal for the next logic element /Fig. 2/. The value of the physical parameter of the signal representing its logic value "0" or "1" is called in short this signal physical value. To describe the operation of a logic element in the digital line, a transfer characteristic has been accepted. This characteristic is the function that represents the dependence of the output signal physical value on the physical value of the signal on this element single input. There are asserting and inverting types of transfer characteristics. Logic values of output and input signals are the same for an asserting transfer characteristic, whereas for the inverting one - they are complementary.

The transformation of signal physical values was analyzed in any digital line built of logic elements, to which corresponds the set F of transfer characteristics. Each transfer characteristic of this set is assumed to be determined in such a set X of input signal physical values that

$$f(X) \subset X \qquad \text{for all } f \in F$$

where $f(X)$ is the set of values of the function $f(x)$ for all values $x \in X$.

The criterion of the correctness of signal transformation for this case is the existence of two separate subsets of signal physical values: X_0 - corresponding to the logic value "0", and X_1 corresponding to the logic value "1", which fulfil the following mapping

$$\left.\begin{aligned} f(X_0) &\subset X_0 \\ f(X_1) &\subset X_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{for } f \in F \quad \text{where } f \text{ is the asserting transfer characteristic}$$

$$\left.\begin{aligned} f(X_0) &\subset X_1 \\ f(X_1) &\subset X_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{for } f \in F \quad \text{where } f \text{ is the inverting transfer characteristic}$$

It was assumed that the subset X_0 was of the form of an interval, the ends of which were determined by numbers a and b, and the subset X_1 of the form of an interval, the ends of which were determined by numbers c and d. Then, the problem of the evaluation of the correctness of signal transformation for the set F of transfer characteristics is simply interpreted in a graphic form. Let us drow four rectangular areas /Fig. 9, rectangulars are drown with a thick line/ corresponding to pairs of coordinate values (a, b) and (c, d) on both axes, in Cartesian coordinates, in which the transfer characteristics are represented. In order to ensure the correctness of signal transformation each of transfer characteristics of the logic element should correspond to a certain pattern. Namely, they should be found inside the proper rectangle, its upper and lower side not being crossed /so as in fig. 9/. Therefore, the evaluation of the correctness of signal transformation for set F of transfer characteristics consists in the statement whether there exists at least one four of numbers (a, b, c, d) defining the above described rectangulars.

The further part of the paper is devoted to the formulation of an algorithm of examining the existence of the above mentioned four numbers. To solve this problem the notion of upper and lower boundary transfer characteristic was introduced for the given set F of transfer characteristics

of logic elements. These are functions, corresponding to the smallest and the biggest physical values of output signals, obtained for any physical value of input signals for the set F of transfer characteristics. Reverse transfer characteristics were also defined, being functions arising from the exchange of common transfer characteristic variables /e.g. fig. 10/. Mutual location of common and reverse transfer characteristics in Cartesian coordinates were considered. There were analyzed some properties of point sets corresponding to these areas. First a simpler case has been considered, when boundary transfer characteristics are monotonical, and then, a general case without this restriction. The flow diagram for checking the correctness of signal transformation according to the proposed method, is given in fig. 14, where in separate rectangles numbers of appropriate expressions are presented.

At the end of the paper the usefulness of transfer characteristics of logic elements is emphasized to evaluate their properties not only for analytical but for experimental purposes as well. Logic elements were briefly considered, a simultaneous action of several inputs being taken into account. Special significance of transfer characteristics is stressed when examining logic elements in the form of integrated circuits, in which internal nodes of the electric scheme are not accessible.

PRACE IMM
Zeszyt 1
© 1968.03

621.391.827:621.315.2:681.322

ANALIZA ZAKŁÓCEŃ W OKABLOWANIU MASZYN CYFROWYCH, WYWOŁANYCH SPRZĘŻENIAMI ELEKTROMAGNETYCZNYMI

Maria KOWALEWSKA

Pracę złożono 3.IV.1967 r.

W pracy przeprowadzono analizę zakłóceń występujących w okablowaniu EMC, wywołanych sprzężeniem elektromagnetycznym między liniami transmisyjnymi. Podano zależności określające przebiegi czasowe napięcia przeników dla różnych przypadków sprzężenia elektromagnetycznego.

S p i s t r e ś c i

1. WSTĘP 66
2. RODZAJE ZAKŁÓCEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W OKABLOWANIU MASZYN CYFROWYCH 66
3. ANALIZA PRZENIKÓW W OKABLOWANIU DLA LINII TRANSMISYJNYCH TRAKTOWANYCH JAKO OBWODY O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH 68
3.1. Przeniki w przypadku dopasowania linii aktywnej 73
3.1.1. Zależności dla $\Theta = 0$ 76
3.1.2. Zależności uproszczone dla $\Theta = 0$ 80
3.1.3. Przeniki pojemnościowe 80
3.1.4. Przeniki indukcyjne 81
3.2. Przeniki w przypadku dopasowania linii pasywnej i aktywnej ... 81
4. SPOSOBY ZMNIEJSZANIA PRZENIKÓW W OKABLOWANIU MASZYN CYFROWYCH 85
5. PODSUMOWANIE 90
DODATEK 1. WYPROWADZENIA I ZALEŻNOŚCI POMOCNICZE 91
DODATEK 2. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA WYPROWADZONYCH ZALEŻNOŚCI NA NAPIĘCIE PRZESŁUCHU DO SZACOWANIA POZIOMU ZAKŁÓCEŃ W OKABLOWANIU ... 94
Literatura 96
Summary 96

1. WSTĘP

Dla szybkich maszyn cyfrowych odporność elementów podstawowych na zakłócenia oraz konstrukcja okablowania są ściśle ze sobą związane. Niewłaściwa konstrukcja okablowania może powodować przekłamania na skutek obecności zakłóceń o amplitudach przekraczających progi przeciwzakłóceniowe.

Praca niniejsza stanowi próbę analizy zakłóceń w okablowaniu wywołanych sprzężeniami elektromagnetycznymi pomiędzy liniami transmisyjnymi. Zakłócenia tego typu przyjęto nazywać przenikami*). Wyprowadzono przy licznych założeniach upraszczających wyrażenia określające przebieg czasowy napięcia przeników w przypadku dwóch linii transmisyjnych traktowanych jako stałe rozłożone, z których jedna przyjęta została za linię aktywną /zawierającą źródło/, druga za linię pasywną /zawierającą odbiornik/.

Otrzymane zależności są szczególnie przydatne do szacowania amplitudy zakłóceń dla przypadków, gdy czasy przejścia zaburzenia przez linię są porównywalne z czasami przełączania elementów podstawowych, zaś pasywnych przewodów okablowania nie można uważać za linie dopasowane.

2. RODZAJE ZAKŁÓCEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W OKABLOWANIU MASZYN CYFROWYCH

Oprócz wspomnianych na wstępie zakłóceń okablowania wywołanych sprzężeniami elektromagnetycznymi między liniami transmisyjnymi, można wymienić jeszcze kilka rodzajów zakłóceń, których występowanie w połączeniach wewnętrznych maszyny cyfrowej może powodować przekłamania. Do najczęściej omawianych w literaturze należą:

a/ zakłócenia wywołane stanami przejściowymi na wejściach układu /hazardy/,

b/ oscylacje niektórych elementów podstawowych /np. wtórników emiterowych/,

---

* Termin "przeniki" używany jest w odniesieniu do zakłóceń powstających w wyniku występowania szkodliwych sprzężeń elektromagnetycznych między przewodami okablowania EMC.

c/ zakłócenia na uziemieniach i zasilaniu,
d/ zakłócenia spowodowane niedopasowaniem aktywnych linii transmisyjnych do oporności wejściowej i wyjściowej elementów podstawowych /oscylacje na części płaskiej impulsów/.

Zakłóceń wywołanych występowaniem tzw. hazardów można uniknąć przez odpowiednie projektowanie sieci logicznej, wykluczające jednoczesne występowanie na wejściach elementów podstawowych impulsów o zboczach przeciwnie zmieniających się w czasie.

Oscylacje wtórników emiterowych eliminuje się dobierając odpowiednio warunki pracy tranzystora i obciążenie układu.

Zakłócenia na uziemieniach i zasilaniu występują najczęściej wtedy, gdy oporności lub indukcyjności zastępcze przewodów zasilania i uziemiania są zbyt duże lub też gdy kondensatory blokujące mają źle dobraną wartość i są nieodpowiednio rozmieszczone. Problemy odpowiedniego rozmieszczenia kondensatorów blokujących w torze między zaciskami zasilacza a punktami odbiorczymi oraz odpowiedniego obliczania ich wartości rozpatrzone są w [2].

Zakłócenia spowodowane niedopasowaniem aktywnych linii transmisyjnych do oporności wejściowej i wyjściowej elementów podstawowych odgrywają poważną rolę dla czasów przełączania wielokrotnie mniejszych od czasu przejścia zaburzenia przez linię. Problemy minimalizacji odbić poprzez odpowiedni wybór oporności falowej linii transmisyjnych /w zależności od oporności wejściowej i wyjściowej układów, ilości odbiorów i sposobu rozprowadzenia sygnału/ przedstawione są wyczerpująco w [7], a oddziaływanie szkodliwych odbić na elementy podstawowe rozpatrzone jest w [8] i [3].

F.C.Yao [8] podaje orientacyjnie, iż zakłócenia wywołane niedopasowaniem przestają być poważnym problemem wówczas, gdy czasy przełączania elementów podstawowych są większe od sześciokrotnego czasu przejścia zaburzenia przez linię. W tych przypadkach wystarcza na ogół, aby wartość oporności falowej linii nie była większa niż stosunek największej zmiany napięcia do najmniejszej zmiany prądu występującej w danej linii transmisyjnej. Dolnym o-

graniczeniem oporności falowej linii będzie odpowiednio stosunek najmniejszej zmiany napięcia do największej zmiany prądu linii transmisyjnej.

Dla przypadku, gdy czasy przełączania elementów podstawowych wielokrotnie przekraczają czasy przejścia zaburzenia przez linię, wartość oporności falowej linii transmisyjnych nie ma większego znaczenia, gdyż oscylacje wywołane niedopasowaniem mają niewielkie amplitudy.

Reasumując można stwierdzić, że:

1. Zakłócenia wymienione jako a/, b/, c/ można usunąć poprzez odpowiednie projektowanie sieci logicznej, elementów podstawowych, systemu rozprowadzenia napięć zasilających i sposobu uziemienia.
2. Zakłócenia spowodowane niedopasowaniem odgrywają rolę dopiero w przypadkach, gdy czas przejścia zaburzenia przez linię jest większy od czasów przełączania elementów podstawowych, a więc dla tzw. połączeń długich.
3. Eliminacja zakłóceń spowodowanych sprzężeniem elektromagnetycznym /przeników/ jest sprawą bardzo istotną zarówno w przypadku połączeń długich, jak i w przypadku połączeń krótszych.

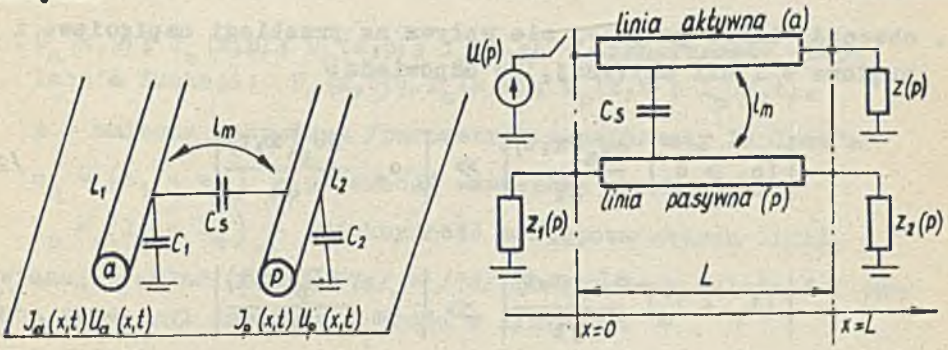
3. ANALIZA PRZENIKÓW W OKABLOWANIU DLA LINII TRANSMISYJNYCH TRAKTOWANYCH JAKO OBWODY O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH

Określenie wzajemnego oddziaływania między liniami aktywnymi i pasywnymi jest problemem bardzo skomplikowanym, w przypadku gdy mamy kilka linii położonych dowolnie w przestrzeni. Rozpatrzono więc przypadek dwu linii transmisyjnych: aktywnej i pasywnej, o jednakowej długości, biegnących równolegle do siebie i równolegle do płaszczyzny uziemienia. Położenie linii w przestrzeni oraz schemat zastępczy rozpatrywanego układu pokazano na rys. 1.

Przyjęto, iż linia oznaczona na rys. 1 jako (p) jest linią pasywną, a linia oznaczona jako (a) jest linią aktywną. Długość linii oznaczono przez L.

Związki między napięciem i prądem dla układu linii transmisyj-

nych przedstawionych na rys. 1 określone są przez układ równań różniczkowych.



Rys. 1. Położenie linii w przestrzeni oraz schemat zastępczy układu złożonego z linii pasywnej i aktywnej.

$$-\frac{\partial I_a(x,t)}{\partial x} = (o_1 + o_s) \cdot \frac{\partial U_a(x,t)}{\partial t} - o_s \cdot \frac{\partial U_p(x,t)}{\partial t} \qquad /1a/$$

$$-\frac{\partial U_a(x,t)}{\partial x} = (l_1 + l_m) \cdot \frac{\partial I_a(x,t)}{\partial t} + l_m \cdot \frac{\partial I_p(x,t)}{\partial t} \qquad /1b/$$

$$-\frac{\partial I_p(x,t)}{\partial x} = -o_s \cdot \frac{\partial U_a(x,t)}{\partial t} + (o_2 + o_s) \cdot \frac{\partial U_p(x,t)}{\partial t} \qquad /1c/$$

$$-\frac{\partial U_p(x,t)}{\partial x} = l_m \cdot \frac{\partial I_a(x,t)}{\partial t} + (l_2 + l_m) \cdot \frac{\partial I_p(x,t)}{\partial t} \qquad /1d/$$

gdzie l_1, l_2 – jednostkowe indukcyjności własne linii,
l_m – jednostkowa indukcyjność wzajemna między liniami,
o_1, o_2 – jednostkowe pojemności linii względem uziemienia,
o_s – jednostkowa pojemność sprzęgająca między liniami,
t – czas
x – współrzędna bieżąca linii
$I_a(x,t)$; $U_a(x,t)$; $I_p(x,t)$; $U_p(x,t)$ – prądy i napięcia w liniach aktywnej i pasywnej.

Układ równań /1a/ - /1d/ uproszczono przyjmując następujące założenia:

1. obecność linii pasywnej nie wpływa na przebiegi napięciowe i prądowe w linii aktywnej, co odpowiada:

$$\left| (c_1 + c_s) \frac{\partial U_a(x,t)}{\partial t} \right| \gg \left| c_s \frac{\partial U_p(x,t)}{\partial t} \right| \qquad /2/$$

$$\left| (l_1 + l_m) \frac{\partial I_a(x,t)}{\partial t} \right| \gg \left| l_m \frac{\partial I_p(x,t)}{\partial t} \right| \qquad /3/$$

2. jednostkowe indukcyjności własne i pojemności względem uziemienia są takie same dla obu linii, co odpowiada:

$$l_1 = l_2; \quad c_1 = c_2 \qquad /4/$$

3. w chwili początkowej napięcia i prądy linii aktywnej i pasywnej są równe zeru dla $0 \leqslant x \leqslant L$, co odpowiada:

$$U_a(x,0) = 0; \quad I_a(x,0) = 0 \qquad /5/$$

$$U_p(x,0) = 0; \quad I_p(x,0) = 0 \qquad /6/$$

Uwzględniając wyżej wymienione założenia oraz zapisując zależności /1a/ - /1d/ w postaci operatorowej otrzymano układ równań, który stanowi podstawę do wszystkich dalszych rozważań.

$$-\frac{\partial I_a(x,p)}{\partial x} = p \cdot c_0 \cdot U_a(x,p) \qquad /7a/$$

$$-\frac{\partial U_a(x,p)}{\partial x} = p \cdot l_p \cdot I_a(x,p) \qquad /7b/$$

$$-\frac{\partial I_p(x,p)}{\partial x} = -p \cdot c_s \cdot U_a(x,p) + p \cdot c_0 \cdot U_p(x,p) \qquad /7c/$$

$$-\frac{\partial U_p(x,p)}{\partial x} = p \cdot l_m \cdot I_a(x,p) + p \cdot l_p \cdot I_p(x,p) \qquad /7d/$$

gdzie: $U_a(x,p)$; $I_a(x,p)$; $U_p(x,p)$; $I_p(x,p)$ - transformaty Laplace'a funkcji: $U_a(x,t)$; $I_a(x,t)$; $U_p(x,t)$; $I_p(x,t)$.

p - zmienna zespolona /parametr/ transformaty Laplace'a

$c_o = (c_1 + c_s)$ - pojemność zastępcza układu linii

$l_p = (l_1 + l_m)$ - indukcyjność zastępcza układu linii.

Rozwiązując układ równań /7a/ - /7d/ otrzymujemy zależności określające przebiegi napięcia i prądu w liniach*).

$$U_a(x,p) = A_1(p) \cdot e^{-\frac{p}{v}x} + B_1(p) \cdot e^{\frac{p}{v}x} \qquad /8a/$$

$$I_a(x,p) = \frac{A_1(p)}{z_o} \cdot e^{-\frac{p}{v}x} - \frac{B_1(p)}{z_o} \cdot e^{\frac{p}{v}x} \qquad /8b/$$

$$U_p(x,p) = e^{-\frac{p}{v}x} \cdot \left[A_2(p) - \frac{p \cdot x \cdot \theta}{2v} \cdot A_1(p)\right] + e^{\frac{px}{v}} \cdot \left[B_2(p) + \frac{p \cdot x \cdot \theta}{2v} \cdot B_1(p)\right] \qquad /8c/$$

$$I_p(x,p) = \frac{e^{-\frac{p}{v}x}}{z_o} \cdot \left[A_2(p) - \frac{l_m}{l_p} \cdot A_1(p) - \frac{p \cdot x \cdot \theta}{2v} \cdot A_1(p) + \frac{\theta \cdot A_1(p)}{2}\right] + \qquad /8d/$$

$$- \frac{e^{\frac{p}{v}x}}{z_o} \cdot \left[B_2(p) - \frac{l_m}{l_p} \cdot B_1(p) + \frac{p \cdot x \cdot \theta}{2v} \cdot B_1(p) + \frac{\theta \cdot B_1(p)}{2}\right]$$

gdzie: $v = \frac{1}{\sqrt{c_o \cdot l_p}}$ - szybkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej wzdłuż linii,

---

* Sposób postępowania podano w Dodatku 1 - p. 1.

$\theta = \frac{l_m}{l_p} - \frac{c_s}{c_o}$ – parametr charakteryzujący sprzężenie elektromagnetyczne między linią aktywną a pasywną,

$z_o = \sqrt{\frac{l_p}{c_o}}$ – oporność falowa układu linii,

$A_1(p)$; $B_1(p)$ – stałe wyznaczone na podstawie warunków brzegowych linii aktywnej,

$A_2(p)$; $B_2(p)$ – stałe wyznaczone na podstawie warunków brzegowych linii pasywnej.

Biorąc pod uwagę zależność /8c/, określającą przebieg napięcia zakłóceń na linii pasywnej, można wyróżnić kilka charakterystycznych przypadków sprzężenia elektromagnetycznego w zależności od wartości parametru θ:

a/ linie są sprzężone tylko pojemnościowo /przeniki pojemnościowe/

$$\theta = \frac{c_s}{c_o}; \quad \frac{l_m}{l_p} \ll \frac{c_s}{c_o}$$

b/ linie są sprzężone tylko indukcyjnie /przeniki indukcyjne/

$$\theta = \frac{l_m}{l_p}; \quad \frac{c_s}{c_o} \ll \frac{l_m}{l_p}$$

c/ linie są sprzężone pojemnościowo i indukcyjnie

$$\frac{l_m}{l_p} \quad \text{porównywalne z} \quad \frac{c_s}{c_o}$$

d/ szczególny przypadek sprzężenia elektromagnetycznego*)

$$\theta = 0 \quad \text{co odpowiada} \quad z_o = \sqrt{\frac{l_p}{c_o}} = \sqrt{\frac{l_m}{c_s}}$$

---

*) w zależności /8c/ składniki

$$\frac{p \cdot x \cdot \theta}{2v} \cdot A_1(p) \cdot e^{-\frac{px}{v}} \quad \text{i} \quad \frac{p \cdot x \cdot \theta}{2v} \cdot B_1(p) \cdot e^{\frac{px}{v}}$$

stają się równe zeru.

Najbardziej ogólny, a jednocześnie najczęściej spotykany w okablowaniu EMC, jest przypadek, gdy wartości

$$\frac{l_m}{l_p} \quad i \quad \frac{c_s}{c_o}$$

są porównywalne. Z obu tych względów w dalszych rozważaniach poświęcono mu najwięcej uwagi.

Wyznaczenie stałych: $A_1(p)$; $B_1(p)$; $A_2(p)$; $B_2(p)$ przy dowolnych warunkach brzegowych dla linii aktywnej i pasywnej jest sprawą żmudną, a otrzymane wyniki są mało przejrzyste. Przyjęto więc, iż dalsze rozważania dotyczyć będą przypadku, gdy linia aktywna jest dopasowana.

3.1. Przeniki w przypadku dopasowania linii aktywnej

Określono przebieg napięcia przeników w warunkach dopasowania linii aktywnej i dowolnego obciążenia na końcach linii pasywnej, biorąc pod uwagę najbardziej ogólny przypadek sprzężenia magnetycznego

$$\left(\frac{l_m}{l_p} \quad \text{porównywalne z} \quad \frac{c_s}{c_o}\right).$$

Wyznaczono stałe $A_1(p)$; $B_1(p)$; $A_2(p)$; $B_2(p)$ występujące w równaniach /8a/ – /8d/ korzystając z następujących warunków brzegowych dla linii aktywnej i pasywnej:

$$U_a(o, p) = U(p) \qquad /9a/$$

$$U_a(L,p) = I_a(L,p) \cdot Z_o \qquad /9b/$$

$$-\frac{U_p(o, p)}{I_p(o, p)} = Z_1(p) \qquad /9c/$$

$$\frac{U_p(L, p)}{I_p(L,p)} = Z_2(p) \qquad /9d/$$

gdzie $U(p)$ – napięcie źródła w linii aktywnej,
$Z_1(p)$ – impedancja dołączona do końca $x = 0$ linii pasywnej

$Z_2(p)$ – imdedancja dołączona do końca $x = L$ linii pasywnej.

Otrzymano rezultaty*):

$$A_1(p) = U(p); \quad B_1(p) = 0 \qquad /10a/$$

$$A_2(p) = \frac{U(p)\cdot r_1(p)}{4}\cdot\frac{\left[\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_o}\right)\cdot\left(1-e^{\frac{-2pL}{v}}\right)-2\frac{pL}{v}\cdot r_2(p)\cdot\theta\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\right]}{1-r_1(p)\cdot r_2(p)\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}}+\frac{U(p)}{4}\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_o}\right) \qquad /10b/$$

$$B_2(p) = \frac{U(p)}{4}\cdot\frac{\left[\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_o}\right)\cdot\left(1-e^{\frac{-2pL}{v}}\right)-2\frac{pL}{v}\cdot r_2(p)\cdot\theta\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\right]}{1-r_1(p)\cdot r_2(p)\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}}-\frac{U(p)}{4}\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_o}\right) \qquad /10c/$$

gdzie: $r_1(p)$ – współczynnik odbicia od końca $x = 0$ linii pasywnej,

$r_2(p)$ – współczynnik odbicia od końca $x = L$ linii pasywnej.

Zgodnie z ogólnie przyjętą definicją współczynnika odbicia $r_1(p)$ i $r_2(p)$ określone są zależnościami:

$$r_1(p) = \frac{Z_1(p) - Z_o}{Z_1(p) + Z_o} \qquad /11/$$

$$r_2(p) = \frac{Z_2(p) - Z_o}{Z_2(p) + Z_o} \qquad /12/$$

Podstawiając wyznaczone stałe do zależności /8c/ otrzymano, po wykonaniu prostych przekształceń, zależność określającą napięcie przeników w dowolnym punkcie linii pasywnej.

---

* Sposób postępowania przy wyznaczeniu stałych $A_1(p)$; $B_1(p)$; $A_2(p)$; $B_2(p)$ podano w Dodatku 1 p. 2.

$$U_p(x,p) = \frac{U(p)}{4\left[1 - r_1(p)\cdot r_2(p)\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\right]}\left\{\left[\left[1 + r_1(p)\right] - r_1(p)\cdot\left[1 + r_2(p)\right]\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\right]\cdot\left(\frac{1_m}{1_p} + \frac{o_s}{o_o}\right)\cdot e^{\frac{-px}{v}} + \right.$$

$$- 2\, r_1(p)\cdot r_2(p)\cdot\theta\cdot\frac{pL}{v}\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\cdot e^{\frac{-px}{v}} - \left[1 - r_1(p) r_2(p)\right]\cdot\left(\frac{1_m}{1_p} + \frac{o_s}{o_o}\right)\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\cdot e^{\frac{px}{v}} \cdot \qquad /13/$$

$$\left. - 2\, r_2(p)\cdot\theta\cdot\frac{pL}{v}\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\cdot e^{\frac{px}{v}}\right\} - \frac{U(p)}{2}\cdot\frac{p}{v}\cdot\theta\cdot x\cdot e^{\frac{-px}{v}}$$

Dla końców linii pasywnej $x = 0$ oraz $x = L$ napięcie przeników określone jest zależnościami:

$$U_p(o,p) = \frac{U(p)\cdot\left[1 + r_1(p)\right]}{4\left[1 - r_1(p)\cdot r_2(p)\, e^{\frac{-2pL}{v}}\right]}\cdot\left\{\left(\frac{1_m}{1_p} + \frac{o_s}{o_o}\right)\cdot\left(1 - e^{\frac{-2pL}{v}}\right) - 2\, r_2(p)\cdot\theta\cdot\frac{pL}{v}\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\right| \qquad /14a/$$

$$U_p(L,p) = \frac{U(p)\cdot\left[1 + r_2(p)\right]\cdot e^{\frac{-pL}{v}}}{4\left[1 - r_1(p)\cdot r_2(p)\cdot e^{\frac{-2pL}{v}}\right]}\cdot\left\{r_1(p)\cdot\left(\frac{1_m}{1_p} + \frac{o_s}{o_o}\right)\cdot\left(1 - e^{\frac{-2pL}{v}}\right) - 2\,\theta\cdot\frac{pL}{v}\right| \qquad /14b/$$

Założono, dla uproszczenia dalszych rozważań, iż obciążenie linii pasywnej jest rzeczywiste, a więc współczynniki odbicia wynoszą:

$$r_1(p) = r_1 \frac{R_1 - Z_o}{R_1 + Z_o} \qquad /15/$$

$$r_2(p) = r_2 = \frac{R_2 - Z_o}{R_2 + Z_o} \qquad /16/$$

gdzie R_1 – oporność dołączona na końcu $x = 0$ linii pasywnej

R_2 – oporność dołączona na końcu $x = L$ linii pasywnej.

Po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a*), zależności /14a/ i /14b/ można zapisać w postaci:

$$U_p(o,t) = \frac{(1+r_1)}{4}\cdot\left\{\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{o_s}{o_o}\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(r_1 r_2)^n \cdot 1(t-2n\tau)\cdot U(t-2n\tau)+\right.\right.$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t-2(n+1)\tau\right]\cdot U\left[t-2(n+1)\tau\right]\Bigg] + \qquad /17a/$$

$$\left.-2r_2\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}-\frac{o_s}{o_o}\right)\cdot\tau\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t-2(n+1)\tau\right]\cdot\frac{d}{dt}\left[U\left[t-2(n+1)\tau\right]\right]\right\}$$

$$U_p(L,t) = \frac{(1+r_2)}{4}\cdot\left\{r_1\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{o_s}{o_o}\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1\left[t-(2n+1)\tau\right]\cdot U\left[t-(2n+1)\tau\right]+\right.\right.$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1\left[t-(2n+3)\tau\right]U\left[t-(2n+3)\tau\right]\Bigg] + \qquad /17b/$$

$$\left.-2\left(\frac{l_m}{l_p}-\frac{o_s}{o_o}\right)\cdot\tau\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1\left[t-(2n+1)\tau\right]\cdot\frac{d}{dt}\left[U\left[t-(2n+1)\tau\right]\right]\right\}$$

gdzie $\tau = \frac{L}{v}$ – czas przejścia zaburzenia przez linię,

n – liczba naturalna lub zero.

Zależności /17a/ i /17b/ lub /14a/ i /14b/ pozwalają na określenie napięcia przeników na końcach linii pasywnej, jeżeli znane są parametry linii, obciążenie linii pasywnej oraz charakterystyka czasowa źródła pobudzającego linię aktywną.

3.1.1. Zależności dla $\theta = 0$

Zależności /17a/ i /17b/ upraszczają się znacznie w przypadku $\theta = 0$ tzn. wtedy, gdy zachodzi relacja

*Sposób postępowania podany został w Dodatku 1 p. 3.

$$\sqrt{\frac{l_m}{c_s}} = \sqrt{\frac{l_p}{c_o}}.$$

Wyrażenia /17a/ i /17b/ można wtedy zapisać w postaci:

$$U_p(0,t) = \frac{(1+r_1)}{4}\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_o}\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1(t-2n\tau)\cdot U(t-2n\tau)+\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1[t-2(n+1)\tau]\cdot U[t-2(n+1)\tau]\right] \qquad /18a/$$

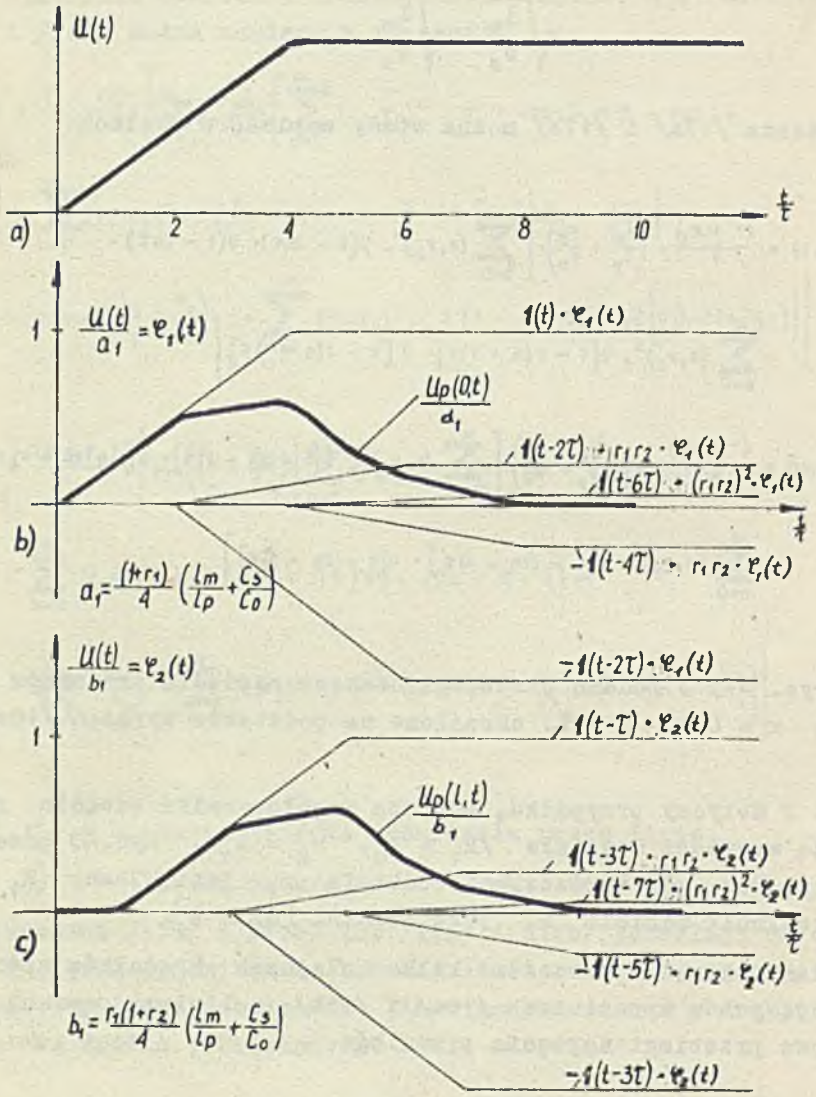
$$U_p(L,t) = \frac{(1+r_2)}{4}\cdot r_1\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_o}\right)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1[t-(2n+1)\tau]\cdot U[t-(2n+1)\tau]+\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(r_1r_2)^n\cdot 1[t-(2n+3)\tau]\cdot U[t-(2n+3)\tau]\right] \qquad /18b/$$

Na rys. 2 i 3 podano przebiegi czasowe napięcia przeników na końcach $x = 0$ i $x = L$, określone na podstawie wyrażeń /18a/ i /18b/.

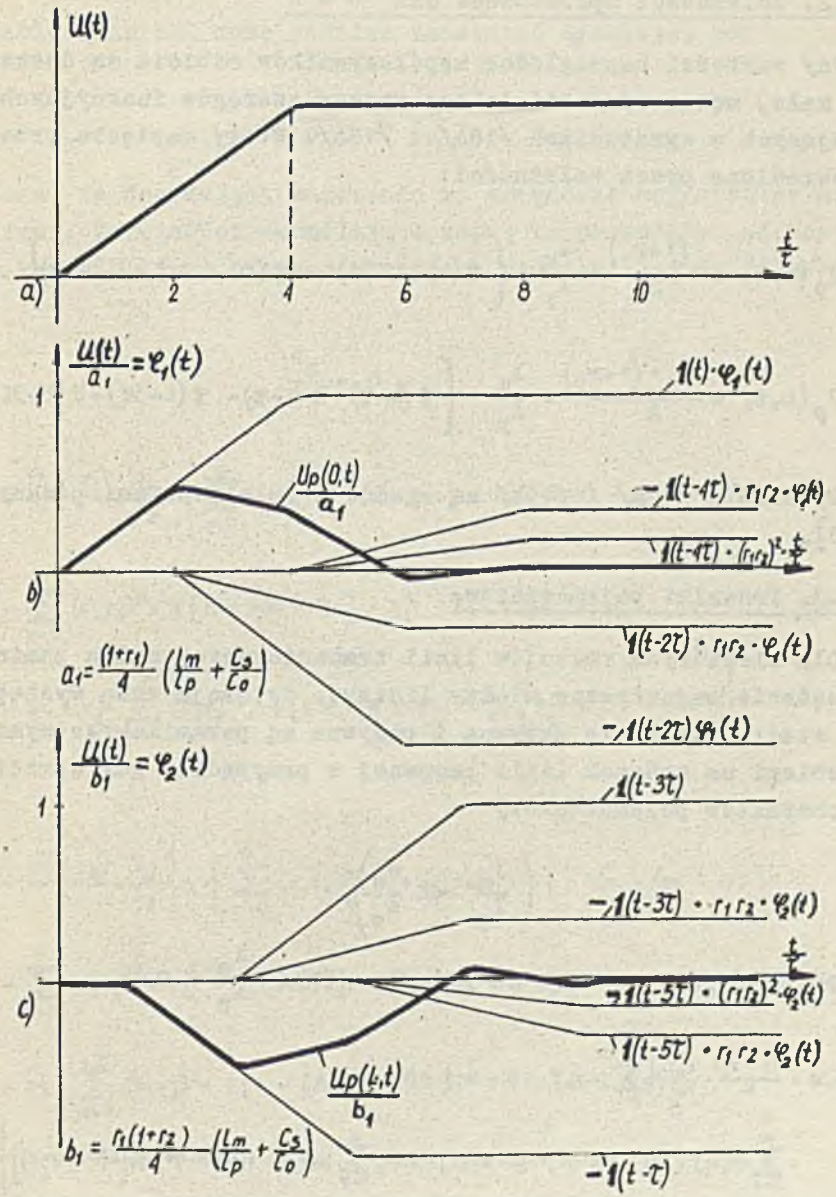
Rys. 2 dotyczy przypadku, gdy oba współczynniki odbicia r_1 i r_2 mają wartości dodatnie $/R_1 > Z_o$, $R_2 > Z_o/$. Rys. 3 przedstawia przypadek, gdy współczynnik odbicia r_1 jest ujemny $(R_1 < Z_o)$, a współczynnik odbicia r_2 jest dodatni $(R_2 > Z_o)$.

Liniami cienkimi oznaczono kilka kolejnych składników szeregów występujących w wyrażeniach /18a/ i /18b/, a liniami pogrubionymi wypadkowe przebiegi napięcia przeników.



Rys. 2. Przebiegi czasowe napięcia przeników w przypadku $\Theta = 0$ oraz dodatnich r_1 i r_2.

a/ przebieg napięcia źródła w linii aktywnej,
b/ przebieg napięcia przeników na końcu $x = 0$ linii pasywnej,
c/ przebieg napięcia przeników na końcu $x = L$ linii pasywnej.



Rys. 3. Przebiegi czasowe napięcia przeników w przypadku $\theta = 0$ oraz ujemnego r_1 a dodatniego r_2.

a/ przebieg napięcia źródła w linii aktywnej,
b/ przebieg napięcia przeników na końcu $x = 0$ linii pasywnej,
c/ przebieg napięcia przeników na końcu $x = L$ linii pasywnej.

3.1.2. Zależności uproszczone dla $\theta = 0$

Gdy wartości bezwzględne współczynników odbicia są dostatecznie małe, można odrzucić dalsze wyrazy szeregów funkcyjnych występujących w wyrażeniach /18a/ i /18b/. Wtedy napięcia przeników są określone przez zależności:

$$U_p(o,t) = \frac{(1+r_1)}{2} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \left\{ 1(t) \cdot U(t) - 1(t-2\tau) \cdot U(t-2\tau) \right\} \qquad /19a/$$

$$U_p(L,t) = \frac{r_1 \cdot (1+r_2)}{2} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \left\{ 1(t-\tau) \cdot U(t-\tau) - 1(t-3\tau) \cdot U(t-3\tau) \right\} \qquad /19b/$$

Wyrażenia /19a/ i /19b/ są zgodne z zależnościami podanymi w [3].

3.1.3. Przeniki pojemnościowe

Dla niektórych rodzajów linii transmisyjnych można pominąć sprzężenie magnetyczne między liniami. Sytuacja taka występuje np. wtedy, gdy linie aktywna i pasywna są parami skręconymi. Przebiegi na końcach linii pasywnej w przypadku, gdy sprzężenie ma charakter pojemnościowy

$$\left(\frac{l_m}{l_p} \ll \frac{c_s}{c_o} \right),$$

określono, podstawiając do /17a/ i /17b/ $\frac{l_m}{l_p} = 0$.

$$U_p(o,t) = \frac{(1+r_1)}{4} \cdot \frac{c_s}{c_o} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1(t-2n\tau) \cdot U(t-2n\tau) + \right.$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1[t-2(n+1)\tau] \cdot U[t-2(n+1)\tau] + 2\tau \cdot r_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1[t-2(n+1)\tau] \cdot \frac{d}{dt}\left[U[t-2(n+1)\tau] \right] \right\} \qquad /20a/$$

$$U_p(L,t) = \frac{(1+r_2)}{4} \cdot \frac{c_s}{c_o} \cdot \left\{ r_1 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1[t-(2n+1)\tau] \cdot U[t-(2n+1)\tau] + \right. \right.$$
$$\left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1[t-(2n+3)\tau] \cdot U[t-(2n+3)\tau] \right] + 2\tau \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1[t-(2n+1)\tau] \cdot \frac{d}{dt}\left[U[t-(2n+1)\tau] \right] \right\} \qquad /20b/$$

3.1.4. Przeniki indukcyjne

W okablowaniu EMC może również zaistnieć sytuacja, gdy

$$\frac{c_s}{c_o} \ll \frac{l_m}{l_p},$$

co oznacza, iż decydujące znaczenie ma sprężenie magnetyczne między liniami. Zależności określające napięcie przeników indukcyjnych na końcach linii biernej otrzymano podstawiając do /17a/ i /17b/

$$\frac{c_s}{c_o} = 0 .$$

$$U_p(0,t) = \frac{(1+r_1)}{4} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1(t - 2n\tau) \cdot U(t - 2n\tau) + \right.$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t - 2(n+1)\tau\right] \cdot U\left[t - 2(n+1)\tau\right] + \qquad /21a/$$

$$\left. - 2\tau \cdot r_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t - 2(n+1)\tau\right] \cdot \frac{d}{dt}\left[U\left[t - 2(n+1)\tau\right]\right] \right\}$$

$$U_p(l,t) = \frac{(1+r_2)}{4} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \left\{ r_1 \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t - (2n+1)\tau\right] \cdot U\left[t - (2n+1)\tau\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t - (2n+3)\tau\right] \cdot U\left[t - (2n+3)\tau\right] \right] + \qquad /21b/ \right.$$

$$\left. - 2\tau \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n \cdot 1\left[t - (2n+1)\tau\right] \cdot \frac{d}{dt}\left[U\left[t - (2n+1)\tau\right] \right] \right\}.$$

3.2. Przeniki w przypadku dopasowania linii pasywnej i aktywnej

Dla obustronnie dopasowanej linii pasywnej współczynniki odbicia od obu końców stają się równe zeru.

Po podstawieniu $r_1 = r_2 = 0$ do zależności /17a/ i /17b/ otrzymano zależności określające przebiegi napięciowe na końcach linii pasywnej dla obustronnego jej dopasowania. Uwzględniono również kilka uprzednio omawianych przypadków sprzężenia elektromagnetycznego podstawiając do zależności /17a/ i /17b/ odpowiednie wartości parametru θ.

1. Przeniki pojemnościowe i indukcyjne oraz $\theta \neq 0$

$$U_p(o,t) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{l_m}{l_p} + \frac{o_s}{o_o}\right) \cdot \left[\mathbf{1}(t) \cdot U(t) - \mathbf{1}(t-2\tau) \cdot U(t-2\tau)\right] \qquad /22a/$$

$$U_p(L,t) = -\frac{\tau}{2} \cdot \left(\frac{l_m}{l_p} - \frac{o_s}{o_o}\right) \cdot \mathbf{1}(t-\tau) \cdot \frac{d}{dt}\left[U(t-\tau)\right] \qquad /22b/$$

Wyrażenia /22a/ i /22b/ są zgodne z podanymi w [3].

Gdy przeważa sprzężenie pojemnościowe

$$\left(\frac{o_s}{o_o} > \frac{l_m}{l_p}\right),$$

napięcia przeników na obu końcach linii pasywnej mają taki sam znak.

Gdy przeważa sprzężenie indukcyjne

$$\left(\frac{l_m}{l_p} > \frac{o_s}{o_o}\right),$$

napięcia przeników na końcach linii pasywnej mają znaki przeciwne.

2. Przeniki pojemnościowe i indukcyjne oraz $\theta = 0$

$$U_p(o,t) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{l_m}{l_p} + \frac{o_s}{o_o}\right) \cdot \left[\mathbf{1}(t) \cdot U(t) - \mathbf{1}(t-2\tau) \cdot U(t-2\tau)\right] \qquad /23a/$$

$$U_p(L,t) = 0 \qquad /23b/$$

Otrzymane wyrażenia są zgodne z podanymi w [8].

3. Przeniki pojemnościowe $\left(\theta = -\frac{o_s}{o_o}\right)$

$$U_p(o,t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{o_s}{o_o} \cdot \left[1(t) \cdot U(t) - 1\,(t-2\tau) \cdot U(t-2\tau) \right] \qquad /24a/$$

$$U_p(L,t) = \frac{\tau}{2} \cdot \frac{o_s}{o_o} \cdot 1(t-\tau) \cdot \frac{d}{dt}\left[U(t-\tau) \right] \qquad /24b/$$

W przypadku, gdy sprzężenie między liniami ma charakter pojemnościowy, napięcia przeników na obu końcach linii pasywnej mają zawsze znaki zgodne.

4. Przeniki indukcyjne $\left(\theta = \frac{l_m}{l_p} \right)$

$$U_p(o,t) = \frac{1}{4} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot \left[1(t) \cdot U(t) - 1(t-2\tau) \cdot U(t-2\tau) \right] \qquad /25a/$$

$$U_p(L,t) = -\frac{\tau}{2} \cdot \frac{l_m}{l_p} \cdot 1(t-\tau) \cdot \frac{d}{dt}\left[U(t-\tau) \right] \qquad /25b/$$

W przypadku, gdy sprzężenie między liniami ma charakter indukcyjny, napięcia przeników na obu końcach linii pasywnej mają zawsze znaki przeciwne.

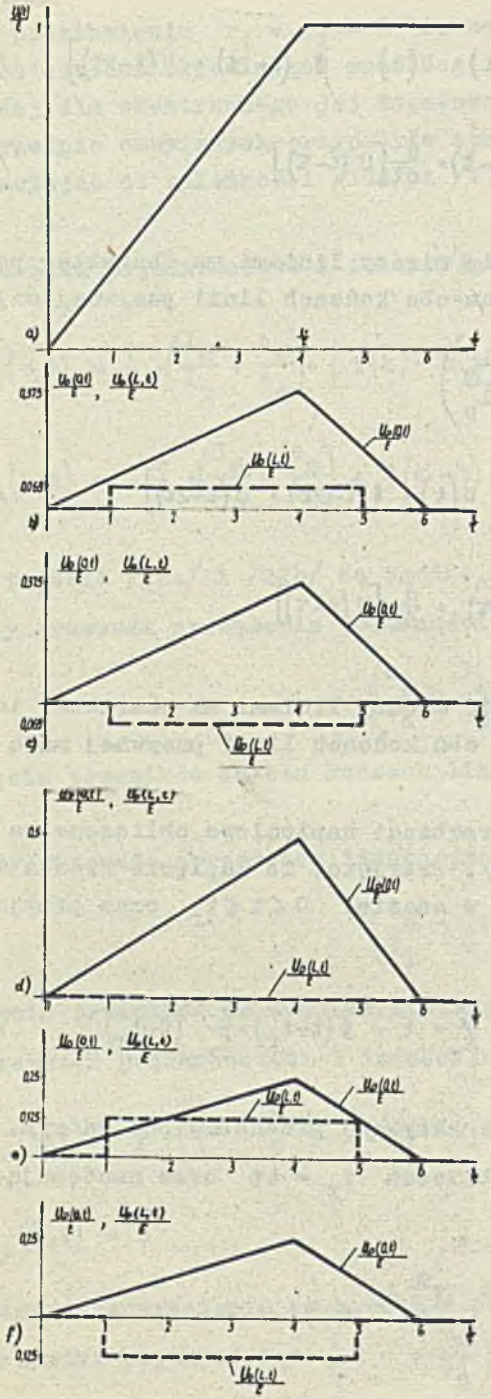
Na rys. 4 przedstawiono przebiegi napięciowe obliczone na podstawie wyrażeń /22a / - /25b/. Przyjęto, iż napięcie źródła w linii aktywnej narasta liniowo w czasie: $0 \leqslant t \leqslant t_r$ oraz przyjmuje wartość E dla $t > t_r$

$$U(t) = 1(t) \cdot \frac{E}{t_r} \cdot t - 1(t-t_r) \cdot \frac{E}{t_r} (t-t_r) \qquad /26/$$

Przebieg napięcia na linii aktywnej przedstawiono na rys. 4a.

Przykładowo przyjęto do obliczeń $t_r = 4\tau$ oraz następujące wartości

$$\frac{o_s}{o_o} \quad 1 \quad \frac{l_m}{l_p} :$$



Rys. 4. Przebiegi na liniach w przypadku dopasowania obu linii.

a/ przebieg napięcia źródła w linii aktywnej,

b/ przebiegi napięcia przeników, w przypadku gdy przeważa sprzężenie pojemnościowe,

c/ przebiegi napięcia przeników, w przypadku gdy przeważa sprzężenie indukcyjne,

d/ przebiegi napięcia przeników dla przypadku $\Theta = 0$,

e/ przebiegi napięcia przeników, w przypadku gdy sprzężenie jest pojemnościowe,

f/ przebiegi napięcia przeników, w przypadku gdy sprzężenie jest indukcyjne.

Rys. 4b: $\frac{l_m}{l_p} = \frac{1}{2}$; $\frac{o_s}{o_o} = 1$ – przeważa sprzężenie pojemnościowe,

Rys. 4c: $\frac{l_m}{l_p} = 1$; $\frac{o_s}{o_o} = \frac{1}{2}$ – przeważa sprzężenie indukcyjne,

Rys. 4d: $\frac{l_m}{l_p} = 1$; $\frac{o_s}{o_o} = 1$ – szczególny przypadek sprzężenia elektromagnetycznego /$\theta = 0$/,

Rys. 4e: $\frac{l_m}{l_p} = 0$; $\frac{o_s}{o_o} = 1$ – sprzężenie wyłącznie pojemnościowe,

Rys. 4f: $\frac{l_m}{l_p} = 1$ $\frac{o_s}{o_o} = 0$ – sprzężenie wyłącznie indukcyjne.

Na podstawie rys. 4, można łatwo prześledzić, jaką amplitudę i znak mają zakłócenia na obu końcach linii dla różnych przypadków sprzężenia elektromagnetycznego. Przebiegi napięcia przeników na końcach $x = 0$ zostały przedstawione ciągłymi liniami, a przebiegi napięcia przeników na końcach $x = L$ liniami przerywanymi.

4. SPOSOBY ZMNIEJSZANIA PRZENIKÓW W OKABLOWANIU MASZYN CYFROWYCH

Wyprowadzone w pkcie 3 zależności pozwalają na wyciągnięcie wniosków odnośnie sposobów zmniejszania przeników w okablowaniu EMC.

Zależność /17a/ określająca przebieg napięcia przeników na końcu $x = 0$ w najbardziej ogólnym z rozpatrywanych przypadków może być zapisana w postaci:

$$u_p(0,t) = \frac{(1 - r_1)}{4} \cdot \left\{ \left(\frac{l_m}{l_p} + \frac{o_s}{o_o} \right) \cdot \left[1(t) \cdot u(t) - (1 - r_1 r_2) \cdot \left[1(t - 2\tau) \cdot u(t - 2\tau) + \right. \right. \right.$$
$$+ (r_1 r_2) \cdot 1(t - 4\tau) \cdot u(t - 4\tau) + (r_1 r_2)^2 \cdot 1(t - 6\tau) \cdot u(t - 6\tau) + \ldots \Big] \Big] + \qquad /27/$$
$$\left. \left. - 2\tau \cdot r_2 \cdot \left(\frac{l_m}{l_p} - \frac{o_s}{o_o} \right) \cdot \left[1(t - 2\tau) \cdot \frac{d}{dt}[u(t - 2\tau)] + (r_1 r_2) \cdot 1(t - 4\tau) \cdot \frac{d}{dt}[u(t - 4\tau)] + \ldots \right] \right\}$$

Do jakościowego określenia wpływów parametrów okablowania na wartość amplitudy napięcia zakłóceń wystarczy, jeśli rozpatruje się część główną wyrażenia /27/ odrzucając wyrazy szeregu zawierające iloczyny współczynników odbicia. Przebieg napięcia przeników określony jest wówczas przez zależność:

$$U_p(0,t) \approx \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{l_m}{l_p}+\frac{c_s}{c_0}\right)\cdot(1+r_1)\cdot\left[1(t)\cdot U(t)-1(t-2\tau)\cdot U(t-2\tau)\right]+\right.$$
$$\left.-r_2\cdot\left(\frac{l_m}{l_p}-\frac{c_s}{c_0}\right)\cdot 1(t-2\tau)\cdot\frac{d}{dt}\left[U(t-2\tau)\right]\right\} \qquad /28/$$

Wyrażenie /28/ można zapisać w postaci pozwalającej na wyróżnienie składowej indukcyjnej wywołanej sprzężeniem magnetycznym oraz składowej pojemnościowej wywołanej sprzężeniem elektrycznym.

$$U_p(0,t) = \frac{L\cdot Z_0}{4}\cdot\left\{l_m\cdot\left[\frac{1+r_1}{\tau}\cdot\left[1(t)\cdot I_a(t)-1(t-2\tau)\cdot I_a(t-2\tau)\right]+\right.\right.$$
$$\left.-r_2\cdot 1(t-2\tau)\cdot\frac{d}{dt}\left[I_a(t-2\tau)\right]\right]+ \qquad /29/$$
$$\left.+c_s\left[\frac{(1+r_1)}{\tau}\cdot\left[1(t)\cdot U(t)-1(t-2\tau)\cdot U(t-2\tau)\right]+r_2\cdot 1(t-2\tau)\cdot\frac{d}{dt}\left[U(t-2\tau)\right]\right]\right\}$$

Z powyższej zależności wynika, iż napięcie przesłuchu jest proporcjonalne do długości linii oraz ich oporności falowej. Składowa indukcyjna jest zależna liniowo od poziomu prądu oraz indukcyjności wzajemnej, a składowa pojemnościowa od poziomu napięcia i pojemności sprzęgającej.

Tak więc sposoby redukcji zakłóceń wywołanych sprzężeniem elektromagnetycznym sprowadzają się do:

1. stosowania linii o niewielkiej oporności falowej,
2. minimalizacji indukcyjności wzajemnych i pojemności sprzęgających montażu,
3. skracania długości przewodów,
4. zmniejszania zmian poziomów napięć i prądów.

Wyżej wymienione sposoby redukcji poziomu przeników okablowania są podawane w szeregu publikacji poświęconych temu zagadnieniu: [2], [3], [8].

Wybór najbardziej skutecznego sposobu nie jest sprawą prostą. Problem ten należy rozpatrywać uwzględniając warunki transmisji sygnału w przewodach aktywnych oraz właściwości elementów podstawowych, takie jak: poziomy wyjściowe napięcia, obciążalność, czasy przełączania, progi przeciwzakłóceniowe, oporności wyjściowe i wejściowe. Minimalizacja przeników okablowania jest również ściśle związana z takimi zagadnieniami konstrukcyjnymi jak: rozmieszczenie przestrzenne bloków maszyny cyfrowej współpracujących ze sobą, sposób podziału bloków cyfrowych na pakiety, gęstość upakowania elementów podstawowych itp.

W publikacjach poświęconych opisowi rozwiązań systemów cyfrowych [6], [1] można się spotkać z poglądem, iż najwłaściwszym praktycznym sposobem rozwiązania problemu przeników okablowania jest przeprowadzenie pomiarów oddziaływania zakłóceń na elementy podstawowe dla kilku przypadków ułożenia przewodów. Na podstawie badań stosunkowo prostych modeli, warunków typowych lub najgorszego przypadku, określa się reguły konstrukcji okablowania /rodzaj przewodów, maksymalną długość przewodów, sposób prowadzenia przewodów/ dla danego systemu.

Poniżej omówiono najczęściej stosowane w praktyce sposoby zmniejszenia przeników w okablowaniu maszyn cyfrowych zbudowanych z elementów podstawowych o czasach przełączania /20 - 50/nsek/.

Jednym ze sposobów zmniejszenia przeników jest dobór linii o niewielkiej oporności falowej. Przeciętne oporności falowe linii transmisyjnych stosowanych w okablowaniu maszyn cyfrowych podane zostały w tab. 1.

Zmniejszenie oporności falowej pojedynczych przewodów osiągnąć można przez stosowanie odpowiednio dużej powierzchni uziemienia. W nowych rozwiązaniach części centralnej maszyn cyfrowych [4] uziemienie nie jest wykonywane w postaci szyn, lecz np. w postaci płyt wypełniających przestrzeń między łączówkami /Leo - 326/, lub też stanowią je kasety i cała obudowa szafy zawierającej część centralną /ICT 1905/.

Wartości oporności falowej linii transmisyjnych /dane zaczerpnięte z [8]/.

Tabela 1.

Rodzaj przewodu	Przeciętna wartość oporności falowej
Pojedyncze przewody	(200 - 700)Ω
Pary skręcone	(80 - 200)Ω
Kable koncentryczne	(25 - 100)Ω

Zmniejszenie indukcyjności wzajemnej i pojemności sprzęgającej osiągane jest przede wszystkim przez luźne ułożenie przewodów. W tabeli 2 podano średnie wartości indukcyjności wzajemnej dla montażu wykonanego przy użyciu różnych typów linii transmisyjnych.

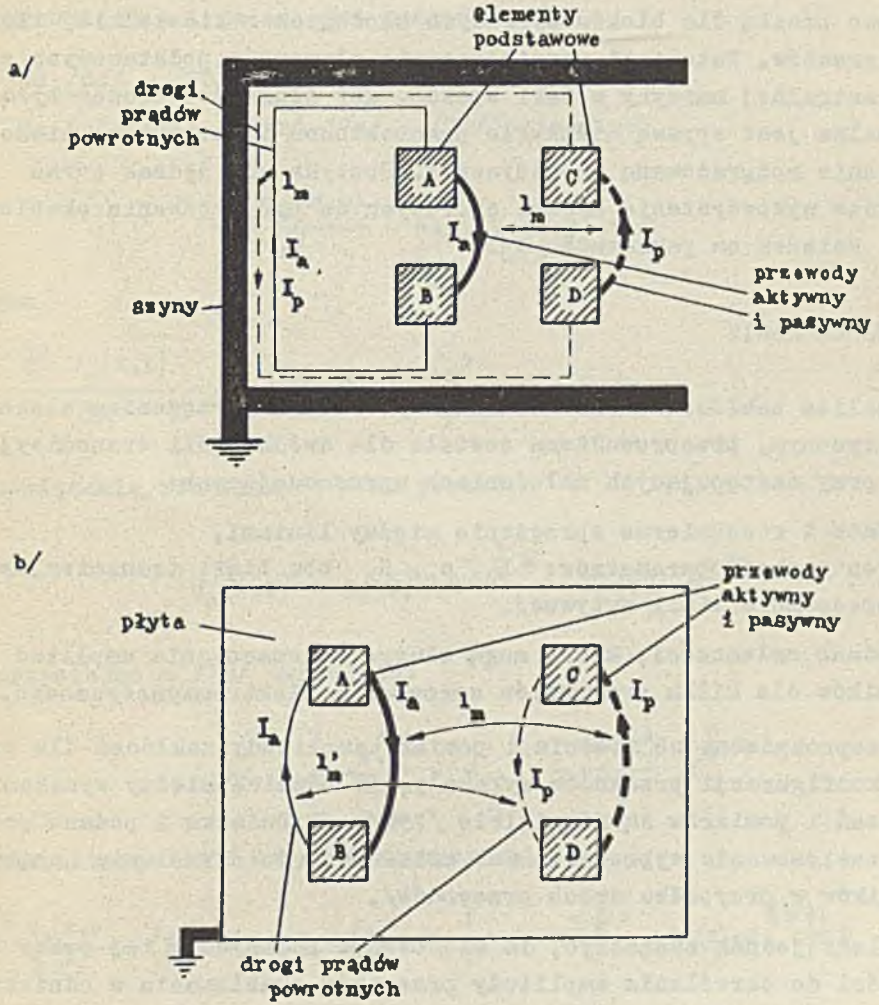
Warto zwrócić uwagę, iż wykonanie uziemienia w postaci płyty zapewnia jednocześnie zmniejszenie oporności falowej i zmniejszenie indukcyjności wzajemnej montażu [2], [6], [3].

Wykonanie uziemienia w postaci płyty, mówiąc obrazowo, "skraca drogę prądów powrotnych". Na rys. 5 pokazano rozpływ prądów oraz sprzężenie indukcyjne dla przypadku uziemienia wykonanego w postaci szyny /a/ oraz w postaci płyty /b/.

Wartości indukcyjności wzajemnej dla różnych typów linii transmisyjnych /dane zaczerpnięte z [2]/

Tabela 2.

Rodzaj przewodów montażowych	Średnia indukcyjność wzajemna na 1 m
Pojedyncze przewody	(1 - 7) μH/m
Pojedyncze przewody nad uziemioną płytą	0,64 μH/m
Kable specjalne	0,30 μH/m
Pary skręcone	0,06 μH/m
Kable koncentryczne	0,006 μH/m
Kable wielokrotnie ekranowane	tak mała jak tylko pożądane



Rys. 5. Rozpływ prądów oraz sprzężenie magnetyczne w przypadkach:
a/ uziemienia wykonanego w postaci szyn,
b/ uziemienia wykonanego w postaci płyty.

Rozmieszczenie przestrzenne elementów podstawowych pod kątem maksymalnego skrócenia przewodów połączeniowych jest sprawą stosunkowo prostą dla bloków cyfrowych złożonych z niewielkiej ilości elementów. Natomiast rozmieszczenie elementów podstawowych części centralnej maszyny w taki sposób, aby długość połączeń była minimalna jest sprawą niezwykle pracochłonną i dotychczas niedostatecznie rozpracowaną teoretycznie. Spotyka się jednak coraz częstsze wykorzystanie maszyn cyfrowych do projektowania okablowania i ścieżek na pakietach [5].

5. PODSUMOWANIE

Analiza zakłóceń w okablowaniu, wywołanych sprzężeniem elektromagnetycznym, przeprowadzona została dla dwóch linii transmisyjnych przy następujących założeniach upraszczających:

1. słabe i równomierne sprzężenie między liniami,
2. identyczność parametrów: l_p, c_o, Z_o obu linii transmisyjnych,
3. dopasowania linii aktywnej.

Podano zależności, które mogą służyć do szacowania amplitud przeników dla kilku przypadków sprzężenia elektromagnetycznego.

Przeprowadzone obliczenia i pomiary amplitudy zakłóceń dla prostych konfiguracji przewodów wykazały, iż różnice między wynikami obliczeń i pomiarów są niewielkie /25%/. /W Dodatku 2 podano przykład zastosowania wyprowadzonych zależności do określenia poziomu przeników w przypadku dwóch przewodów/.

Należy jednak zaznaczyć, iż stosowanie podanych w tej pracy zależności do określania amplitudy przeników okablowania w odniesieniu do bloków złożonych z dużej ilości przewodów, może prowadzić do znacznych rozbieżności między obliczeniami a pomiarami. Rozbieżności te wynikają głównie z konieczności uśrednienia parametrów rzeczywistego okablowania, celem obliczenia parametrów zastępczych dwóch jednorodnych linii.

Autorka dziękuje mgr inż. Z. Świątkowskiemu za zachętę i pomoc udzieloną w czasie pracy nad zagadnieniami stanowiącymi treść niniejszego artykułu oraz technikom J. Guttowi i P. Daniewskiemu za wykonanie obliczeń i pomiarów sprawdzających praktyczną przydatność wyprowadzonych zależności.

DODATEK 1

Wyprowadzenia i zależności pomocnicze

1. ad /8a/ - /8d/.

Na podstawie równań /7a/ - /7d/ otrzymano:

$$\frac{\partial^2 U_a(x,p)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{v^2} \cdot U_a(x,p) = 0 \qquad /1'/$$

oraz

$$\frac{\partial^2 U_p(x,p)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{v^2} \cdot U_p(x,p) - \frac{p^2}{v^2} \cdot \theta \cdot U_a(x,p) = 0 \qquad /2'/$$

Rozwiązanie równania /1'/ ma postać

$$U_a(x,p) = A_1(p) \cdot e^{-\frac{p}{v}x} + B_1(p) \cdot e^{\frac{p}{v}x} \qquad /3'/$$

Korzystając z /7b/ określono:

$$I_a(x,p) = \frac{A_1(p)}{Z_o} \cdot e^{-\frac{p}{v}x} - \frac{B_1(p)}{Z_o} \cdot e^{\frac{p}{v}x} \qquad /4'/$$

Podstawiając /3'/ do /2'/ otrzymano:

$$\frac{\partial^2 U_p(x,p)}{\partial x^2} - \left(\frac{p}{v}\right)^2 \cdot U_p(x,p) - \left(\frac{p}{v}\right)^2 \cdot \theta \cdot \left[A_1(p) \cdot e^{-\frac{p}{v}x} + B_1(p) \cdot e^{\frac{p}{v}x}\right] = 0 \qquad /5'/$$

Rozwiązanie równania /5'/ ma postać

$$U_p(x,p) = A_2(p) \cdot e^{-\frac{p}{v}x} + B_2(p) \cdot e^{\frac{p}{v}x} + x \cdot D(p) \cdot e^{-\frac{p}{v}x} + x \cdot E(p) \cdot e^{\frac{p}{v}x} \qquad /6'/$$

Korzystając z /4'/, określając na podstawie /6'/ $\frac{\partial U_p(x,p)}{\partial x}$ oraz podstawiając do /7d/ otrzymano:

$$I_p(x,p) = \frac{e^{-\frac{p}{v}x}}{Z_o}\cdot\left[A_2(p) - \frac{v}{p}\cdot D(p) + D(p)\cdot x - \frac{l_m}{l_p}\cdot A_1(p)\right] + \qquad /7/$$

$$- \frac{e^{\frac{p}{v}x}}{Z_o}\cdot\left[B_2(p) + \frac{v}{p}\cdot E(p) + E(p)\cdot x - \frac{l_m}{l_p}\cdot B_1(p)\right]$$

Można sprawdzić podstawiając $\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}$ oraz $U_p(x,p)$ otrzymane z /6'/ do /5'/, że równanie /5'/ jest spełnione dla każdego x i p, gdy stałe D(p) i E(p) wynoszą:

$$D(p) = -\frac{A_1(p)\cdot p\cdot\theta}{2v}; \qquad E(p) = \frac{B_1(p)\cdot p\cdot\theta}{2v} \qquad /8'/$$

Podstawiając /8'/ do /6'/ otrzymano wyrażenie /8o/. Wyrażenie /8d/ otrzymano podstawiając /8'/ do /7'/.

2. ad /10a/, /10b/, /10o/.

Na podstawie definicji współczynników odbicia określono $Z_1(p)$ i $Z_2(p)$ *)

$$Z_1(p) = \frac{1 + r_1(p)}{1 - r_1(p)}; \qquad Z_2(p) = \frac{1 + r_2(p)}{1 - r_2(p)} \qquad /9'/$$

Stałe $A_1(p)$ i $B_1(p)$ określono korzystając z /3'/, /4'/ oraz /9a/ i /9b/.
Otrzymano rezultat:

$$A_1(p) = U(p); \qquad B_1(p) = 0 \qquad /10'/$$

Podstawiając /10'/ do /8o/ i /8d/ oraz korzystając z /9o/, /9b/ i /9'/ otrzymuje się zależności:

$$-\frac{A_2(p) + B_2(p)}{A_2(p) - \frac{l_m}{l_p}\cdot U(p) + \frac{\theta\cdot U(p)}{2} - B_2(p)} = \frac{1 + r_1(p)}{1 - r_1(p)} \qquad /11'/$$

*) porównaj z /11/ i /12/.

$$\frac{e^{\frac{-2pL}{v}} \cdot \left[A_2(p) - \frac{\theta \cdot p \cdot L}{2v} \cdot U(p)\right] + B_2(p)}{e^{\frac{-2pL}{v}} \cdot \left[A_2(p) - \frac{l_m}{l_p} \cdot U(p) - \frac{\theta \cdot p \cdot L}{2v} \cdot U(p) + \frac{\theta \cdot U(p)}{2}\right] - B_2(p)} = \frac{1 + r_2(p)}{1 - r_2(p)} \quad /12'/$$

Stałe $A_2(p)$ i $B_2(p)$ wyznaczono rozwiązując układ równań /11'/, /12'/. Otrzymano wyrażenia /10b/ i /10c/.

3. ad /17a/, /17b/

Skorzystano z zależnośći

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \ldots \quad /13'/$$

gdzie: $y = (r_1 r_2) \cdot e^{-\frac{2pL}{v}}$

Szereg taki jest zbieżny dla $|y| < 1$

Wyrażenie /14a/ można zapisać w postaci:

$$U_p(\theta,p) = \left\{\left(\frac{l_m}{l_p} + \frac{\alpha_s}{\alpha_o}\right) \cdot \left[1 + (r_1 r_2) \cdot e^{\frac{-2pL}{v}} + (r_1 r_2)^2 \cdot e^{\frac{-2pL}{v}} + \ldots\right] + \right.$$

$$- \left(\frac{l_m}{l_p} + \frac{\alpha_s}{\alpha_o}\right) \cdot \left[e^{\frac{-2pL}{v}} + (r_1 r_2) \cdot e^{\frac{-4pL}{v}} + (r_1 r_2)^2 \cdot e^{\frac{-6pL}{v}} + \ldots\right] + \quad /14'/$$

$$\left. - 2 r_2 \cdot \theta \cdot \frac{pL}{v} \cdot \left[e^{\frac{-2pL}{v}} + (r_1 r_2) \cdot e^{\frac{-4pL}{v}} + (r_1 r_2)^2 \cdot e^{\frac{-6pL}{v}} + \ldots\right]\right\} \cdot \frac{U(p) \cdot (1 + r_1)}{4}$$

Następnie zastosowano do kolejnych składników szeregów ogólnie znane reguły rachunku operatorowego *) /twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym i twierdzenie o różniczkowaniu/.

$$\alpha^{-1}\left[\alpha\left[\varphi(t)\right] \cdot e^{-pt_o}\right] = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < t_o \\ \varphi(t - t_o) & \text{dla } t > t_o \end{cases} \quad /15'/$$

$$\alpha^{-1}\left[p \cdot \alpha\left[\varphi(t)\right] - \varphi(o)\right] = \frac{d}{dt}\varphi(t) \quad /16'/$$

*) Symbolem $\alpha\left[\varphi(t)\right]$ oznaczono transformatę Laplace'a funkcji $\varphi(t)$. Symbol α^{-1} dotyczy transformacji odwrotnej.

Otrzymano zależność /17a/. Postępowanie przy otrzymaniu /17b/ było analogiczne.

DODATEK 2.

Przykład zastosowania wyprowadzonych zależności na napięcia przeników do szacowania poziomu zakłóceń w okablowaniu.

1. Przeniki w przypadku dwóch przewodów położonych nad uziemioną płytą.

Określono analitycznie i pomiarowo amplitudy zakłóceń dla przypadku dwóch przewodów: pasywnego /rozwartego na końcu $x = L$ i obciążonego na końcu $x = 0$ zmienną opornością R/, oraz aktywnego /obciążonego na końcu $x = L$ opornością zbliżoną do oporności falowej linii/, biegnących równolegle do siebie i równolegle do uziemionej płyty. Schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rys. D1.

1.1. Obliczenia przeników

Amplitudę zakłóceń w funkcji oporności obciążenia przewodu pasywnego R określono z zależności /17a/ podstawiając

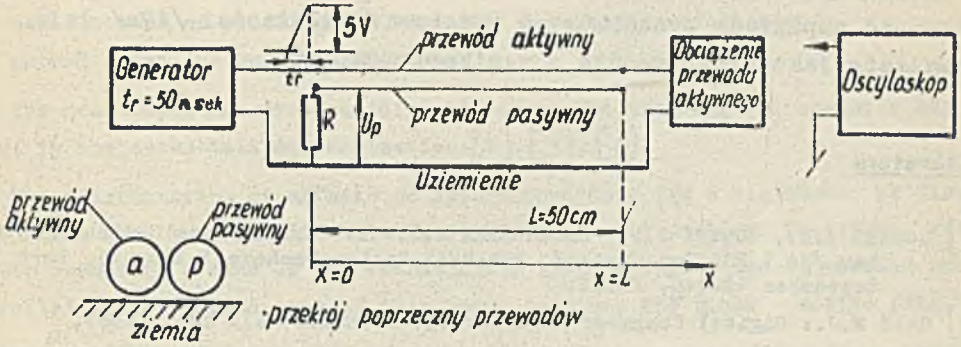
$$r_1 = \frac{R - Z_0}{R + Z_0}$$

$$r_2 = 1.$$

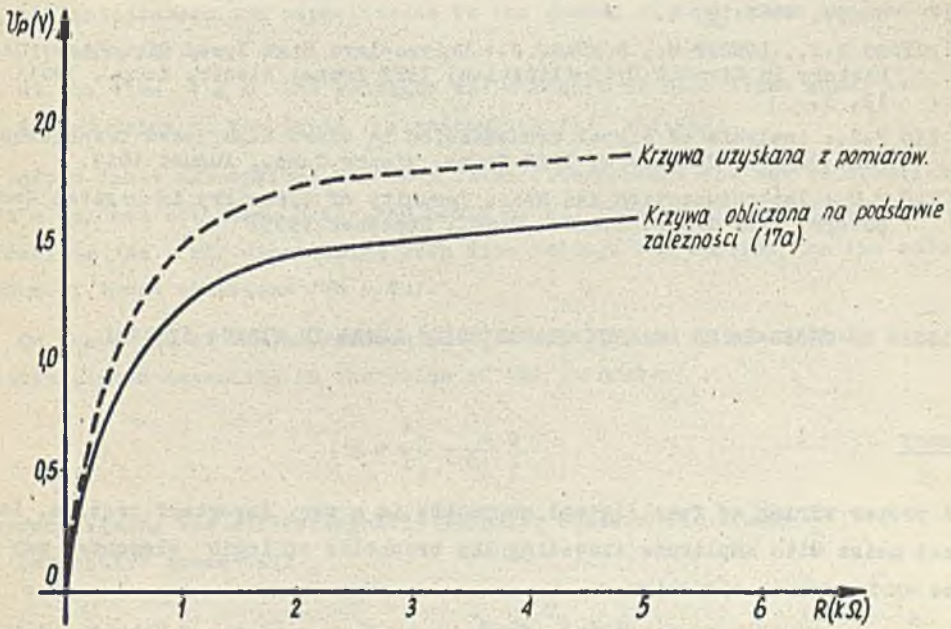
Przyjęto do obliczeń parametry układu linii oraz czas narastania i amplitudę napięcia na przewodzie aktywnym, odpowiadające warunkom pomiaru /rys. D1/. Parametry zespołu linii zmierzono przy użyciu mostka małej częstotliwości. Otrzymano rezultaty: $C_0 = 98$ pF/m, $C_s = 62$ pF/m, $l_m = 0{,}84$ μH/m, $l_p = 0{,}5$ μH/m. Czas narastania i amplitudę napięcia zmierzono przy użyciu oscyloskopu. Przyjęto do obliczeń: $t_r = 50$ nsek, $U = 5$ V.

1.2. Pomiary amplitudy przeników

Mierzono amplitudy zakłóceń na końcu $x = 0$ przewodu pasywnego zmieniając R w granicach $(0 - 5)$ K. Pomiar napięcia przeników wykonywany był z dokładnością $\pm$ 10%. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. D2.



Rys. D1. Schemat układu do pomiaru zakłóceń dla dwóch przewodów położonych nad uziemioną płytą.



Rys. D2. Wyniki pomiarów i obliczeń amplitudy napięcia zakłóceń.

Porównując wyniki pomiarów i obliczeń można stwierdzić, iż obliczanie amplitudy przeników na podstawie zależnośoi /17a/ daje rezultaty jakościowo zgodne z wynikami pomiarów.

Literatura

[1] CONNEL J.B., HUSSEY L.W., KETCHLEDGE R.W.: Nr 1 Electronic Switching System /No 1 ESS Bus System/, The Bell System Technical Journal, Part 1, September 1964:5, XLIII.

[2] GRAY M.J.: Digital Computer Engineering, Prentice Hall Inc., 1963.

[3] JARVIS P.B.: The Effects of Interconnections an High-Speed Logic Circuits, IEEE. Trans. Electr.Comp., October 1963.

[4] KOJEMSKI A., KOWALEWSKA M., SINKIEWICZ T.: Międzynarodowa wystawa maszyn cyfrowych, Incomex 66, Biuletyn Informacyjny IMM, Nowości Techniczne, Luty 1967:1/13/.

[5] LEINER A.L., WEINBERGER A., CALEMAN L., LABERMAN H.: Using Digital Computer in the Designe and Maintenance of New Computers, IEEE Trans.Electr. Comp., 1961:12, 4.

[6] PRYWES N.S., LUKOFF H., SCHWARC J.: Univac-Larc High Speed Circuitry: Case History in Circuit Optimalization, IEEE Trans. Electr. Comp., 1961: 12, 3.

[7] YAO F.C.: Analysis of Signal Transmission in Ultra High Speed Transistorized Digital Computers, IEEE Trans. Electr.Comp., August 1963.

[8] YAO F.C.: Interconnection and Noise Immunity of Circuitry in Digital Computers, IEEE Trans. Electr. Comp., December 1965.

ANALYSIS OF CROSS-TALKS BETWEEN TRANSMISSION LINES IN WIRING SYSTEMS

Summary

A proper wiring of fast digital computers is a very important problem. Internal noise with amplitude exceeding the tresholds of logic elements may cause an incorrect operation.

Noises that occur in digital computer wiring are most frequently the following:

a/ cross-talk noise caused by electromagnetic coupling between the transmission lines;

b/ reflections appearing because of unmatched transmission lines;

c/ speaking gates - noises caused by transients on inputs of logical elements;
d/ oscillations of some logical elements /i.e. emitter-followers/;
e/ ground noise and supply line noise.

The most important problem, directly connected with digital computer wiring, is the cross-talk minimalization [2], [3], [8].

The determination of effects of interconnections for a big number of lines, and their arbitrary positions in space, is a complex problem. Therefore, the paper considers a case of two transmission lines parallel one to another and parallel to the ground, one of them being passive, the other - active /Fig.1/.

The interdependences between line voltages and currents /Fig. 1/ are determined by the set of differential equations /1a - 1d/.

The equations are simplified, the following assumption being accepted:
1. the passive line does not change the voltage and the current in the active line /equations /2/ and /3//;
2. the inductances and capacitances to the ground of both lines are the same /formula /4//;
3. at the time $t \leqslant 0$ the voltages and currents of both lines equal zero in any point of the lines /relationships /5/ and /6//.

After these assumptions had been taken into account the set of equations /7a - 7c/ was obtained, being the basis of all further considerations. Expressions /8a - 8d/ determining both line voltage and current are the solutions of these equations /7a - 7c/.

On the basis of the expression /8c/, several kinds of cross-talks were distinquished depending on the value of the parameter

$$\left(\theta = \frac{l_m}{l_p} - \frac{C_s}{C_o}\right)$$

characterizing the electromagnetic coupling between the lines:
1. capacitive cross-talk

$$\theta = -\frac{C_s}{C_o}; \qquad \frac{l_m}{l_p} \ll \frac{C_s}{C_o}$$

2. inductive cross-talk

$$\theta = \frac{l_m}{l_p}; \qquad \frac{C_s}{C_o} \ll \frac{l_m}{l_p}$$

3. capacitive and inductive cross-talk

$$\frac{l_m}{l_p} \quad \text{comparable with} \quad \frac{C_s}{C_o}$$

with regard to the following case

$$\frac{l_m}{l_p} = \frac{C_s}{C_o}$$

The case that most often occurs in a wiring is the one when values

$$\frac{l_m}{l_p} \quad \text{and} \quad \frac{C_s}{C_o}$$

are comparable.

The constants $A_1(P)$, $B_1(P)$, $A_2(P)$, $B_2(P)$ appearing in formulas /8a - 8d/ are defined by means of boundary conditions for both lines. For simplification it has been assumed that the active line is terminated in its characteristic impedance. The obtained expression /13/ determines the voltage of a cross-talk in any point of the passive line. After having assumed that the passive line has resistors on its both ends, and after the execution of the inverse Laplace'a transformation, expressions /17a/, /17b/ of cross-talk voltages are obtained.

On the basis of the above formulas the dependences of cross-talks are given. Various cases of electromagnetic coupling for different values of parameter θ are considered /expressions 18a - 21b/.

The case was also discussed when both active and passive lines matched. Relationship for various cases of electromagnetic couplings /22/, /25/ are also given. On the basis of the above, the following can be stated:

1. if capacitative coupling predominates

$$\left(\frac{C_s}{C_o} \gg \frac{l_m}{l_p}\right),$$

the voltage of cross-talks on the ends of the passive line has the same polarity;

2. if inductive coupling predominates

$$\left(\frac{l_m}{l_p} \gg \frac{C_s}{C_o}\right),$$

the voltage of cross-talks on the ends of the passive line has an opposite polarity;

3. for

$$\left(\frac{l_m}{l_p} = \frac{C_s}{C_o}\right)$$

the voltage of a cross-talk at the end of the passive line, nearer to the load of the active line, equals zero.

The above statements /expressions /22/, /25// are illustrated in Fig. 4, presenting the voltage waveforms on both ends of the passive line. A linear source voltage being assumed /dependence /29//.

Finally the ways of reducing the levels of cross-talks in a digital computer wiring were discussed resulting from dependences given in this paper.

The minimalization of cross-talk levels can be reached by:

1. the reduction of mutual inductances and capacitances between the lines;
2. the application of lines with a small characteristic impedance;
3. shortening the wire length;
4. decreasing voltage and current swings.

The advantages of applying the so-called "point-to-point over a ground plane" - wiring system /Fig. 5/ were emphasized.

Such construction ensures a simultaneous reduction of characteristic impedances and mutual inductances of mounted wires.

PRACE IMM
Zeszyt 1
© 1968.03
681.3.06:517.92:621.372.2

PEWNA METODA FORMUŁOWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH DLA ANALIZY NUMERYCZNEJ OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

Bohdan WOJTOWICZ

Pracę złożono 30.06.1966

W pracy przedstawiono pewną metodę formułowania opisu układu elektrycznego w postaci równań różniczkowych pierwszego rzędu, pozwalającego na zastosowanie numerycznych metod całkowania.
U podstaw metody leży I i II prawo Kirchhoffa oraz koncepcja właściwie obranego drzewa układu podana przez Bashkowa.
Wyprowadzono ogólną postać macierzową opisu układu i podano sposób wyznaczania wyrazów poszczególnych macierzy.
Opis ten zaprogramowany na maszynę cyfrową może być wykorzystany w automatyzacji procesu projektowania układów elektrycznych.

Spis treści

1. WSTĘP 103
2. KLASYCZNE METODY ANALIZY UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH 105
3. ANALIZA UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH METODĄ DRZEWA 108
4. PROPONOWANA METODA FORMUŁOWANIA RÓWNAŃ 114
5. FORMUŁOWANIE MATEMATYCZNEGO OPISU UKŁADU ZAPROPONOWANĄ METODĄ . . . 120
6. ZAKOŃCZENIE 127
DODATEK 128
Literatura 134
Summary 135

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

w	- liczba węzłów schematu zastępczego układu
w_n	- liczba niezależnych węzłów schematu zastępczego układu
o	- liczba obwodów /oczek/ w schemacie zastępczym układu
o_n	- liczba niezależnych obwodów w schemacie zastępczym układu
e	- liczba gałęzi w schemacie zastępczym układu
R	- oporność
G	- przewodność
L	- indukcyjność
C	- pojemność
M	- indukcyjność wzajemna
Γ	- 1/L
S	- 1/C
J	- źródło prądowe
E	- źródło napięciowe
i	- natężenie prądu
u	- napięcie
i_L, i_G, i_C	- prąd odpowiednio: indukcyjności, przewodności, pojemności
u_L, u_R, u_C	- napięcie odpowiednio: indukcyjności, oporności, pojemności
C_d, L_d, G_d	- odpowiednio pojemność, indukcyjność lub przewodność znajdująca się w gałęzi drzewa
C_l, L_l, R_l	- odpowiednio pojemność, indukcyjność lub oporność znajdująca się w gałęzi dopełniającej
i_{Cd}, i_{Gd}, i_{Ld}	- prądy odpowiednio w pojemności, przewodności i indukcyjności znajdujące się w gałęziach drzewa
i_{Cl}, i_{Rl}, i_{Ld}	- prądy odpowiednio w pojemności, oporności i indukcyjności znajdujące się w gałęziach dopełniających
u_{Ll}, u_{Rl}, u_{Cl}	- napięcia odpowiednio na indukcyjności, oporności i pojemności znajdujące się w gałęziach dopełniających
u_{Ld}, u_{Gd}, u_{Cd}	- napięcia odpowiednio na indukcyjności, przewodności i pojemności znajdujące się w gałęziach drzewa
J_{Cl}, J_{Gl}, J_{Ll}	- źródła prądowe stanowiące gałęzie dopełniające, podłączone równolegle, odpowiednio do pojemności, przewodności i indukcyjności
a, b, t, h, d, g	- wyrazy macierzy wiążącej prądy gałęzi drzewa z prądami gałęzi dopełniających
a',b',t',h',d',g'	- wyrazy macierzy wiążącej napięcia gałęzi dopełniających z napięciami gałęzi drzewa

1. WSTĘP

Analiza zjawisk zachodzących w układach elektrycznych, w swej najogólniejszej postaci, sprowadzona być może do rozpatrywania pola elektromagnetycznego w przestrzeni określonej specyfiką danego układu.

W praktyce jednak, tak ogólne podejście stwarza ogromne trudności obliczeniowe, dlatego tam, gdzie jest to możliwe, rzeczywiste urządzenia i zachodzące w nich procesy przedstawiane są w sposób uproszczony. Zakłada się tu w pierwszym rzędzie, że zachodzące w układzie zjawiska nie zależą od współrzędnych przestrzennych i pominięte zostaje przenoszenie energii drogą promieniowania pola elektromagnetycznego, co w efekcie prowadzi do rozpatrywania obwodu elektrycznego o stałych skupionych. Nie stanowi to poważniejszego ograniczenia, bowiem interesują nas z reguły napięcia i prądy w poszczególnych gałęziach obwodu a nie pole. Natomiast wpływ parametrów przewodów łączących poszczególne elementy, jak i wzajemne oddziaływanie pojemnościowe i indukcyjne, co często trudno pominąć przy wysokich częstotliwościach, uwzględnić można w projektowaniu poprzez wprowadzenie zespołu odpowiednio połączonych skupionych elementów RLCM. Liczba tych elementów oraz stopień złożoności ich wzajemnych połączeń zależy od wymaganej dokładności przybliżenia schematu zastępczego do układu rzeczywistego.

Jeżeli elementy tak określonego obwodu charakteryzują się parametrami, które nie zależą ani od czasu ani od wielkości prądów i napięć w tych elementach, mowa jest wówczas o klasie układów zwanych liniowymi układami elektrycznymi o niezmiennych w czasie stałych skupionych.

Chociaż większość prac z zakresu klasycznej teorii obwodów elektrycznych dotyczy tej właśnie klasy, to przy analizie współczesnych układów elektrycznych, szczególnie półprzewodnikowych, zachodzi często potrzeba uwzględniania w toku obliczeń nieliniowego charakteru niektórych parametrów elementów układów, czyli objęcie analizą obwodów nieliniowych. Trudność matematycznego traktowania takich układów tkwi w tym, że istnieje nieskończenie wiele nieliniowości i różne ich rodzaje wymagają na ogół różnych

metod matematycznych. Jednym ze sposobów pokonania tych trudności jest poszukiwanie rozwiązania na drodze numerycznej. Możliwość rozwiązania na tej drodze równań różniczkowych nieliniowych wynika z faktu, iż numeryczne całkowanie dokonywane jest metodą krokową i istnieje możliwość sukcesywnego aktualizowania wartości nieliniowych parametrów, przy przechodzeniu od jednego kroku do drugiego. Aktualizacja ta może być dokonywana według dowolnej zależności nieliniowej, opisanej w przypadku maszyn cyfrowych odpowiednim podprogramem.

Zastosowanie metod numerycznych wymaga jednak sprowadzenia równań różniczkowych do właściwej postaci. Po pierwsze, równania opisujące układy winny być sprowadzone do równań pierwszego rzędu i pierwszego stopnia, a ponadto muszą być przedstawione w formie rozwiniętej względem pierwszej pochodnej, tzn. w postaci

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \qquad /1/$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę współrzędne prostokątne x i t punktu na płaszczyźnie x, t, wówczas równanie to określa nachylenie w dowolnym punkcie. Zmienną x będąca zmienną zależną może być np. napięciem lub prądem w układzie. Zmienna niezależna t jest czasem. Krzywa

$$x = g(t)$$

stanowi rozwiązanie wyżej podanego równania wówczas, jeżeli w każdym punkcie tej krzywej jej nachylenie jest równe nachyleniu określonemu przez to równanie. Z wyjątkiem bardzo szczególnych warunków, istnieje tylko jedna krzywa rozwiązania przechodząca przez dany punkt na płaszczyźnie x, t. W zagadnieniach fizycznych znamy zwykle jeden z punktów rozwiązania określający warunki początkowe. Punkt ten, którego współrzędne oznaczmy x_o t_o stanowi punkt wyjścia, od którego zaczynając wyznaczyć możemy w sposób krokowy poszczególne punkty krzywej, znając każdorazowo aktualną wartość jej nachylenia. Proces ten jest prosty. Od punktu x_o t_o poruszamy się w kierunku określonym nachyleniem krzywej dla wartości x_o t_o do nowego punktu, znajdujemy nowe nachylenie, czynimy dalszy krok według tego nowego kierunku, osiągamy następny punkt krzywej rozwiązania itd.

Funkcja $f(x, t)$ jest dowolną zależnością liniową lub nieliniową i jej wartość każdorazowo może być obliczona dla aktualnej wartości zmiennej zależnej x i zmiennej niezależnej t.

Przedmiotem zainteresowania konstruktora są na ogół wartości napięć i prądów w określonych punktach układu i to zarówno ich stany ustalone, jak i przebiegi czasowe stanowiące odpowiedź na przyłożone do układu sygnały wymuszające. Stąd też właśnie prądy i napięcia przyjmują rolę zmiennych zależnych, gdy natomiast czas obrany zostaje jako zmienna niezależna. Zachodzi więc potrzeba takiego przygotowania matematycznego opisu układu, w którym zmiennymi niezależnymi byłyby prądy i napięcia w tym układzie, przy czym forma tego opisu winna odpowiadać postaci wzoru /1/.

W dalszej części niniejszego artykułu przedstawiona została pewna metoda sprowadzania opisu układu elektrycznego do postaci podanej wzorem /1/.

Punkt wyjścia do opracowania tej metody stanowiła praca Bashkowa [1] wraz z dalszymi uzupełnieniami Bryanta [2], Branina [3] i Browna [4].

2. KLASYCZNE METODY ANALIZY UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

Układ elektryczny stanowi zespół połączonych ze sobą elementów konstrukcyjnych, takich jak: tranzystory, diody, lampy elektronowe, kondensatory, oporniki, cewki itp.

Jeżeli każdy z tych elementów zastąpimy schematem zastępczym zawierającym idealne oporności, indukcyjności, sprzężenia w postaci indukcyjności wzajemnych, pojemności oraz źródła zasilania, to w konsekwencji uzyskamy schemat zastępczy układu zawierający skończoną ilość skupionych elementów RLCM, zasilanych ze skończonej ilości źródeł napięciowych E i prądowych I, tworzących siatkę połączonych ze sobą gałęzi.

Celem analizy jest wyznaczanie interesujących nas prądów i napięć poszczególnych gałęzi.

Do rozwiązania tego zadania zachodzi potrzeba sformułowania układu niezależnych równań, w których wystąpiłyby zmienne niewiado-

me. Wychodzimy tu z konfiguracji układu, która określa wzajemne połączenie poszczególnych jego gałęzi.

Układ złożony z e gałęzi zawiera 2 e niewiadomych napięć i prądów gałęziowych. Stąd potrzeba ułożenia takiej samej ilości niezależnych równań.

Podstawę do sformułowania tych równań stanowią I i II prawo Kirchhoffa, których dobrze znaną treść odzwierciedlają następujące zależności

$$\sum_{j=1}^{n} J_{jk} = 0 \qquad /2/$$

$$\sum_{i=1}^{m} U_{ir} = 0 \qquad /3/$$

gdzie n jest ilością gałęzi spotykających się w węźle k /równanie /2//

m ilością gałęzi wchodzących w skład oczka r /równanie /3//.

Zależności /2 i 3/ pozwalają napisać w_n niezależnych równań prądowych oraz o_n niezależnych równań napięciowych. Wielkości te określone są następująco:

$$w_n = w - 1 \qquad /4/$$

$$o_n = e - w_n = e - w + 1 \qquad /5/$$

Łącznie uzyskujemy e równań. Przy pisaniu pozostałych e równań, korzystamy z prawa Ohma, które w swej uogólnionej postaci wiąże napięcia i prądy dla poszczególnych elementów:

dla oporności $i = Gu$ lub $u = Ri$ /6/

dla pojemności $i_c = C \frac{du_c}{dt}$

dla indukcyjności $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ /7/

Powszechnie stosowane są dwie metody analizy układów elektrycznych. Są to metody potencjałów węzłowych oraz prądów obwodowych. W pierwszej z nich zmiennymi są potencjały poszczególnych węzłów liczone w stosunku do obranego węzła odniesienia. Takich zmiennych dla układu o w węzłach jest w-1. W metodzie tej dla wszystkich węzłów, z wyjątkiem węzła odniesienia, piszemy równania prądów pozostawiając po jednej stronie równości źródła prądowe, a po drugiej prądy gałęzi biernych. W gałęziach mieszanych wprowadzamy dodatkowy węzeł, w efekcie czego uzyskujemy gałęzie jednorodne. Prądy gałęzi biernych wyrażamy za pomocą różnic potencjałów na końcach tych gałęzi i ich susceptancji. Po przekształceniach układ równań w tej metodzie ma postać następującą

$$Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + \dots + Y_{1(w-1)} V_{(w-1)} = J_1$$

$$Y_{(w-1)1} V_1 + Y_{(w-1)2} V_2 + \dots + Y_{(w-1)(w-1)} V_{(w-1)} = J_{(w-1)}$$

gdzie Y - admitancje odpowiednich gałęzi związanych z danym węzłem

V - potencjały danego węzła względem węzła odniesienia

J - źródła prądów dochodzących do danego węzła

Przy czym poszczególne wyrazy po lewej stronie w ogólnym przypadku mogą mieć postać:

$$Y_{ij} V_j = G_{ij} V_j + C_{ij} \frac{dV_j}{dt} + \frac{1}{L_{ji}} \int V_j dt$$

W metodzie prądów obwodowych obiera się układ niezależnych obwodów, a w każdym z nich kierunek prądów obwodowych, które to prądy stanowią zmienne równań. Dla każdego obwodu formułuje się równanie napięć, przy czym po jednej stronie równości pozostawia się źródła napięciowe, a po drugiej napięcia pozostałych gałęzi obwodów. Dla gałęzi mieszanych wprowadzamy dodatkowy węzeł. Dla właściwie obranych oczek uzyskujemy niezależne równania napięciowe, których liczbę określa wzór /5/. Jeśli teraz napięcia gałęzi z elementami biernymi wyrazimy w funkcji prądów obwodowych i odnośnych impedancji, to po przekształceniach uzyskujemy następującą standartową formę równań tej metody:

$$Z_{11}\, i_1 + Z_{12}\, i_2 + \ldots + Z_{1\,(e-w+1)}\, i_{(e-w+1)} = E_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_{(e-w+1)\,1}\, i_1 + Z_{(e-w+1)\,2}\, i_2 + \ldots + Z_{(e-w+1,\,e-w+1)}\, i_{(e-w+1)} = E_{e-w+1}$$

gdzie Z - impedancje odpowiednich gałęzi związanych z danym oczkiem

i - prądy oczkowe

E - źródła napięciowe występujące w danym oczku

natomiast poszczególne wyrazy mają w ogólnym przypadku postać:

$$Z_{ij}\, i_j = R_{ij}\, i_j + L_{ij} \frac{di_j}{dt} + \frac{1}{Ci_j} \int i_j dt$$

Metoda potencjałów węzłowych nadaje się lepiej do analizy układów zawierających jedynie źródła prądowe, natomiast metoda prądów obwodowych jest lepsza do analizy układów zawierających źródła napięciowe. Ta ostatnia metoda wymaga również znalezienia zbioru niezależnych obwodów, bowiem nie każdy zbiór e-w+1 równań napięciowych jest niezależny. Posługujemy się tu z reguły metodą oczkową, ale ograniczona jest ona z kolei do schematów płaskich [5]. Najpoważniejszą wadą obu tych metod w zastosowaniu do analizy numerycznej jest to, iż równania jakie uzyskujemy w wyniku ich stosowania są równaniami różniczkowo-całkowymi, odbiegającymi znacznie od pożądanej postaci określonej wzorem /1/.

3. ANALIZA UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH METODĄ DRZEWA

Tak poważne wady obu wymienionych metod kazały szukać innej metody formułowania równań podstawowych. Stanowi ją metoda drzewa, będąca modyfikacją metody oczkowej.

Metoda drzewa ma te podstawowe zalety, że pozwala bezpośrednio sformułować właściwą ilość niezależnych równań podstawowych, pozwala analizować układy zawierające zarówno źródła napięciowe jak i prądowe, obejmuje swym zasięgiem schematy płaskie jak i przestrzenne [5] oraz przy właściwym wyborze drzewa pozwala sformułować opis układu elektrycznego w formie równań różniczkowych, a nie różniczkowo-całkowych.

Nazwa tej metody wywodzi się od jednego z pojęć topologicznych. Odwzorowaniem połączeń dowolnego schematu elektrycznego jest struktura, wyrażona specyficzną dla danego schematu siatką węzłów i gałęzi. Struktura ta zwie się grafem, i zawiera wszystkie węzły i wszystkie gałęzie układu. Jednym z dalszych pojęć jest drzewo. Jest to struktura stanowiąca część grafu /brak w tej strukturze oczek zamkniętych/, zawierająca wszystkie jego węzły, ale tylko te gałęzie, które niezbędne są do połączenia tych wszystkich węzłów. Pozostałe gałęzie grafu stanowią gałęzie dopełniające danego drzewa. Pewną ilustrację omawianych tu pojęć można znaleźć na rys. 1.

Jeżeli teraz do obranego drzewa dołączymy jedną z gałęzi dopełniających, wówczas powstaje pewien zamknięty obwód gałęzi, zwany oczkiem elementarnym. Ilustruje to rys. 2.

Szersze omówienie tych pojęć znajdzie czytelnik w pracy [5].

Jeżeli poszczególnym gałęziom omawianych struktur przypiszemy określone kierunki, wówczas mamy do czynienia ze strukturami zorientowanymi. Stosuje się wówczas określenia: graf zorientowany, drzewo zorientowane itd.

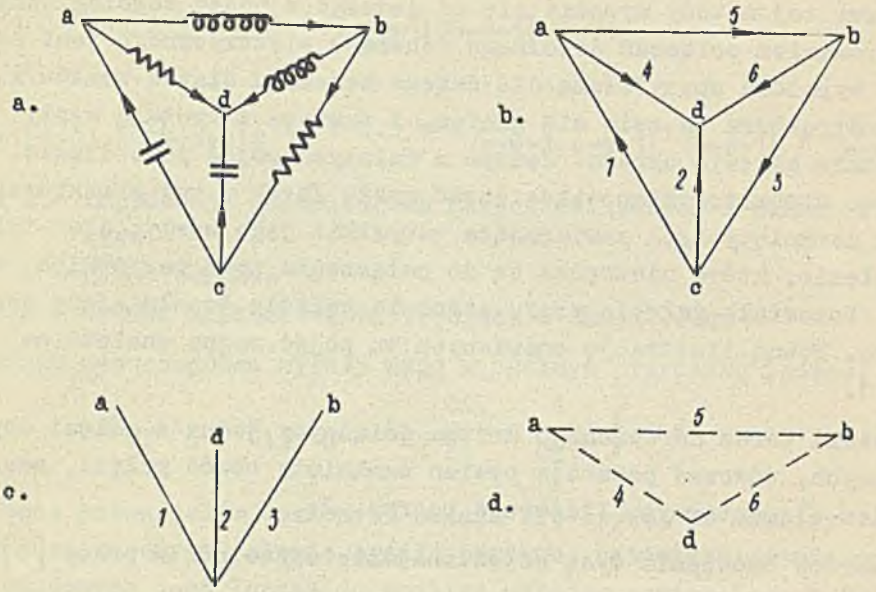
Korzystając z powyższych pojęć i w oparciu o prądowe prawo Kirchhoffa możemy dla każdej gałęzi drzewa napisać równanie prądowe, w którym prąd tej gałęzi wyrazimy jako sumę algebraiczną odpowiednich prądów gałęzi dopełniających. Dla każdej gałęzi drzewa mamy

$$i_{di} = \sum_{j=1}^{M} i_{l_{ij}} \qquad /8/$$

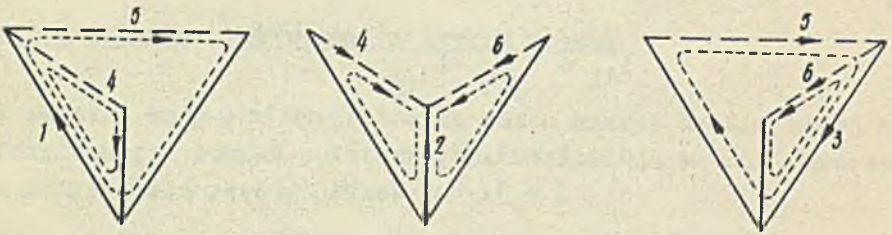
$$\text{dla } i = 1, 2, \ldots N;$$
$$j = 1, 2, \ldots M;$$

gdzie

N – ilość gałęzi drzewa
M – ilość gałęzi dopełniających
i_{d_i} – prąd i-tej gałęzi drzewa
$i_{l_{ij}}$ – prąd j-tej gałęzi dopełniającej występujący w równaniu na prąd i-tej gałęzi drzewa



Rys. 1. a/ Schemat układu
b/ jego graf
c/ obrane drzewo
d/ dopełnienie tego drzewa



Rys. 2. Formułowanie równań prądowych

Z kolei dla każdego oczka elementarnego w oparciu o napięciowe prawo Kirchhoffa można napisać równania, w których napięcia gałęzi dopełniających wyrazimy jako sumę algebraiczną odpowiednich napięć gałęzi drzewa

$$u_{l_j} = \sum_{i=1}^{N} u_{d_{ji}} \qquad /9/$$

gdzie

u_{l_j} - napięcie j-tej gałęzi dopełniającej

$u_{d_{ij}}$ - napięcie i-tej gałęzi drzewa występujące w równaniu na napięcie j-tej gałęzi dopełniającej

Liczbę tych równań oraz ich właściwości określają następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1

Układ o e gałęziach i w węzłach ma dokładnie e-w+1 oczek elementarnych względem obranego drzewa.

Twierdzenie 2

Równania napięciowe napisane dla każdego oczka elementarnego są niezależne.

Dowód dla obu tych twierdzeń znajduje się w pracy [5].

Ponieważ dla każdego oczka elementarnego można napisać równanie napięciowe, więc równań takich można sformułować e-w+1.

W oparciu o to samo drzewo można sformułować równanie prądowe /8/.

Liczba tych równań jest równa liczbie prądów gałęziowych, a co za tym idzie liczbie gałęzi drzewa.

Liczba gałęzi drzewa według definicji drzewa [5] dla układu o w węzłach równa jest w-1.

Twierdzenie 3

Równania prądów dla każdej gałęzi drzewa, w których wyrażamy prądy gałęzi drzewa za pomocą prądów gałęzi dopełniających, stanowią układ niezależny.

Dowód. Prądów gałęziowych danego drzewa jest w-1. Niech to będą gałęzie $d_1, d_2 \ldots d_{w-1}$. Niech i_j będzie prądem gałęzi d_j.

Każde z równań, o których mowa w twierdzeniu 3 wyraża i_j za pośrednictwem prądów gałęzi dopełniających. W każdym z równań występuje tylko jedna ze zmiennych ij, a ponieważ równań tych jest tyle ile zmiennych, stanowi to dowód twierdzenia.

Z twierdzeń powyższych wynika, że metoda pozwala sformułować w-1 niezależnych równań prądowych oraz e-w+1 niezależnych równań napięciowych. Razem uzyskujemy więc ilość równań e odpowiadającą ilości gałęzi danego układu. Pozwala to oczywiście wyznaczyć tyleż samo zmiennych.

Zilustrujemy to przykładem. Rozpatrzmy konfigurację układu podanego na rys. 1a. Graf zorientowany dla tego układu ma postać z rys. 1b. Na grafie tym można obrać 16 różnych drzew [6]. Jedno z takich drzew podano na rys. 1c. Pozostałe gałęzie grafu stanowią dopełnienie danego drzewa /rys. 1d/.

Na podstawie ogólnej zależności podanej wzorem /8/ i w oparciu o rys. 2 możemy sformułować niżej podane równania prądowe. Ilość tych równań jest zgodna z twierdzeniem 3. /Ilość węzłów w układzie: 4, ilość równań: 3/.

$$\begin{aligned} i_1 &= i_4 + i_5 \\ i_2 &= -i_4 \quad -i_6 \\ i_3 &= \quad i_5 - i_6 \end{aligned} \qquad /10a/$$

Podobnie, korzystając z ogólnej zależności podanej wzorem /9/, w oparciu o rys. 1b możemy sformułować równania napięciowe. Liczba tych równań zgodnie z twierdzeniem 1 dla układu o 6-ciu gałęziach i 4 węzłach równa jest 3. Są to równania następujące

$$\begin{aligned} u_4 &= -u_1 + u_2 \\ u_5 &= -u_1 \quad - u_3 \\ u_6 &= \quad + u_2 + u_3 \end{aligned} \qquad /10b/$$

W ten sposób otrzymujemy układ 3-ch niezależnych równań prądowych i trzech niezależnych równań napięciowych dla układu o sześciu gałęziach.

Korzystając z równań opisujących zależność między napięciami i prądami dla poszczególnych gałęzi /równania /6/ i /7// możemy uzyskać dalsze sześć brakujących równań.

Wracając do rozważań ogólnych, jeżeli uda się tak obrać drzewo, aby pojemności C znalazły się w gałęziach drzewa, a indukcyjności L w gałęziach dopełniających, to na podstawie zależności /8/ i /9/ możemy napisać

$$i_{Cdi} = \sum_{j=1}^{M} i_{lij} \qquad /11/$$

$$u_{Llj} = \sum_{i=1}^{N} u_{dji} \qquad /12/$$

gdzie i = 1, 2, ..., N
j = 1, 2, ..., M

gdzie

i_{Cdi} - prąd w pojemności i-tej gałęzi drzewa

u_{Llj} - napięcie na indukcyjności j-tej gałęzi dopełniającej

Po podstawieniu za i_{Cd} oraz u_{Ll} zależności typu /7/ oraz po podzieleniu pierwszego równania przez C a drugiego przez L, otrzymujemy

$$\frac{du_{Cdi}}{dt} = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{M} i_{lij} \qquad /13/$$

$$\frac{di_{Llj}}{dt} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{N} u_{dji} \qquad /14/$$

Ponieważ przy wskazanym powyżej podziale elementów C i L z prawej strony równań nie występują pierwsze pochodne napięć na kondensatorach oraz prądów w indukcyjnościach, to jeżeli będziemy je traktować jako zmienne zależne opisujące sieć elektryczną, wówczas równania /13/ i /14/ odpowiadają wymaganej formie równania /1/.

4. PROPONOWANA METODA FORMUŁOWANIA RÓWNAŃ

Powyżej podano podstawy metody, wskazano na jej cel oraz przedstawiono ogólny kierunek postępowania przy jej formułowaniu.

Jednak w celu nadania metodzie znaczenia praktycznego, należy rozważyć sieć elektryczną zawierającą zarówno elementy bierne jak i czynne oraz należy rozpatrzeć przypadek, gdy nie można rozdzielić elementów C i L wg wyżej zalecanych wskazań.

Rozpatrzmy więc sieć elektryczną zawierającą takie elementy jak: źródła napięciowe E, źródła prądowe J, pojemności C, indukcyjności L, indukcyjności wzajemne M oraz oporności R.

Przy wyborze drzewa postępujemy tak, aby pojemności i źródła napięciowe znalazły się w gałęziach drzewa, a indukcyjności i źródła prądowe w gałęziach dopełniających. Oporności mogą występować zarówno w drzewie jak i w gałęziach dopełniających.

Najkorzystniej byłoby, gdyby wszystkie te elementy dały się tak właśnie podzielić. W ogólnym jednak przypadku nie jest to możliwe. Dążymy więc, aby możliwie dużą liczbę pojemności umieścić w gałęziach drzewa i możliwie dużą liczbę indukcyjności w gałęziach dopełniających.

Postępowanie ze źródłami jest prostsze, bowiem w przypadku trudności dokonania wymaganego podziału można zastąpić niektóre źródła prądowe źródłami napięciowymi i na odwrót.

Gałęzie oporowe w wyniku obrania drzewa dzielimy na gałęzie przewodności G, w przypadku gdy występują w gałęziach drzewa, lub oporności R, gdy znajdują się w gałęziach dopełniających.

Podobnie pojemności dzielimy na te, które umieszczono w gałęziach drzewa, oznaczenie Cd, oraz te, które znajdują się w gałęziach dopełniających, oznaczenie Cl.

Analogicznie dzielimy indukcyjności, oznaczając je Ld oraz Ll.

Zmiennymi układu równań w metodzie drzewa są, jak to powiedziano, prądy oraz napięcia gałęziowe. W wyniku obrania drzewa zmienne te dzielimy na: zmienne gałęzi drzewa /drugi indeks d/, zmienne

gałęzi dopełniających /drugi indeks 1/ oraz ze względu na rodzaj elementu oznaczamy je pierwszym indeksem C, L, R, G.

Ostatecznie więc mamy następujące rodzaje zmiennych w sieci:

$$\begin{array}{ll} i_{Cd} & i_{C1} \\ i_{Gd} & i_{R1} \\ i_{Ld} & i_{L1} \\ u_{L1} & u_{Ld} \\ u_{R1} & u_{Gd} \\ u_{C1} & u_{Cd} \end{array} \qquad /15/$$

oraz źródła sygnałów I_1 oraz E_d

Zmienne powyższe pozwolą zapisać równanie /8/ i /9/, co będzie stanowić podstawę do sformułowania ogólnego matematycznego opisu sieci elektrycznej, w pożądanej formie. Równanie /8/ reprezentuje układ M równań prądowych, a równanie /9/ N równań napięciowych. Ponieważ prawe strony tych równań stanowią liniową kombinację odpowiednich prądów lub napięć, oba te równania można przedstawić w zapisie macierzowym

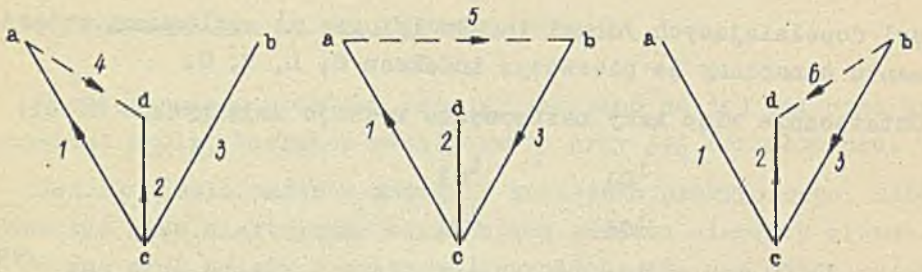
Dla równania /8/ mamy

$$\left[i_d\right]^{1/N} = \left[W\right]^{M/N} \left[i_1\right]^{1/M} \qquad /16/$$

a dla równania /9/

$$\left[u_1\right]^{1/M} = \left[W'\right]^{N/M} \left[u_d\right]^{1/N} \qquad /17/$$

W powyższych równaniach W oraz W' stanowią macierze wiążące zmienne gałęzi drzewa ze zmiennymi gałęzi dopełniających. I tak W wiąże prądy gałęzi dopełniających z prądami gałęzi drzewa, a W wiąże napięcia gałęzi drzewa z napięciami gałęzi dopełniających. Elementy tych macierzy przyjmują wartości +1, -1, gdy określona zmienna występuje w równaniu oraz 0 jeśli zmienna w równaniu nie występuje.



Rys. 3. Układ oczek elementarnych otrzymanych przez kolejne dołączenie po jednej gałęzi dopełniającej

Dla przykładu równania /10a/ i /10b/ w omawianym zapisie macierzowym miałyby postać

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Równania /16/ i /17/ można zapisać z uwzględnieniem poszczególnych rodzajów zmiennych /15/. Zarówno prądy jak i napięcie w zależności od rodzaju elementu danej gałęzi podzielimy na pojemnościowe, oporowe, indukcyjne. Wprowadzając macierze wiążące ze sobą zmienne określonych rodzajów otrzymamy poniższy układ równań macierzowych.

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_{Cd} &= \mathbf{a}\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{b}\mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{t}\mathbf{i}_{Cl} + \mathbf{J}_{Cl} \\
\mathbf{i}_{Gd} &= \mathbf{h}\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{d}\mathbf{i}_{Rl} + \mathbf{J}_{Gl} \\
\mathbf{i}_{Ld} &= \mathbf{g}\mathbf{i}_{Ll} + \mathbf{J}_{Ll} \qquad /18/ \\
\mathbf{u}_{Ll} &= \mathbf{a}'\mathbf{u}_{Cd} + \mathbf{b}'\mathbf{u}_{Gd} + \mathbf{t}'\mathbf{u}_{Ld} + \mathbf{E}_{Ld} \\
\mathbf{u}_{Rl} &= \mathbf{h}'\mathbf{u}_{Cd} + \mathbf{d}'\mathbf{u}_{Gd} + \mathbf{E}_{Rd} \\
\mathbf{u}_{Cl} &= \mathbf{g}'\mathbf{u}_{Cd} + \mathbf{E}_{Cd}
\end{aligned}$$

W równaniach powyższych

$\mathbf{i}_{Cd}$, $\mathbf{i}_{Gd}$, $\mathbf{i}_{Ld}$ - oznaczają macierze kolumnowe, których wyrazy stanowią prądy gałęzi drzewa, odpowiednio pojemnościowe, oporowe i indukcyjne. Liczba wierszy poszczególnych macierzy równa się odpowiednio n, k, s, gdzie:
n - liczba kondensatorów w gałęziach drzewa
k - liczba oporności w gałęziach drzewa
s - liczba indukcyjności w gałęziach drzewa

$\mathbf{i}_{Ll}$, $\mathbf{i}_{Rl}$, $\mathbf{i}_{Cl}$ - macierze kolumnowe, których wyrazy stanowią prądy gałęzi dopełniających, odpowiednio indukcyjne, oporowe i pojemnościowe. Liczba wierszy tych macierzy równa jest odpowiednio m, r, z, gdzie:
m - liczba indukcyjności w gałęziach dopełniających drzewa
r - liczba oporności w gałęziach dopełniających drzewa
z - liczba pojemności w gałęziach dopełniających drzewa

$\mathbf{J}_{Cl}$, $\mathbf{J}_{Gl}$, $\mathbf{J}_{Ll}$ - macierze kolumnowe, których wyrazy stanowią źródła prądowe, występujące w równaniach na prądy w gałęziach, odpowiednio pojemnościowych, oporowych i indukcyjnych.

$\mathbf{u}_{Ll}$, $\mathbf{u}_{Rl}$, $\mathbf{u}_{Cl}$ - macierze kolumnowe napięć gałęzi dopełniających, odpowiednio indukcyjnych, oporowych i pojemnościowych. Liczba wierszy tych macierzy wynosi odpowiednio m, r, z.

$\mathbf{u}_{Ld}$, $\mathbf{u}_{Gd}$, $\mathbf{u}_{Cd}$ - macierze kolumnowe napięć gałęzi drzewa, odpowiednio indukcyjnych, oporowych i pojemnościowych. Liczba wierszy tych macierzy wynosi odpowiednio s, k, n.

$\mathbf{E}_{Ld}$, $\mathbf{E}_{Rd}$, $\mathbf{E}_{Cd}$ - macierze kolumnowe źródeł napięciowych występujących w równaniach na napięcia, odpowiednio na indukcyjnościach, opornościach, pojemnościach. Liczba wierszy tych macierzy wynosi odpowiednio s, r, n.

Pozostałe macierze są macierzami wiążącymi wyżej zdefiniowane macierze kolumnowe. Macierze te mają postać macierzy W i W' występujących w równaniach /15/ i /16/.

Niżej podano wymiary poszczególnych macierzy i wskazano rodzaje zmiennych jakie wiążą ze sobą.

a	– o wymiarach	n	x	m	wiąże	i_{Ll}	oraz	i_{Cd};
b	– "	n	x	r	"	i_{Rl}	"	i_{Cd};
t	– "	n	x	z	"	i_{Cl}	"	i_{Cd};
h	– "	k	x	m	"	i_{Ll}	"	i_{Gd};
d	– "	k	x	r	"	i_{Rl}	"	i_{Gd};
g	– "	s	x	m	"	i_{Ll}	"	i_{Ld};
a′	– "	m	x	n	"	u_{Cd}	"	u_{Ll};
b′	– "	m	x	k	"	u_{Gd}	"	u_{Ll};
t′	– "	m	x	s	"	u_{Ld}	"	u_{Ll};
h′	– "	r	x	n	"	u_{Cd}	"	u_{Rl};
d′	– "	r	x	k	"	u_{Gd}	"	u_{Rl};
g′	– "	z	x	n	"	u_{Cd}	"	u_{Cl};

Brak niektórych składników w równaniach macierzowych /14/ wynika ze sposobu obierania drzewa.

Gdyby w równaniu na i_{Gd} występować miał wyraz z i_{Cl} znaczyłoby to, że pojemności w których występują te prądy niepotrzebnie pozostawiono w gałęziach dopełniających i można je wyeliminować, obierając inne drzewo, włączając doń te pojemności przy jednoczesnym usunięciu gałęzi oporowych. Ta sama uwaga dotyczy równania na u_{Rl} dla przypadku indukcyjności.

W przypadku równania na u_{Cl} występowanie w nim jedynie czynnika z u_{Cd} oraz źródła E_{Cd} jest odzwierciedleniem faktu, że C_l może występować jedynie w oczkach całkowicie pojemnościowych /z ewentualnymi źródłami napięciowymi/. Gdyby tak miało nie być, znaczyłoby to, że można obrać inne drzewo włączające daną pojemność C_l do gałęzi drzewa. Podobna uwaga dotyczy równania na i_{Ld}.

Szczegółową budowę omawianych macierzy oraz ich powiązanie z równaniami typu /8/ i /9/ najlepiej ilustruje tabela 1. Ilustrację tego powiązania oraz sposób wyznaczania omawianych macierzy znaj-

dzie czytelnik w dalszej części artykułu. W celu dokonania dalszych przekształceń równań /18/ dokonujemy przegrupowania równań wg kolejności i_{Cd}, u_{Ll}, i_{Gd}, u_{Rl}, i_{Ld}, u_{Cl}, a następnie łącząc we wspólny zapis macierzowy kolejne pary równań uzyskujemy:

$$\begin{bmatrix} i_{Cd} \\ u_{Ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ t' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Ld} \\ i_{Cl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Cl} \\ E_{Ld} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{Gd} \\ u_{Rl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & h \\ h' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ d' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix} \qquad /19/$$

$$\begin{bmatrix} i_{Ld} \\ u_{Cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ g' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Ll} \\ E_{Cd} \end{bmatrix}$$

Dalsze przekształcenia mają na celu uzyskanie układu równań różniczkowych rozwiniętych względem pierwszych pochodnych zmiennych.

Zmiennymi tymi są napięcia u_{Cd} na kondensatorach drzewa oraz prądy i_{Ll} indukcyjności gałęzi dopełniających. Musimy więc wyrazić, podobnie jak to pokazano uprzednio, i_{Cd} za pomocą u_{Cd} a u_{Ll} za pomocą i_{Ll}, w czym korzystamy z zależności /7/.

Następnie, drogą podstawień oraz przekształceń macierzowych dążymy od eliminacji pozostałych zmiennych, a mianowicie i_{Gd}, u_{Rl}, i_{Ld} oraz u_{Cl}.

Przyjęty sposób wyprowadzenia, rodzaje zastosowanych podstawień i przekształceń podane są w dodatku. W efekcie uzyskujemy równanie macierzowe stanowiące ogólny opis matematyczny sieci elektrycznej, w którym pierwsze pochodne zmiennych wyrażone są jako funkcje tych zmiennych oraz sygnałów pobudzających w następującej postaci:

$$\left[\frac{d}{dt}X\right] = K\left[A - BWH\right]X - KBWF + KTYP + KZ + KM^{\%}P \qquad /20/$$

co można przedstawić w formie

$$\frac{dX}{dt} = \alpha X + \beta \qquad /21/$$

gdzie

$$\alpha = K\left[A - BWH\right]$$
$$\beta = K\left[-BWF + \left[TY + M^{st}\right]P + Z\right]$$

W powyższych wzorach

$X = \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix}$ – macierz kolumnowa zmiennych układu, której górne wyrazy stanowią napięcia na kondensatorach drzewa, a dolne – prądy w indukcyjnościach dopełniających,

A, B, H – macierze zerojedynkowe, których wyrazy określone są są topologią układu,

K, W, Y, M^{st} – macierze określające rozmieszczenie w danej topologii oraz wartości odpowiednio oporności, indukcyjności i pojemności,

F, P, Z – macierze, których wyrazy określone są wartościami i rozmieszczeniem w sieci źródeł sygnałów /pobudzenie i zasilanie/.

Dokładny opis powyższych macierzy zawarty jest w dodatku. Ilustruje go również tabela 1.

Sposób wykorzystania wyprowadzonego wzoru podano w dalszej części pracy, gdzie zamieszczono dla ilustracji proste przykłady.

5. FORMUŁOWANIE MATEMATYCZNEGO OPISU UKŁADU ZAPROPONOWANĄ METODĄ

Projektowanie układu zaproponowaną metodą obejmuje wykonanie następujących etapów:

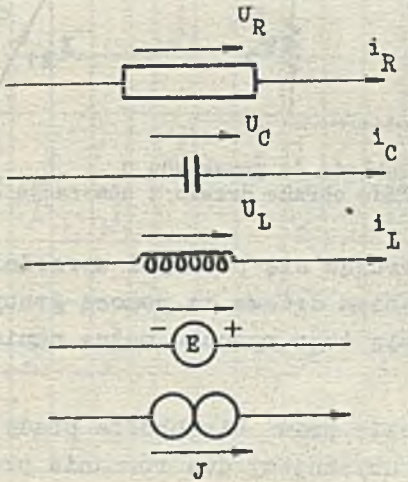
- obranie schematów zastępczych elementów konstrukcyjnych wyrażonych elementami idealnymi RLCM oraz źródłami E i J,
- sporządzenie pełnego schematu zastępczego dla całego układu. Podstawę stanowi tu konfiguracja układu oraz schematy obrane w etapie pierwszym,

- wybór właściwego drzewa, numeracja elementów, obranie kierunków prądów i napięć,
- napisanie równań napięć i prądów wg praw Kirchhoffa,
- określenie wyrazów poszczególnych macierzy,
- podstawienie wyżej wymienionych wyrazów macierzy do wzoru /20/ przedstawiającego matematyczny opis układu.

Przy wyborze właściwego drzewa kierujemy się wskazaniami zawartymi w punkcie 4.

Ponieważ początkowymi zmiennymi /x_1, x_2 itd/ są napięcia na kondensatorach C_d oraz w dalszej kolejności prądy w indukcyjnościach L_1, wskazane jest przy numerowaniu elementów na schemacie przyporządkować mniejsze liczby kondensatorom w gałęziach drzewa, a następne kolejne numery przypisać indukcyjnościom gałęzi dopełniających. Ułatwiona będzie wówczas interpretacja wyników, bowiem numery zmiennych podlegających całkowaniu odpowiadać będą numerom odnośnych elementów.

Numeracja pozostałych elementów jest w zasadzie dowolna. Obieramy następnie dodatnie kierunki napięć lub prądów w poszczególnych gałęziach. Przyjęty sposób strzałkowania napięć i prądów w gałęziach biernych i czynnych podano na rys. 4.



Rys. 4. Przyjęty sposób strzałkowania napięć i prądów

Duże ułatwienie przy wyznaczaniu poszukiwanych wyrazów macierzy można osiągnąć dzięki wykorzystaniu tabelarycznej formy sporządzania równań, podanej w tabeli 1.

Odpowiednie wyrazy macierzy, w przypadku gdy dane zmienne nie wchodzą do rozpatrywanego równania, przyjmują wartość 0, a w przypadku gdy w nich występują, to w zależności od ich znaku w równaniach przyjmują wartości +1 lub -1.

Teraz wystarczy dokonać podstawienia do wzoru /20/ i wykonać wskazane w nim działania na macierzach. Działania te mogą być dla prostszych sieci wykonane odręcznie.

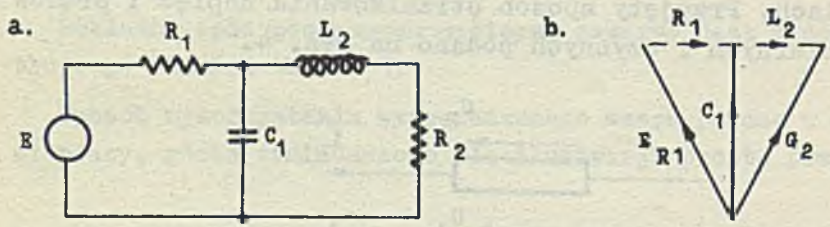
Analiza bardziej skomplikowanych sieci opisanych wzorem /20/, jest możliwa, przy użyciu maszyny cyfrowej.

W wyniku realizacji zaproponowanych etapów projektowania uzyskujemy matematyczny opis układu elektrycznego, będący układem równań różniczkowych pierwszego rzędu w postaci normalnej, co pozwala na zastosowanie metod numerycznych do ich rozwiązania.

Dla ilustracji rozpatrzymy dwa proste przykłady.

P r z y k ł a d 1

Rozważmy sieć elektryczną z rys. 5a.



Rys. 5. a/ Schemat układu do przykładu 1
b/ Graf układu obrane drzewo i numeracja elementów

Obieramy drzewo kierując się podanymi uprzednio zasadami. Graf tego układu z zaznaczeniem drzewa za pomocą grubych linii podano na rys. 5b. Na podstawie tego rysunku można napisać równania typu /8/ i /9/.

Wyrażając na podstawie praw Kirchhoffa prądy drzewa prądami gałęzi dopełniających uzyskujemy dwa równania prądowe, a wyrażając

Tabela 1

Wzór formularza dla wyznaczenia wyrazów macierzy równania ogólnego

	X_1	$X_{...}$	X_n	X_{n+1}	$X_{n+..}$	X_{n+m}	C_1	$C_{...}$	C_k	R_{k+1}	$R_{k+...}$	R_{k+r}	L_{d1}	$L_{d...}$	L_{dn}	C_{l1}	$C_{l...}$	C_{lx}		
	u_{C1}	$u_{C...}$	u_{Cn}	i_{Ln+1}	$i_{Ln+..}$	i_{Ln+m}	u_{G1}	$u_{G...}$	u_{Gk}	i_{Rk+1}	$i_{Rk+...}$	i_{Rk+r}	u_{Ld1}	$u_{Ld...}$	u_{Ldn}	i_{Cl1}	$i_{Cl...}$	i_{Clx}		
i_{C1}				a_{1n+1}		a_{1n+m}				b_{1k+1}		b_{1k+r}				$t_{1,n+1}$		$t_{1,n+x}$		J_{C1}
$i_{C...}$																				$J_{C...}$
i_{Cn}				a_{n1+1}		a_{nn+m}				$b_{n,k+1}$		$b_{n,k+r}$				$t_{n,n+1}$		$t_{n,n+x}$		J_{Cn}
u_{Ln+1}	$a_{n+1,1}$		$a_{n+1,n}$				$b_{n+1,1}$		$b_{n+1,k}$				$t_{n+1,1}$		$t_{n+1,n}$					E_{Ln+1}
$u_{Ln+...}$																				$E_{Ln+...}$
u_{Ln+m}	$a_{n+m,1}$		$a_{n+m,n}$				$b_{n+m,1}$		$b_{n+m,k}$				$t_{n+m,1}$		$t_{n+m,n}$					E_{Ln+m}
i_{G1}				h_{1n+1}		h_{1n+m}	$-G_1$			$d_{1,k+1}$		d_{1k+r}		J_{G1}						
$i_{G...}$								$-G_2$						$J_{G...}$						
i_{Gk}				$h_{k,n+1}$		$h_{k,n+m}$			$-G_k$	$d_{k,k+1}$		$d_{k,k+r}$		J_{Gk}						
u_{Rk+1}	$d_{k+1,1}$		$h_{k+1,n}$				$d_{k+1,1}$		$d_{k+1,k}$	$-R_{k+1}$				E_{Rk+1}						
$u_{Rk+...}$											$-R_{k+2}$			$E_{Rk+..}$						
u_{Rk+r}	$h_{k+r,1}$		$h_{k+r,n}$				$d_{k+r,1}$		d_{k+nk}			$-R_{k+r}$		E_{Rk+1}						
$i_{Ldn+m+1}$				$g_{1,n+1}$		$g_{1,n+m}$		J_{Ld_1}												
$i_{Ldn+m+...}$								J_{Ld}												
$i_{Ldn+m+s}$				$g_{s,n+1}$		$g_{s,n+m}$		J_{Ld_s}												
$u_{Cln+m+s+1}$	$g_{s+1,1}$		$g_{s+1,n}$					$E_{Cl_{s+1}}$												
$u_{Cln+m+s+..}$								$E_{Cl_{s+...}}$												
$u_{Cln+m+s+s}$	$g_{s+s,1}$		$g_{s+s,n}$					$E_{Cl_{s+s}}$												

napięcia gałęzi dopełniających napięciami gałęzi drzewa uzyskujemy dwa równania napięciowe.

Równania prądowe $i_{C1} = i_{L2} - i_{R1}$

$i_{G2} = -i_{L2}$

Równania napięciowe $u_{L2} = u_{C1} + u_{G2}$

$u_{R1} = u_{C1} - E_{R1}$

Równania te można na podstawie tabeli 1 przedstawić następująco:

	u_{C1}	i_{L2}	u_{G2}	i_{R1}	
	X_1	X_2			
i_{C1}	0	+1	0	-1	0
u_{L2}	-1	0	+1	0	
i_{G2}	0	+1	$-G_2$	0	0
u_{R1}	+1	0	0	$-R_1$	$-E_{R1}$

Stąd wyznaczenie wyrazów macierzy występujących we wzorze ogólnym /20/ jest bardzo proste.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} -G_2 & 0 \\ 0 & -R_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \left[\mathbf{D}^{\mathbf{M}}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -R_2 & 0 \\ 0 & -G_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \frac{1}{C_1} \qquad \Gamma_2 = \frac{1}{L_2}$$

Po podstawieniu do wzoru /20/ i wykonaniu wskazanych działań otrzymujemy układ następujących równań różniczkowych opisujących dynamiczne zachowanie się zadanej sieci elektrycznej.

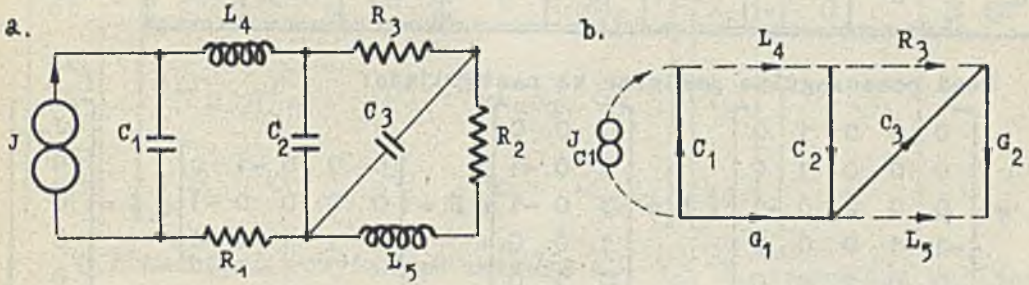
$$\frac{dX_1}{dt} = -S_1G_1X_1 + S_1X_2 + S_1G_1E$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \Gamma_2X_1 - \Gamma_2R_2X_2$$

We wzorach powyższych zmienna X_1 to napięcie na kondensatorze C_1, a zmienna X_2 prąd w indukcyjności L_2.

Przykład 2

Rozpatrzmy układ z rys. 6a. Obrano drzewo wg rys. 6b /układ z pracy Bashkowa/.



Rys. 6. a/ Schemat układu do przykładu 2
b/ Graf układu obrane drzewo i numeracja elementów

Równania prądowe i napięciowe mają postać

$$i_{C1} = i_{L4} - J_{C1}$$

$$i_{C2} = i_{L4} - i_{R3}$$

$$i_{C3} = -i_{L5} - i_{R3}$$

$$u_{L4} = -u_{C1} - u_{C2} + u_{G1}$$

$$u_{L5} = u_{C3} + u_{G2}$$

lub w formie tabelarycznej

	u_{C1}	u_{C2}	u_{C3}	i_{L4}	i_{L5}	u_{G1}	u_{G2}	i_{R3}	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_2	
i_{C1}	0	0	0	1	0	0	0	0	$-J_{C1}$
i_{C2}	0	0	0	1	0	0	0	-1	0
i_{C3}	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0
u_{L4}	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0
u_{L5}	0	0	1	0	0	0	1	0	0
i_{G1}	0	0	0	-1	0	$-G_1$	0	0	
i_{G2}	0	0	0	0	-1	0	$-G_2$	0	
u_{R3}	0	1	1	0	0	0	0	$-R_3$	

Stąd poszczególne macierze są następujące:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} -J_{C1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_5 \end{bmatrix} \quad D^{*} = \begin{bmatrix} -G_1 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 \end{bmatrix} \quad W = \left[D^{*}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 \end{bmatrix}$$

gdzie $S_i = \frac{1}{C_i}$

$$\Gamma_i = \frac{1}{L_i}$$

$$\mathbf{BWH} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu do wzoru /20/ i wykonaniu działań otrzymujemy pięć równań opisujących tę sieć elektryczną. Są to następujące równania podane w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \frac{dX_3}{dt} \\ \frac{dX_4}{dt} \\ \frac{dX_5}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & -S_2G_3 & -S_2G_3 & S_2 & 0 \\ 0 & -S_3G_3 & -S_3G_3 & 0 & -S_3 \\ -\Gamma_4 & -\Gamma_4 & 0 & -\Gamma_4R_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_5 & 0 & -\Gamma_5R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S_1J_{C1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W równaniach powyższych zmienne X_1, X_2, X_3 oznaczają napięcia na pojemnościach, odpowiednio C_1, C_2, C_3, a zmienne X_4 i X_5 stanowią prądy w indukcyjnościach L_4 i L_5.

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono pewien sposób formułowania matematycznego opisu sieci elektrycznej. Wyprowadzona macierzowa postać tego opisu pozwala dla prostszych układów dokonać przekształceń odręcznych lub też po zaprogramowaniu na maszynę cyfrową może być wykorzystana do analizy dynamicznej bardziej skomplikowanych układów.

Autor dziękuje prof. dr Leonowi Łukaszewiczowi za udzieloną pomoc, która w formie dyskusji, sugestii i wreszcie okazanej życzliwości była dla tej pracy nieodzowna.

DODATEK

Wyprowadzenie zależności /20/

Poniżej podano szczegółowo sposób wyprowadzenia ogólnego opisu matematycznego sieci elektrycznej. Celem tego wyprowadzenia jest równanie /20/ podane w treści artykułu.

Punktem wyjścia jest tu układ równań /19/, który dla wygody czytelnika zamieszczamy poniżej:

$$\begin{bmatrix} i_{Cd} \\ u_{Ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ t' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Ld} \\ i_{Cl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Cl} \\ E_{Ld} \end{bmatrix} \qquad /D1/$$

$$\begin{bmatrix} i_{Gd} \\ u_{Rl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & h \\ h' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ d' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix} \qquad /D2/$$

$$\begin{bmatrix} i_{Ld} \\ u_{Cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Ll} \\ E_{Cd} \end{bmatrix} \qquad /D3/$$

W pierwszym równaniu macierzowym /D1/ dokonujemy następujących podstawień

$$\left[i_{Cd} \right] = \left[C_d \frac{du_{Cd}}{dt} \right] \qquad /D4/$$

$$\left[u_{Ll} \right] = \left[L_l \frac{di_{Ll}}{dt} + M \frac{di_{Ld}}{dt} \right] \qquad /D5/$$

W drugim równaniu /D2/ podstawiamy

$$\begin{aligned} i_{Gd} &= G u_{Gd} \\ u_{Rl} &= R i_{Rl} \end{aligned} \qquad /D6/$$

Uzyskujemy wówczas równania:

$$\begin{bmatrix} C_d \frac{du_{Cd}}{dt} \\ L1 \frac{di_{L1}}{dt} + M \frac{di_{Ld}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{R1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Ld} \\ i_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{C1} \\ \mathbf{E}_{Ld} \end{bmatrix} \qquad /D7/$$

$$\begin{bmatrix} Gu_{Gd} \\ RI_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ I_{R1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{G1} \\ \mathbf{E}_{Rd} \end{bmatrix} \qquad /D8/$$

$$\begin{bmatrix} i_{Ld} \\ u_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{L1} \\ \mathbf{E}_{Cd} \end{bmatrix} \qquad /D9/$$

Dalszych przekształceń dokonujemy celem wyeliminowania zmiennych i_{Ld} oraz u_{C1}.

Dla wyrażenia zmiennych u_{Ld} zmiennymi i_{L1} dokonujemy następujących podstawień.

Napięcie na indukcyjności drzewa zależy od prądu tej indukcyjności, jak i od prądu sprzężonego poprzez indukcyjność wzajemną, a więc mamy - podobnie jak w /D5/

$$\left[u_{Ld}\right] = \left[L_d \frac{di_{Ld}}{dt}\right] + \left[M' \frac{di_{L1}}{dt}\right]$$

ale na podstawie wzoru /D3/ mamy

$$\left[i_{Ld}\right] = \left[g i_{L1}\right] + \left[J_{L1}\right]$$

a więc

$$\left[u_{Ld}\right] = \left[L_d\right]\left[\left[g \frac{di_{L1}}{dt}\right] + \left[\frac{dJ_{L1}}{dt}\right]\right] + \left[M' \frac{di_{L1}}{dt}\right]$$

i ostatecznie

$$\left[u_{Ld}\right] = \left[\left[L_d\right]\left[g\right] + M'\right] \frac{di_{Ll}}{dt} + \left[L_d \frac{dJ_{Ll}}{dt}\right] \qquad /D10/$$

Podobnie dla wyrażenia zmiennych i_{Cl} za pomocą zmiennych u_{Cd} podstawiamy:

$$\left[i_{Cl}\right] = \left[C_l \frac{du_{Cl}}{dt}\right]$$

Na podstawie wzoru /D3/ mamy

$$\left[u_{Cl}\right] = \left[g' u_{Cd}\right] + \left[E_{Cd}\right]$$

i ostatecznie

$$\left[i_{Cl}\right] = C_l\left[g' \frac{du_{Cd}}{dt}\right] + \left[C_l \frac{dE_{Cd}}{dt}\right] \qquad /D11/$$

Po podstawieniu w górnym równaniu /D7/ za u_{Ld} zależności /D10/, a za i_{Cl} zależności /D11/ otrzymujemy:

$$\left[C_d \frac{du_{Cd}}{dt}\right] = \left[a\right]\left[i_{Ll}\right] + \left[b\right]\left[i_{Rl}\right] + \left[t\right]\left[C_l\right]\left[g' \frac{du_{Cd}}{dt}\right] + \left[C_l\right]\left[\frac{dE_{Cd}}{dt}\right] + \left[J_{Cl}\right] \qquad /D12/$$

Dokonując takiego samego podstawienia w dolnym równaniu /D7/, uwzględniając na podstawie /D3/, że:

$$M \frac{di_{Ld}}{dt} = \left[M\right]\left[g\right]\left[\frac{di_{Ll}}{dt}\right] + \left[M\right]\left[\frac{dJ_{Ll}}{dt}\right]$$

i po przeniesieniu powyższej zależności na prawą stronę równania mamy:

$$\left[L_l \frac{di_{Ll}}{dt}\right] = \left[a'\right]\left[u_{Cd}\right] + \left[b'\right] u_{Gd} + \left[t'\right]\left[\left[\left[L_d\right]\left[g\right] + M'\right] \frac{di_{Ll}}{dt} + L_d \frac{dJ_{Ll}}{dt}\right] + \left[E_{Ld}\right] - \left[M\right]\left[g\right]\left[\frac{di_{Ll}}{dt}\right] - \left[M \frac{dJ_{Ll}}{dt}\right] \qquad /D13/$$

Przenosząc w /D12/ i /D13/ wyrazy z pochodnymi u_{Cd} oraz i_{Ll} na lewą stronę znaku równości otrzymamy:

$$\left[\left[C_d\right] - \left[t\right]\left[C_1\right]\left[g'\right]\right]\left[\frac{du_{Cd}}{dt}\right] = \left[a\right]\left[i_{Ll}\right] + \left[b\right]\left[i_{Rl}\right] + \left[t\right]\left[C_1\right]\left[\frac{dE_{Cd}}{dt}\right] + \left[J_{Cl}\right] \qquad /D14/$$

$$\left[\left[L_1\right] - \left[t'\right]\left[L_d\right]\left[g\right] - \left[t'\right]\left[M'\right] + \left[M\right]\left[g\right]\right]\frac{di_{Ll}}{dt} = \left[a'\right]\left[u_{Cd}\right] + \left[b'\right]\left[u_{Gd}\right] + \left[t'\right]\left[L_d\frac{dJ_{Ll}}{dt}\right] + \left[E_{Ld}\right] - \left[M\frac{dJ_{Ll}}{dt}\right] \qquad /D15/$$

Wprowadzając do /D14/ i /D15/ następujące oznaczenia

$$C' = \left[C_d\right] - \left[t\right]\left[C_1\right]\left[g'\right] \qquad /D16/$$

$$L' = \left[L_1\right] - \left[t'\right]\left[L_d\right]\left[g\right] - \left[t'\right]\left[M'\right] + \left[M\right]\left[g\right]$$

oraz łącząc równania /D14/ i /D15/ w jedno równanie macierzowe mamy:

$$\begin{bmatrix} C'\frac{du_C}{dt} \\ L'\frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ t' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & L_d \\ C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dE_{Cd}}{dt} \\ \frac{dJ_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Cl} \\ E_{Ld} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M\frac{dJ_{Ll}}{dt} \end{bmatrix}$$

a w zapisie uproszczonym

$$\begin{bmatrix} C' \dfrac{du_{Cd}}{dt} \\ L' \dfrac{di_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & B & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} +$$

/D17/

$$+ \begin{bmatrix} & T & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_d \\ C_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dE_{Cd}}{dt} \\ \dfrac{dI_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Cl} \\ E_{Ld} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -M \dfrac{dI_{Ll}}{dt} \end{bmatrix}$$

Powyższe równanie jest wynikiem wyeliminowania z równań /D1/ oraz /D3/ zmiennych u_{Ld}, i_{Cl}, i_{Ld} oraz u_C.

Dalsze przekształcenia mają na celu eliminację z równania /D16/ zmiennych u_{Gd} oraz i_{Rl}.

Przenosząc w równaniu /D8/ macierz stojącą z lewej strony znaku równości na prawą, mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix} \quad /$$

Mnożąc lewostronnie obie strony równania /D18/ przez macierz wrotną do pierwszej macierzy stojącej po lewej stronie równania uzyskujemy zależność na u_G i i_R.

$$\begin{bmatrix} u_{Gd} \\ i_{Rl} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu powyższej zależności do /D17/ uzyskujemy:

$$\begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & L' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{du_{Cd}}{dt} \\ \frac{di_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} +$$

$$-\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & L_d \\ C_l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dE_{Cd}}{dt} \\ \frac{dJ_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} J_{Cl} \\ E_{Ld} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dE_{Cd}}{dt} \\ \frac{dJ_{Ll}}{dt} \end{bmatrix}$$

Mnożąc lewostronnie obie strony powyższego równania przez

$$\begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & L' \end{bmatrix}^{-1}$$

i wprowadzając oznaczenie

$$\begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' & 0 \\ 0 & L' \end{bmatrix}^{-1}$$

gdzie $\Gamma' = \frac{1}{L'}$ oraz $S' = \frac{1}{C'}$

mamy ostatecznie:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{Cd}}{dt} \\ \frac{di_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & h \\ h' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{Cd} \\ i_{Ll} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} J_{Gl} \\ E_{Rd} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ t' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & L_d \\ C_l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dE_{Cd}}{dt} \\ \frac{dJ_{Ll}}{dt} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{Cl} \\ E_{Ld} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dE_{Cd}}{dt} \\ \frac{dJ_{Ll}}{dt} \end{bmatrix}$$

Wprowadzając następujące oznaczenia uzyskujemy postać równania /20/.

$$K = \begin{bmatrix} S' & 0 \\ 0 & \Gamma' \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a' & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & h \\ h' & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & L_d \\ C_l & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} -G & d \\ d' & -R \end{bmatrix}^{-1} \qquad M^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & t \\ t' & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} J_G \\ E_R \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{dE_C}{dt} \\ \frac{dJ_L}{dt} \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} J_C \\ E_I \end{bmatrix}$$

Literatura

[1] BASHKOW T.R.: The A Matrix, New Network Description, IRE Trans. on Circuit Theory, September 1957: CT-4, 117-120.

[2] BRYANT P.R.: The Explicit Form of Bashkow's A-matrix, IRE. Trans., 1962: CT-9, 303.

[3] BRANIN, F.H.: The Inverse of the Incidence Matrix of a Tree and the Formulation of Algebraic First-Order Differential Equations of an RLC Network, IEEE Trans. on Circuit Theory, December 1963: CT-10, 4.

[4] BROWN D.P.: Derivative - Explicit Differential Equations for RLC Graphs, Journal of Franklin Institute, June 1963: 503-514.

[5] FRIEDLAND B., WING O., ASH R.: Principles of Linear Networks, Mc Graw - Hill Book Company, INC, 1961: 88.

[6] BRYANT P.R.: The Algebra and Topology of Electrical Networks, Proc. IEE, Monograph, 1960; 414E.

A METHOD OF FORMULATING DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ELECTRIC CIRCUIT NUMERICAL ANALYSIS

Summary

A method of formulating mathematical description of an electric circuit is presented. This description permits to perform a numerical analysis of the circuit dynamic properties.

The method directly aims at the determination of the set of differential equations describing the circuit in the following form

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, t\right)$$

Classical methods of electric circuits are briefly discussed and it is shown that their results in the form of differential-integral equations vary from the above mentioned form.

The method of a tree is presented in the further part the paper. This method is based on a properly chosen circuit graph tree /on a circuit graph/ according to the way first proposed by Bashkov [1].

Voltages on the tree capacitance and currents in link inductance branches accepted as the circuit variables permit to obtain by means of this method differential equations given in formula /1/.

A detailed method of formulating such a description is given in the paper. By means of this method the circuit dynamics can be analyzed in semi-automated fashion. The method introduces the division of variables and their proper arrangement, then, using matrix convertion, leads to the description of the circuit in the required form.

Variables and supply sources are divided depending on the kind of elements and the belonging of the appropriate branch to the tree or its link.

Current and voltage equations are the starting point for a proper arrangement of the circuit data. They are based on Kirchhoff's laws, the tree branches being expressed by the currents of link branches /8/ and voltages of link branches by voltages of the tree branches /9/.

A general description of the electric circuit in the following matrix form is introduced due to dependences connecting currents with voltages in individual branches /16/, and by means of matrix conversions /given in the appendix/

$$\frac{dX}{dt} = K/A - BWH/X - KBWF + KTYP + KZ + KM^{H}P$$

where

X - column matrix of the circuit variables /voltages on capacitances, and currents in inductances/,

A,B,H - zero-one matrices, the expressions of which are determined by the circuit topology,

W,Y,M^{H} - matrices determining the distribution in the given topology, and,values of resistance, inductance and capacitance respectively,

F,P,Z - matrices, the expressions of which are determined by values and signal source distribution /excitation and supply/.

The way of determining expressions of all above cited matrices is given in the paper. Some simple examples illustrate the use of this formula.

AUTORZY ARTYKUŁÓW ZAMIESZCZONYCH W ZESZYCIE 1 "PRAC IMM"
/Authors of articles published in issue 1 "PRACE IMM"/

THE METHOD OF PARALLEL-SERIAL CARRY PROPAGATION IN FAST BINARY ADDERS

Bartłomiej GŁOWACKI mgr, ur. w 1936 r. Studia ukończył na Wydziale Matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego. Od roku 1960 pracuje w Instytucie Maszyn Matematycznych, zajmując się projektowaniem maszyn cyfrowych. Obecnie pracuje na stanowisku adiunkta, pełniąc funkcję kierownika Zakładu Organizacji Maszyn Cyfrowych. Jest autorem szeregu opracowań dotyczących struktury logicznej maszyn cyfrowych.

Pelagia WALIGÓRSKA mgr inż., ur. w roku 1936. Ukończyła studia na Wydziale Matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego. W Instytucie Maszyn Matematycznych pracuje od roku 1958, zajmując się organizacją logiczną maszyn cyfrowych. Obecnie pracuje na stanowisku adiunkta w Zakładzie Organizacji Maszyn Cyfrowych. Jest autorem szeregu opracowań dotyczących organizacji jednostek centralnych maszyn cyfrowych.

Andrzej ZIEMKIEWICZ mgr inż., ur. w roku 1936. Studia ukończył na Wydziale Łączności Politechniki Warszawskiej. Od 1964 roku pracuje w Instytucie Maszyn Matematycznych w Zakładzie Organizacji Maszyn Cyfrowych na stanowisku starszego asystenta. Jest autorem opracowań dotyczących organizacji jednostek centralnych zmiennoprzecinkowych.

POPRAWNOŚĆ TRANSFORMACJI SYGNAŁÓW W LINII CYFROWEJ

Andrzej KOJEMSKI mgr inż., ur. w roku 1938. Studia ukończył na Wydziale Łączności Politechniki Warszawskiej. W Instytucie Maszyn Matematycznych pracuje od roku 1959, zajmując się układami podstawowymi do maszyn cyfrowych. Obecnie jest pracownikiem Zakładu Elektroniki Cyfrowej. Jest autorem szeregu publikacji dotyczących układów magnetycznych, tranzystorowych.

ANALIZA ZAKŁÓCEN W OKABLOWANIU WYWOŁANYCH SPRZĘŻENIAMI ELEKTROMAGNETYCZNYMI

Maria KOWALEWSKA mgr inż., ur. w 1938 roku. W roku 1959 otrzymała dyplom na Wydziale Łączności Politechniki Warszawskiej. W Instytucie Maszyn Matematycznych pracuje od roku 1958 do chwili obecnej, zajmując się projektowaniem systemów zasilania impulsowego do elektronicznych maszyn cyfrowych, układów synchronizacji czasowej oraz problematyką związaną z transmisją sygnału i obecnością zakłóceń w okablowaniu szybkich maszyn cyfrowych. Powyższej tematyce poświęciła kilka publikacji.

PEWNA METODA FORMUŁOWANIA RÓWNAN RÓŻNICZKOWYCH DLA ANALIZY NUMERYCZNEJ OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

Bohdan WOJTOWICZ mgr inż., ur. w 1930 roku. Studia ukończył na Wydziale Łączności Politechniki Warszawskiej. Od 1958 r. pracuje w Instytucie Maszyn Matematycznych, zajmując się projektowaniem i badaniem układów elektronicznych, początkowo w urządzeniach wejściowych maszyn cyfrowych, a następnie ich części centralnej. Obecnie pracuje w dziedzinie operacyjnych pamięci ferrytowych na stanowisku kierownika pracowni. Jest autorem opracowań i publikacji dotyczących metod projektowania i badania cyfrowych układów półprzewodnikowych, w tym również metod opartych na zastosowaniu maszyn matematycznych.

WYKAZ "PRAC IMM" OPUBLIKOWANYCH W 1967 ROKU
/The list of "PRACE IMM" published 1967/

SERIA B

1. Zdzisław Wrzeszcz: O projektowaniu układów sterujących pamięci na rdzeniach ferrytowych z częściowym przełączaniem. B 16/29/, str. 23, cena zł 9.-

2. Ryszard Boliński: Częściowe przełączanie rdzeni ferrytowych z prostokątną pętlą histerezy. B 17/30/, str. 28, cena zł 11.-

3. Janusz Łąski, Tadeusz Bartkowski: Elektroniczny generator liczb przypadkowych do współpracy z maszyną cyfrową ZAM-2. B 18/31/, str. 21, cena zł 9.-

4. Andrzej Kojemski, Zbigniew Świątkowski: Szybki podstawowy układ logiczny na tranzystorze krzemowym. B 19/32/,str. 38, cena zł 15.-

5. Bohdan Wojtowicz: Projektowanie tranzystorowego układu logicznego z wykorzystaniem metody programowania liniowego. B 20/33/, str. 34, cena zł 14.-

6. Wacław Kalinowski: Konstrukcja bębnów pamięci magnetycznej. B 21/34/, str. 40, cena zł 15.-

SPRAWOZDANIA

1. Bohdan Wojtowicz: Półprzewodnikowe układy logiczne S-200 dla pamięci bębnowej PB-3, Sprawozdanie Nr 5, str. 20.

2. Kazimierz Gójski, Joanna Kowalczyk, Andrzej Więckowski: Pamięć taśmowa maszyny ZAM 3M. Sprawozdanie Nr 6, str. 30.

"PRACE IMM" są do nabycia w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Warszawa, Pałac Kultury i Nauki oraz w Domach Książki /księgarnie techniczne/

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 2229/68