ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: BUDOWNICTWO z. 104 Nr kol. 1695

Iwona JURCZAK-BROSZKO*
Politechnika Krakowska

POROWATOŚĆ JAKO STRUKTURA

Streszczenie. W pracy zaproponowano definicję porowatości, która charakteryzuje wszystkie istotne cechy struktury ciała porowatego. Pozwala poprawnie zdefiniować naprężenia efektywne oraz opisać ewolucję porowatości w przypadku skończonych odkształceń ciała.

POROSITY AS A STRUCTURE

Summary. In the paper has been proposed consistent definition of porosity, that characterizes all essential feature of the body when treated as structured one. It enables to define in proper way effective stress and to describe porosity evolution for finite displacement of body.

1. Wstęp

Ośrodek porowaty nasycony cieczą od dawna był traktowany jako model mechaniczny gruntu (Terzaghi, Biot), a porowatość utożsamiano z przepuszczalnością. Niezależnie od nazwy ta nowa cecha ośrodka odkształcalnego wymaga odpowiedniej definicji. Definicjami najbardziej rozpowszechnionymi są znane pojęcia porowatości objętościowej i powierzchniowej. Obydwa pojęcia formalnie są skalarnymi funkcjami miary, w praktyce utożsamianymi. Stają się więc nieprzydatne do opisu geometrycznych właściwości porowatości, nie mówiąc o braku możliwości rozróżniania porów połączonych, zamkniętych czy stagnacyjnych (Prevost, Bear, Bachmat). W celu usunięcia pierwszej z wad wprowadzono pojęcie tzw. „krętości" najlepiej zdefiniowane u Beara.

Proponowana dalej definicja wykorzystuje znany z obserwacji fakt, że materiały o identycznym szkielecie i takiej samej porowatości objętościowej odpowiadają różnie na zewnętrzne wymuszenia w zależności od geometrii porów.

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jan Grabacki, em. prof. Politechniki Krakowskiej

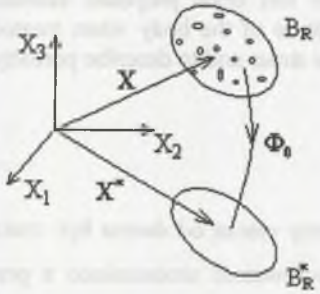
Inaczej mówiąc, rodzaj porowatości charakteryzuje obserwowana kinematyka ośrodka porowatego, a więc przedstawiona propozycja jest opisem fenomenologicznym.

2. Metoda

Założono, że funkcja miary może być traktowana jako wystarczająco regularna funkcja zdefiniowana na cząstkach ciała. Inaczej mówiąc, na mocy zmodyfikowanej hipotezy Stefana porowatość (struktura) jest bezmasową fazą przyporządkowaną cząstkom na równi z wyposażoną w masę fazą stałą reprezentującą szkielet.

Założono, że istnieją więzy wewnętrzne utrzymujące niezmienną porowatość, a w szczególności istnieje deformacja pozwalająca odwzorować ciało porowate na ciało pozbawione porowatości.

2.1. Miara porowatości



Rys.1

Niech konfiguracja B_R będzie naturalną konfiguracją odniesienia ciała z porowatością początkową. Odwzorowanie:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^*(\mathbf{X}) \qquad ; \; B_R \square B_R^* \tag{1}$$

jest odwzorowaniem tak wybranym, że konfiguracja B_R^* jest pewną pomocniczą konfiguracją pozbawioną porowatości. Jeśli $\mathbf{dA}$ jest zorientowaną powierzchnią zawartą w B_R, to istnieje obraz tej powierzchni $\mathbf{dA}^*$ zawarty w B_R^*. Oznaczając przez:

$$\mathbf{\Phi}_0 \stackrel{df}{=} \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{X}} \tag{2}$$

gradient odwzorowania (1), a przez

$$J_{\Phi_0} = \det|\Phi_0| \tag{3}$$

jakobian tego odwzorowania, wówczas związek pomiędzy wektorowymi miarami $\mathbf{dA}$ i $\mathbf{dA}^*$ ma postać:

$$\mathbf{dA}^* = J_{\Phi_0} \cdot \Phi_0^{-T} \cdot \mathbf{dA} \tag{4}$$

Ze sposobu określenia obu konfiguracji B_R oraz B_R^* wynika, że wektorowa miara porowatości (albo inaczej struktury) może być zdefiniowana jako różnica:

$$\Delta\mathbf{dA} \overset{df}{=} \mathbf{dA} - \mathbf{dA}^* \tag{5}$$

Na mocy wzoru (4) można zapisać:

$$\Delta\mathbf{dA} = [\mathbf{1} - J_{\Phi_0} \cdot \Phi_0^{-T}]\mathbf{dA} = \Psi_0\mathbf{dA} \tag{6.1}$$

albo:

$$\Delta\mathbf{dA} = [J_{\Phi_0}^{-1} \cdot \Phi_0^T - \mathbf{1}]\mathbf{dA}^* = \Psi_0^*\mathbf{dA}^* \tag{6.2}$$

Zarówno Ψ_0, jak i Ψ_0^* są funkcjami tensorowymi, takimi że:

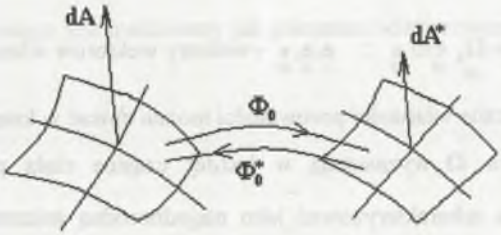
dom $\Psi_0 = B_R x B_R^*$ oraz dom $\Psi_0^* = B_R^* x B_R$

Z istnienia początkowej porowatości wynika, że zarówno Ψ_0, jak i Ψ_0^* mogą być dekomponowane, tak że :

$$\begin{aligned} &\Psi_0 = \mathbf{R}\Omega_0, \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \quad \wedge \quad \Omega_0 = \Omega_0^T \\ &\Psi_0^* = \mathbf{R}^*\Omega_0^*; \quad \mathbf{R}^{*-1} = \mathbf{R}^{*T} \quad \wedge \quad \Omega_0^* = \Omega_0^{*T} \end{aligned} \tag{7}$$

Pomijając lokalny sztywny obrót, który nie ma wpływu na porowatość, można przyjąć:

$$\Psi_0 \overset{df}{=} \Omega_0, \quad \Psi_0^* \overset{df}{=} \Omega_0^* \tag{8}$$



Rys. 2

i wektorowa miara porowatości początkowej jest zdefiniowana przez operator $\mathbf{\Omega}_0$ na konfiguracji naturalnej B_R, albo przez operator $\mathbf{\Omega}_0^*$ na konfiguracji B_R^*, czyli:

$$\Delta \mathbf{dA} = \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{dA} \quad ; \quad \Delta \mathbf{dA} = \mathbf{\Omega}_0^* \mathbf{dA}^* \tag{9}$$

Jest oczywiste, że tensorowy charakter miary $\mathbf{\Omega}_0$ ($\mathbf{\Omega}_0^*$) pozwala opisać w naturalny sposób geometryczne właściwości porowatości. Skalarna miara porowatości powierzchniowej może być więc zdefiniowana jako funkcja:

$$\underset{N}{\mathbf{\Omega}_0} \overset{df}{=} \left\langle \mathbf{\Omega}_0^T \mathbf{\Omega}_0 \mathbf{N}, \mathbf{N} \right\rangle^{1/2}$$

albo (10)

$$\underset{N}{\mathbf{\Omega}_0^*} \overset{df}{=} \left\langle \mathbf{\Omega}_0^{*T} \mathbf{\Omega}_0^* \mathbf{N}^*, \mathbf{N}^* \right\rangle^{1/2}$$

Objętościowa miara porowatości natomiast jest zdefiniowana w postaci:

$$\underset{V}{\Omega_0} \overset{df}{=} 1 - \det\left[\mathbf{\Phi}_0(\mathbf{\Omega}_0)\right]$$

$$\underset{V}{\Omega_0^*} \overset{df}{=} \left\{\left[\det \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{\Omega}_0)\right]^{-1} - 1\right\} \tag{11}$$

Jest widoczne, że zdefiniowane wcześniej miary porowatości są różne, a co za tym idzie utożsamianie obu rodzajów porowatości jest wykluczone, zwłaszcza że porowatość powierzchniowa powinna być mierzona dwojako – jako miara tensorowa oraz jako miara skalarna i rozróżnianie tych miar jest istotne ze względu na rozróżnienie naprężeń nominalnych oraz naprężeń efektywnych. Zauważmy na koniec, że ponieważ tensory $\mathbf{\Omega}_0$ oraz $\mathbf{\Omega}_0^*$ są nieosobliwymi tensorami symetrycznymi, więc można sensownie sformułować problem własny:

$$\mathbf{\Omega}_0 \mathbf{n} = \Omega_0 \mathbf{n} \tag{12}$$

czyli $\exists\ \underset{M}{\Omega_0} \neq 0$ oraz $\underset{M}{\mathbf{n}}$ takie, że $\underset{M}{\mathbf{n}} \cdot \underset{N}{\mathbf{n}} = \delta_{MN}$, co pozwala zapisać tensor $\mathbf{\Omega}_0$ w postaci spektralnej:

$\mathbf{\Omega}_0 = \underset{I}{\Omega_0} \underset{I}{\mathbf{e}} \otimes \underset{I}{\mathbf{e}} + \underset{II}{\Omega_0} \underset{II}{\mathbf{e}} \otimes \underset{IIi}{\mathbf{e}} + \underset{III}{\Omega_0} \underset{III}{\mathbf{e}} \otimes \underset{III}{\mathbf{e}}$; $\underset{I}{\mathbf{e}}, \underset{II}{\mathbf{e}}, \underset{III}{\mathbf{e}}$ - wersory wektorów własnych

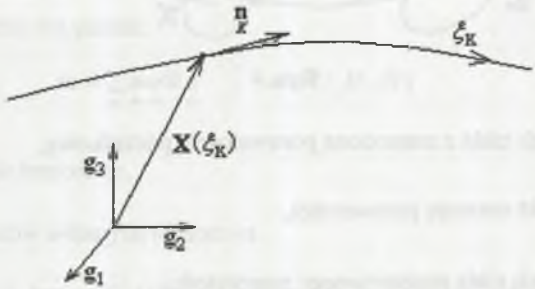
co oznacza, że geometryczne własności porowatości można opisać w kategoriach anizotropii. Wektory własne tensora $\mathbf{\Omega}_0$ wyznaczają w każdej cząstce ciała porowatego kierunki anizotropii, którą można scharakteryzować jako niejednorodną anizotropię krzywoliniową indukowaną porowatością.

Jeśli krzywa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\xi) \tag{13}$$

jest linią pola kierunków głównych anizotropii, czyli

$$\underset{K}{\mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^K} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^K}\mathbf{g}_\alpha \quad ; \quad K \in \{I, II, III\} \tag{14}$$



Rys. 3

$\{\underset{K}{\mathbf{n}}\}$ można traktować jako bazę krzywoliniowego układu geodetyk anizotropii

$$\frac{\partial \underset{K}{\mathbf{n}}}{\partial \xi^L} = \frac{\partial}{\partial \xi^L}\left(\frac{\partial X}{\partial \xi^K}\right) = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \xi^L \partial \xi^K}\mathbf{g}_\alpha \tag{15}$$

ale

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \xi^M}{\partial X^\alpha}\underset{M}{\mathbf{n}} \tag{16}$$

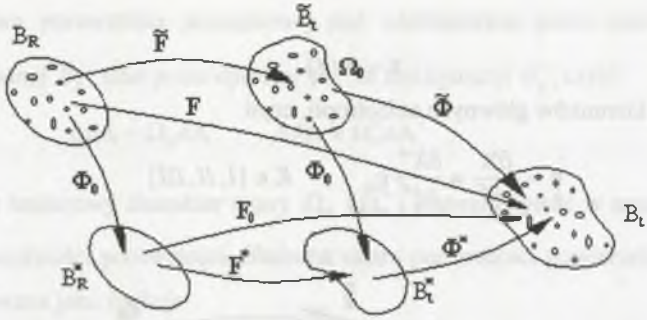
więc:

$$\frac{\partial \underset{K}{\mathbf{n}}}{\partial \xi^L} = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \xi^K \partial \xi^L}\frac{\partial \xi^M}{\partial X^\alpha}\cdot \underset{M}{\mathbf{n}} = T^M_{KL}\cdot \underset{M}{\mathbf{n}} \tag{17}$$

Dla K=L współczynnik koneksji afinicznej Γ^m_{KK} okazuje się parametrem krętości wg Beara.

2.2. Porowatość w procesie deformacji

Ruch ciała porowatego jest traktowany jak pokazane odwzorowanie:



Rys. 4

gdzie: $B_R \xrightarrow{F} \tilde{B}_t$ - ruch ciała z zamrożoną porowatością początkową,

$\tilde{B}_t \xrightarrow{\Phi} B_t$ - efekt rozwoju porowatości,

$B_R^* \xrightarrow{F^*} B_t^*$ - ruch ciała pozbawionego porowatości,

$B_t^* \xrightarrow{\Phi^*} B_t$ - efekt rozwoju porowatości.

Odwzorowania definiują gradienty deformacji:

$$\mathbf{F}^* = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{X}^*} \quad ; \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*) \tag{18.1}$$

$$\mathbf{\Phi}^* = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^*} \quad ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^*) \tag{18.2}$$

$$\mathbf{\Phi}_0 = \frac{\partial \mathbf{X}^*}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \quad ; \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{X}^*(\mathbf{X}) \tag{18.3}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} \overset{df}{=} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \quad ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{18.4}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}[\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X})] \tag{18.5}$$

$$\mathbf{F}_0 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^*} \quad ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}[\mathbf{x}^*(\mathbf{X}^*)] \tag{18.6}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}^*} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) \tag{18.7}$$

Fenomenologiczna podstawa miary ewolucji porowatości jest zdefiniowana analogicznie do poprzedniej:

$$\Delta \mathbf{da} = \mathbf{da} - \mathbf{da}^* = \mathbf{\Psi da} = \mathbf{\Psi}^* \mathbf{da}^* \tag{19}$$

gdzie:

$$\Psi \overset{df}{=} \left[\mathbf{1} - J_{\Phi}^{-1} \cdot \Phi^{*T}\right] \quad ; \quad \mathrm{dom}\ \Psi = B_t \tag{20}$$

$$\Psi^{*} \overset{df}{=} \left[J_{\Phi^{*}} \cdot \Phi^{*-T} - \mathbf{1}\right]^{*} \quad ; \quad \mathrm{dom}\ \Psi^{*} = B_t^{*} \tag{21}$$

Na mocy twierdzenia o rozkładzie polarnym w sposób poprzednio opisany można znaleźć symetryczną miarę rozwoju porowatości:

$$\boldsymbol{\omega} \quad ; \quad \Psi = \mathbf{R}_{\Psi} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad ; \quad \boldsymbol{\omega} \cong \Psi \tag{22}$$

której rozkład polarny ma postać:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{m} \underset{m}{\omega}\, \underset{m}{\mathbf{e}} \otimes \underset{m}{\mathbf{e}} \quad ; \quad m \in (I, II, III) \tag{23}$$

gdzie:

$\underset{m}{\omega}$ - wartości własne tensora $\boldsymbol{\omega}$,

$\underset{m}{\mathbf{e}}$ - wersory kierunków własnych tensora $\boldsymbol{\omega}$.

Wersory $\underset{m}{\mathbf{e}}$ definiują krzywoliniową niejednorodną anizotropię indukowaną ewolucją porowatości. Skalarna miara porowatości powierzchniowej ma postać:

$$\omega \overset{df}{=} \left\langle \boldsymbol{\omega}^{T} \boldsymbol{\omega} \mathbf{n}, \mathbf{n} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

a objętościowa:

$$\underset{V}{\omega} \overset{df}{=} 1 - \det\left[\Phi^{*}(\boldsymbol{\omega})\right] \tag{25}$$

Miara porowatości $\boldsymbol{\omega}$ jest nową zmienną stanu i wymaga stosownego równania konstytutywnego (równania ewolucji), czyli:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}[\mathbf{e}(\mathbf{e}^{*})] \tag{26}$$

W celu zapewnienia obiektywności równanie musi mieć postać zgodną z twierdzeniem o reprezentacji (C.C.Wang).

3. Podsumowanie i konkluzje

- Przedstawione podejście pozwala zdefiniować miarę porowatości w taki sposób, aby można było opisać poprawnie wszystkie cechy tego pojęcia, tj. geometrię, skalarną miarę objętościową oraz skalarną miarę powierzchniową. W szczególności, pojęcie krętości jest odpowiednim współczynnikiem koneksji afinicznej konwekcyjnego układu geodetyk anizotropii indukowanej.

- Definicja tensorowej miary porowatości pozwala konsystentnie zdefiniować pojęcia:

  - tensora naprężeń nominalnych $\mathbf{T}$, który jest tensorem Cauchy'ego w ruchu $B_R \to B_t$,

  - tensora naprężeń efektywnych

$$\mathbf{T}^* = J_{\Phi^*} \mathbf{T} \mathbf{\Phi}^{*-T} \tag{27}$$

$$\mathbf{S}^* = J_{\Phi^*} \mathbf{\Phi}^{*-1} \mathbf{T} \mathbf{\Phi}^{*-T} \tag{28}$$

  w ruchu $B_t^* \to B_t$.

- Ruch ciała rzeczywistego można wyznaczyć jako złożenie ruchu kontinuum $B_R^* \to B_t^*$ i ruchu związanego z rozwojem porowatości. W tym celu szczególnie wygodnie jest posłużyć się materialną miarą tensora pseudonaprężeń efektywnych $\mathbf{S}_R^*$.

LITERATURA

1. Adler P. M.: Porous Media. Geometry and Transports, 1992.
2. Biot M.A.: General Theory of Three-Dimensional Consolidation, Journal of Appllied Physics, vol.12, no.2, 1941, 155-164.
3. Biot M.A.: Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, Journal of Appllied Physics, vol.26, no.2, 1955, 182-185.
4. Biot M.A.: Theory of Finite Deformations of Porous Solid, Indiana University Mathematics Journal, vol.21, no.7, 1972, 597-620.
5. Bear J.: Dynamics of Fluids in Porous Media, 1972.
6. Bear J., Bachmat Y.: Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media, 1991.
7. de Boer R., Bluhm J.: Phase Transitions in Gas- and Liquid-Saturated Porous Solids, de Boer R., Porous Media: Theory and Experiments, 1999, 249-267.
8. Eringen A., Cemal: Nonlinear Theory of continuous media, 429-449.
9. Grabacki J.: Mechanika materiałów ze strukturą wewnętrzną, 1992.
10. Kubik J.: Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności, 1981.
11. Lewis R. W., Schrefler B. A.: The finite element method in the deformation and consolidation of porous media, 1987.
12. Lewis R. W., Schrefler B. A.: The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media, 1998.
13. Prevost J. H.: Mechanics of continuous porous media, Int. J. Eng. Sci., Princeton University, 18, 1979, 787-800.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik