ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: BUDOWNICTWO z. 104 Nr kol. 1695

Bartosz RÓŻYCKI*
Politechnika Opolska

LOSOWE ZAGADNIENIE WŁASNE BELKI ŻELBETOWEJ

Streszczenie. W referacie przedstawiono przykład rozwiązania losowego zagadnienia własnego żelbetowej belki wolnopodpartej. Założono jednowymiarowe pole losowe opisujące moduł sprężystości Younga betonu wzdłuż jej długości. Porównano wyniki obliczeń dla stochastycznej metody elementów skończonych i symulacji Monte Carlo.

RANDOM EIGENVALUE PROBLEM OF REINFORCED CONCRETE BEAM

Summary. The report presents an application of the random eigenvalue problem for the simply supported reinforced concrete beam. A one dimensional random field describing the Young's modulus of concrete along her length has been assumed. Results of a stochastic finite element method were compared with a Monte Carlo simulation.

1. Wstęp

Uwzględnienie losowych własności konstrukcji w statyce i dynamice budowli nie jest problemem nowym. W literaturze autorzy rozważali różne zagadnienia dla różnych układów i konstrukcji. Do ważnych kierunków analiz zalicza się między innymi tak zwane „losowe zagadnienie własne". Ocenia się w nim wpływ losowych własności konstrukcji na charakterystyki drgań własnych. Nabrało ono ostatnio aktualności, gdyż związane jest ono z problematyką detekcji uszkodzeń w konstrukcjach poprzez pomiary ich drgań. Jedną z pierwszych publikacji dotyczących losowego zagadnienia własnego był artykuł autorów Soonga i Bogdanoffa [1]. Analizowali oni wpływ losowych wartości mas i sztywności dyskretnego układu na jego częstości drgań własnych. Wykorzystali do tego metodę macierzy przeniesienia. Collins i Thomson [2], podobnie jak ich poprzednicy, przeprowadzili analizę

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Zbigniew Zembaty, prof. Politechniki Opolskiej

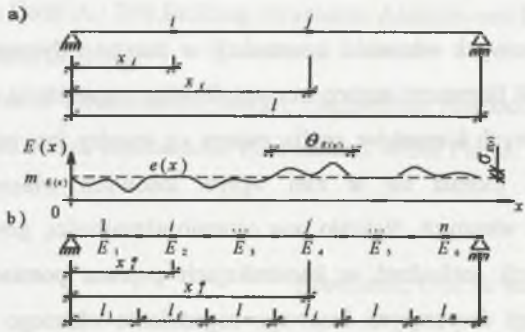
losowego zagadnienia własnego pręta modelowanego jako układ dyskretny. Stosowali metodę perturbacyjną i symulację Monte Carlo. Obszerny przegląd literatury w tym temacie można znaleźć w artykule Ibrachima [3]. Przytacza w nim publikacje dotyczące zarówno układów dyskretnych, jak i ciągłych. Lin i Cai [4] w swojej książce zajmowali się losowym zagadnieniem własnym zdyskretyzowanej wieloprzęsłowej belki. Analizowali przypadki losowej sztywności i długości przęseł. Wykorzystali metodę macierzy przeniesienia. W Polsce problem losowego zagadnienia własnego poruszany był między innymi w artykule autorów Mironowicza i Śniady [5] oraz w książce autorów Kleibera i Hiena [6].

Jednym z materiałów konstrukcyjnych w budownictwie, który posiada silnie losowe właściwości, jest beton. Dlatego losowe zagadnienie własne dla konstrukcji wykonanych z tego materiału jest szczególnie interesujące.

Przedmiotem niniejszego referatu jest ocena wpływu losowych wartości modułu sprężystości Younga betonu na wartości własne belki żelbetowej. Przedstawiono przykład numeryczny dla belki wolnopodpartej. Analizę przeprowadzono z wykorzystaniem stochastycznej metody elementów skończonych i symulacji Monte Carlo. Obliczenia wykonano za pomocą dwóch własnych programów komputerowych.

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy belkę wolnopodpartą o rozpiętości l pokazaną na rys. 1a. Przyjmijmy, że wartość modułu sprężystości E zmienia się losowo wzdłuż jej długości.



Rys. 1. a) schemat belki i pojedyncza realizacja pola losowego $E(x)$, b) dyskretyzacja
Fig. 1. a) scheme of the beam and a single realization of the random field $E(x)$, b) discretization

Jego rozkład opisuje jednowymiarowe, jednorodne, ciągłe pole losowe $E(x)$ (np. [7]). Wartość procesu oznaczmy przez $e(x_i)$, a przez $e_k(x)$ jego pojedynczą realizację. Charakterystyki

probabilistyczne pola w punkcie „i" określają wartość oczekiwana $m_{E(xi)}$, wariancja $\mathrm{Var}[E(x_i)]$, odchylenie standardowe $\sigma_{E(xi)}$ oraz współczynnik zmienności $v_{E(xi)}$:

$$m_{E(xi)} = \langle E(x_i) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e_i \cdot f_{E(xi)}(e_i) de_i \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}[E(x_i)] = \left\langle \left(e_i - \langle E(x_i) \rangle \right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (e_i - m_{E(xi)})^2 \cdot f_{E(xi)}(e_i) de_i \tag{2}$$

$$\sigma_{E(xi)} = \sqrt{\mathrm{Var}[E(x_i)]}, \tag{3}$$

$$v_{E(xi)} = \frac{\sigma_{E(xi)}}{m_{E(xi)}} \tag{4}$$

Szczególnie ważne łączne charakterystyki pola dla dwóch punktów „i" oraz „j" opisują funkcje kowariancji $\mathrm{Cov}[E(x_i),E(x_j)]$ oraz korelacji przestrzennej $\rho_{E(xi),E(xj)}$:

$$\mathrm{Cov}[E(x_i),E(x_j)] = \left\langle \left(e_i - \langle E(x_i) \rangle \right) \cdot \left(e_j - \langle E(x_j) \rangle \right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (e_i - m_{E(xi)}) \cdot (e_j - m_{E(xj)}) \cdot f_{E(xi),E(xj)}(e_i, e_j) de_j de_i \tag{5}$$

$$\rho_{E(xi),E(xj)} = \frac{\mathrm{Cov}[E(x_i),E(x_j)]}{\sigma_{E(xi)} \cdot \sigma_{E(xj)}} \tag{6}$$

gdzie:

$f_{E(xi)}(e_i)$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa pola dla jednego punktu,

$f_{E(xi),E(xj)}(e_i,e_j)$ – łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa pola dla dwóch punktów.

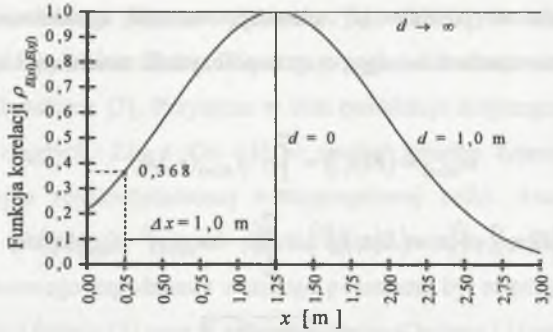
Jeżeli pole jest jednorodne, to wartość oczekiwana $m_{E(xi)}$ i odchylenie standardowe $\sigma_{E(xi)}$ dla każdego z jego punktów są jednakowe, czyli $m_{E(xi)} = m_{E(x)}$ i $\sigma_{E(xi)} = \sigma_{E(x)}$. Natomiast funkcja korelacji zależy od odległości Δx między punktami pola. Rozważono, często przyjmowaną w literaturze, wykładniczą funkcję korelacji o postaci:

$$\rho_{E(xi),E(xj)} = \exp\left(-\left(\frac{|\Delta x|}{d} \right)^2 \right) \tag{7}$$

$$\Delta x = x_i - x_j \tag{8}$$

$$\theta_{E(x)} = \sqrt{\pi} \cdot d \tag{9}$$

Wielkość $\theta_{E(x)}$ to tak zwana „długość korelacji" (skala fluktuacji) pola. Jej wielkość jest miarą odległości między jego punktami, dla której jest ono silnie skorelowane. Na rys. 2 pokazano wykresy funkcji korelacji $\rho_{E(xi),E(xj)}$ dla różnych wartości parametru d.



Rys. 2. Wykresy wykładniczej funkcji korelacji $\rho_{E(xi),E(xj)}$ dla x_i = 1,25 m
Fig. 2. Diagrams of the exponential correlation function $\rho_{E(xi),E(xj)}$ for x_i = 1,25 m

Na potrzeby dalszych rozważań pole losowe $E(x)$ zdyskretyzowano za pomocą metody punktu środkowego (np. [8]). Polega ona na podzieleniu go na elementy dyskretne o równej długości l_i i przyjęciu, że moduł sprężystości każdego z nich jest ciągłą zmienną losową E_i (rys. 1b). Są one stałe w obrębie każdego elementu „i". Charakterystykami probabilistycznymi zmiennych są wartości oczekiwane m_{Ei}, wariancje Var[E_i], odchylenia standardowe σ_{Ei} i współczynniki zmienności v_{Ei}. Wzajemne zależności pomiędzy dwoma zmiennymi „i" oraz „j" opisują kowariancja Cov[E_i,E_j] oraz współczynnik korelacji $\rho_{Ei,Ej}$. Są one dyskretnymi wersjami wzorów od (1) do (9) charakterystyk pola. Ponieważ założono, że jest ono jednorodne, więc wartości oczekiwane i odchylenia standardowe zmiennych są jednakowe. Do opisu długości korelacji zmiennych używa się zarówno parametru $\theta_{E(xi)}$, jak i d. Powiązane są one ze sobą zależnością (9). Za pracą [9] przyjęto, że parametr d wynosi dwie długości elementu. Wielkość Δx jest w tym przypadku odległością pomiędzy środkami elementów. Przy wykorzystaniu wszystkich wzajemnych korelacji można utworzyć macierz korelacji $\boldsymbol{\rho}_{Ei,Ej}$ i kowariancji **Cov**[E_i,E_j].

Rozważmy dalej zagadnienie własne, czyli nietłumione drgania swobodne konstrukcji. W ujęciu dyskretnym macierzowe równanie zagadnienia ma postać:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \det(\mathbf{K} - \lambda_i \cdot \mathbf{B}) = 0 \qquad \text{(10a i 10b)}$$

W powyższych wzorach **K** i **B** to macierze sztywności i bezwładności. Wynikami rozwiązania zagadnienia własnego są wartości własne λ_i i wektory własne $\mathbf{u}_i$. Macierz bezwładności nie zależy od modułu sprężystości, więc jest macierzą deterministyczną. Macierz sztywności zależy od modułów sprężystości elementów, zatem jest macierzą losową. W związku z tym wartości i wektory własne również będą zmiennymi losowymi Λ_i (dalej użyto λ_i). Takie zadanie nazywane jest w literaturze losowym zagadnieniem własnym.

3. Losowe zagadnienie własne i stochastyczna MES

Stochastyczna metoda elementów skończonych wykorzystuje rozwinięcie w szereg Taylora wartości własnej λ. Rozwija się ją w otoczeniu pewnej danej wartości $\bar{\lambda}$. Uwzględniając trzy pierwsze wyrazy, mamy:

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial E_i} \cdot \Delta E_i + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial E_i \partial E_j} \cdot \Delta E_i \cdot \Delta E_j \tag{11}$$

gdzie:

$\frac{\partial \lambda}{\partial E_i}$ i $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial E_i \partial E_j}$ – pochodne cząstkowe 1 i 2 rzędu, ΔE_i i ΔE_j – przyrosty zmiennych modułu sprężystości, n – liczba zmiennych funkcji.

Dokonując odpowiednich podstawień, przekształceń i operacji ostatecznie uzyskano aproksymację 2 rzędu wektora wartości oczekiwanych $\mathbf{m}_\lambda$ i macierzy kowariancji $\mathbf{Cov}[\lambda_i, \lambda_j]$ wartości własnych:

$$\mathbf{m}_\lambda = \boldsymbol{\lambda}_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_{EiEj} \cdot \mathrm{Cov}[E_i, E_j] \tag{12}$$

$$\mathbf{Cov}[\lambda_i, \lambda_j] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_{Ei} \cdot (\boldsymbol{\lambda}_{Ej})^T \cdot \mathrm{Cov}[E_i, E_j] +$$

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_{EiEj} \cdot (\boldsymbol{\lambda}_{EkEl})^T \cdot \left(\mathrm{Cov}[E_i, E_l] \cdot \mathrm{Cov}[E_j, E_k] + \mathrm{Cov}[E_i, E_k] \cdot \mathrm{Cov}[E_j, E_l]\right) \tag{13}$$

$$\lambda_{Ei} = (\mathbf{u}_0)^T \cdot \mathbf{K}_{Ei} \cdot \mathbf{u}_0 \tag{14}$$

$$\lambda_{EiEj} = (\mathbf{u}_0)^T \cdot (\mathbf{K}_{Ej} - \lambda_{Ej} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_{Ei} + (\mathbf{u}_0)^T \cdot (\mathbf{K}_{Ei} - \lambda_{Ei} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_{Ej} \tag{15}$$

gdzie:

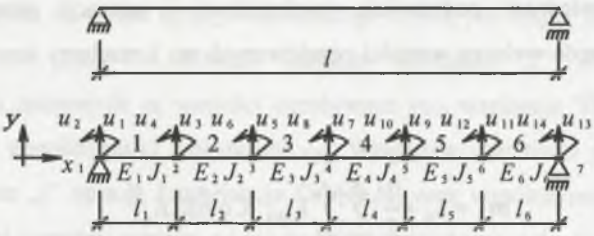
λ_0 – wektor rozwiązań 0 rzędu wartości własnych, $\boldsymbol{\lambda}_{Ei}$ i $\boldsymbol{\lambda}_{EiEj}$ – wektory rozwiązań 1 i 2 rzędu wartości własnych, $\mathbf{K}_{Ei}$ i $\mathbf{K}_{Ej}$ – macierze sztywności 1 rzędu, $\mathbf{u}_{Ei}$ i $\mathbf{u}_{Ej}$ – wektory rozwiązań 1 rzędu wektorów własnych.

Wektor rozwiązań 0 rzędu wartości własnych $\boldsymbol{\lambda}_0$ otrzymuje się przez podstawienie do macierzy sztywności $\mathbf{K}$ wartości oczekiwanych modułów sprężystości elementów i rozwiązanie równania (10a). Odchylenia standardowe $\sigma_{\lambda i}$ i współczynniki zmienności $v_{\lambda i}$ wartości własnych dane są wzorami:

$$\sigma_{\lambda i} = \sqrt{\mathrm{Cov}[\lambda_i, \lambda_i]} = \sqrt{\mathrm{Var}[\lambda_i]}, \quad v_{\lambda i} = \frac{\sigma_{\lambda i}}{m_{\lambda i}} \tag{16 i 17}$$

4. Przykład numeryczny

Na rys. 3 pokazano belkę żelbetową (beton klasy B25) wolnopodpartą, o rozpiętości $l = 3{,}0$ m oraz przekroju poprzecznym $b \times h = 0{,}25 \times 0{,}50$ m. Zdyskretyzowano ją na sześć elementów skończonych. Długości i momenty bezwładności elementów belki są wielkościami deterministycznymi. Wynoszą one odpowiednio $l_i = 0{,}5$ m i $J_i = 0{,}002604$ m^4 ($i = 1,...,6$). Moduły sprężystości Younga elementów są zmiennymi losowymi E_i. Opisane są one rozkładem Gaussa. Ich wartość oczekiwana wynosi $m_E = 30$ GPa. Współczynnik zmienności modułu sprężystości v_E zmienia się od 0 do 0,2. Dodatkowo przyjęto, że są one nieskorelowane ($d = 1{,}0$ m, $\rho_{Ei,Ej} = 0$ dla $i \neq j$), częściowo skorelowane ($d = 1{,}0$ m) i w pełni skorelowane ($d \to \infty$, $\rho_{Ei,Ej} = 1{,}0$ dla $i = j$).



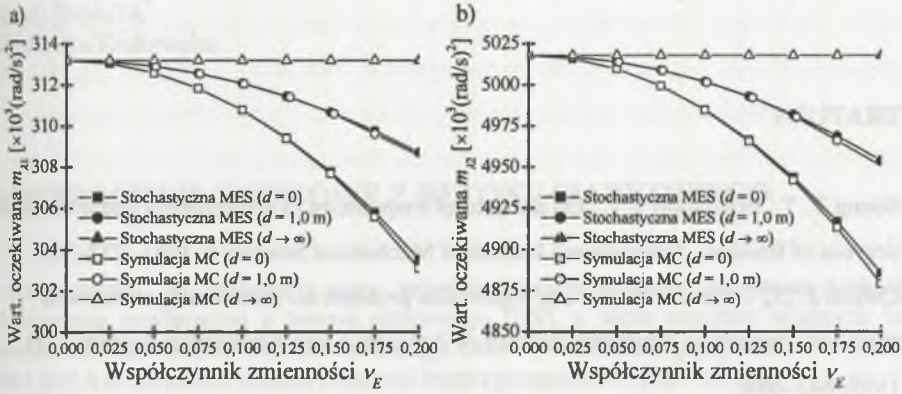
Rys. 3. Schemat belki i dyskretyzacja
Fig. 3. Scheme of the beam and discretization

W celu weryfikacji wyników otrzymanych przy użyciu stochastycznej metody elementów skończonych przeprowadzono obliczenia za pomocą symulacji Monte Carlo (np. [10]). Polega ona na wygenerowaniu zbioru realizacji pola losowego $E(x)$ przy pomocy komputerowego generatora liczb pseudolosowych (np. [11]), wielokrotnym obliczeniu analizowanego zagadnienia i statystycznej obróbce wyników.

Na rys. 4 pokazano wykresy obliczonych wartości oczekiwanych wartości własnych $m_{\lambda i}$ dla różnych wartości współczynnika zmienności modułu sprężystości v_{Ei} i różnych korelacji wzajemnych zmiennych losowych.

Można zauważyć, że w przypadku przyjęcia nieskorelowanych ($d = 0$) i częściowo skorelowanych ($d = 1{,}0$ m) zmiennych wartości oczekiwane wartości własne zmalały wraz ze wzrostem współczynnika zmienności modułu sprężystości. Uległy one zmniejszeniu odpowiednio średnio o około 0,8% i 0,3% dla współczynnika zmienności równego 0,1 i średnio o około 2,8% i 1,4% dla współczynnika równego 0,2. Jeżeli przyjęto w pełni skorelowane zmienne ($d \to \infty$), wartości te nie uległy zmianie. We wszystkich trzech

przypadkach korelacji, dla obydwu metod obliczeniowych, wielkości te są do siebie zbliżone. Najmniejsze różnice pomiędzy nimi zauważono dla współczynników zmienności do 0,1.



Rys. 4. Wykresy wartości oczekiwanych wartości własnych $m_{\lambda i}$: a) pierwsza wartość, b) druga wartość

Fig. 4. Diagrams of expected values of eigenvalues $m_{\lambda i}$: a) first eigenvalue, b) second eigenvalue

5. Podsumowanie i wnioski końcowe

W niniejszym referacie przedstawiono ocenę wpływu losowych wartości modułu sprężystości Younga betonu na wartości własne belki żelbetowej. Analizę przeprowadzono z wykorzystaniem stochastycznej metody elementów skończonych i symulacji Monte Carlo. Porównano uzyskane wyniki dla obydwu metod.

Rozważano trzy przypadki przestrzennej funkcji korelacji $\rho_{E(xi),E(xj)}$ pola losowego modułu sprężystości $E(x)$: nieskorelowanego ($d = 0$), częściowo skorelowanego ($d = 1{,}0$ m) i w pełni skorelowanego ($d \to \infty$). Gdy pole losowe modułu sprężystości jest w pełni skorelowane, to wartości oczekiwane wartości własnych $m_{\lambda i}$ nie zależą od jego współczynnika zmienności v_{Ei}. Jeśli natomiast pole losowe jest częściowo skorelowane i nieskorelowane, to wartości oczekiwane wartości własnych maleją wraz ze wzrostem modułu sprężystości. Jak wiadomo, moduł sprężystości betonu wpływa na sztywność konstrukcji i jest on dobrą miarą jego jakości. Pełna korelacja pola oznacza identyczny, choć losowy beton na długości belki. Częściowa i zerowa korelacja oznacza, że jest on nieidentyczny i losowy na jej długości.

Wyniki otrzymane ze stochastycznej metody elementów skończonych (aproksymacja drugiego rzędu) zostały potwierdzone przez symulację Monte Carlo.

Niniejsza praca przedstawia wstępne wyniki analizy losowego zagadnienia własnego belki żelbetowej. Jego szersza analiza dla konstrukcji w stanie niezarysowanym i zarysowanym jest przedmiotem planowanej rozprawy doktorskiej.

LITERATURA

1. Soong T. T., Bogdanoff J. L.: On the natural frequencies of a disordered linear chain of n degrees of freedom, International Journal of Mechanical Science 5, 1963, 237–265.
2. Collins J. D., Thomson W. T.: The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties, American Institute of Aerospace and Aeronautics Journal 7 (4), 1969, 642–648.
3. Ibrachim R. A.: Structural dynamics with parameter uncertainties, Applied Mechanics Review 40 (3), 1987, 309–328.
4. Lin Y. K., Cai G. Q.: Probabilistic structural dynamics. Advance theory and applications, Mc Graw-Hill, Inc., Singapore 1995.
5. Mironowicz W., Śniady P.: Dynamics of machine foundations with random parameters, Journal of Sound and Vibration 112 (1), 1987, 23–30.
6. Kleiber M., Hien T. D.: The stochastic finite element method. Basic perturbation technique and computer implementation, John Wiley & Sons, Chichester 1992.
7. Vanmarcke E.: Random fields: Analysis and Synthesis, MIT Press, Massachusetts 1984.
8. Zeldin B.A., Spanos P. D.: On random field discretization in stochastic finite elements, Journal of Applied Mechanics 65, 1998, 320–327.
9. Yamazaki F., Shinozuka M., Dasgupta G.: Neumann expansion for stochastic finite element analysis, Journal of Engineering Mechanics 114 (8), 1988, 1335–1354.
10. Zieliński R.: Metody Monte Carlo, WNT, Warszawa 1970.
11. Wieczorkowski R., Zieliński R.: Komputerowe generatory liczb losowych, WNT, Warszawa 1997.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Paweł Śniady