ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: BUDOWNICTWO z.104 Nr kol. 1695

Piotr SZCZEPANIAK*
Politechnika Śląska

JEDNOSTRONNE LEPKO-SPRĘŻYSTE WIĘZY W MODELU RUCHU W ZJEŻDŻALNIACH WODNYCH

Streszczenie. Praca przedstawia sformułowanie i zastosowanie trójwymiarowego modelu ruchu z nieliniowymi więzami do symulacji ześlizgu człowieka w basenowej zjeżdżalni wodnej o przekroju kołowym. Otrzymane równania są całkowane numerycznie. Zagadnienie zilustrowano przykładem.

UNILATERAL VISCO-ELASTIC CONSTRAINS IN THE MODEL OF MOTION IN WATER SLIDES

Summary. The paper presents formulation and application of a three-parametric model of motion with unilateral constrains for simulation of motion of the human body inside water slides. Developed equations are integrated numerically and illustrated with an example.

1. Wstęp

Zjeżdżalnie wodne [1], czyli urządzenia będące równią pochyłą, po których użytkownik ześlizguje się pod wpływem siły ciężkości, wykorzystując wodę do zmniejszenia tarcia, należą obecnie do podstawowych urządzeń rekreacyjnych wchodzących w skład kompleksów basenowych, zwanych parkami wodnymi. Ich atrakcyjność powoduje, że są także często montowane przy już istniejących basenach, a koszty budowy rekompensują się szybko przez zwiększenie się liczby osób korzystających z kąpieliska (dotyczy to głównie dzieci i młodzieży). Przy projektowaniu zjeżdżalni pojawia się jednak wiele problemów, do których należą m.in. wyznaczenie geometrii ślizgu zjeżdżalni oraz oszacowanie, czy projektowany obiekt będzie bezpieczny w eksploatacji.

Wyznaczenie geometrii zjeżdżalni właściwej, czyli strefy przewidzianej do zjeżdżania, polega na wyborze gotowych elementów ślizgu z zestawu oferowanego przez wytwórcę

* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Andrzej Wawrzynek, prof. nzw. Politechniki Śląskiej

(rys. 1) i odpowiednim ich umiejscowieniu w przestrzeni. Umiejętny dobór kolejności, wymiarów i sposobów łączenia segmentów zjeżdżalni wymaga szeregu obliczeń opisanych w pracy [2], których efektem może być przykładowa zjeżdżalnia przedstawiona poniżej (rys. 2).

Rys. 1. Kształt podstawowych elementów zjeżdżalni wodnych
Fig. 1. Shape of the basic elements of water slides

Rys. 2. Widoki przykładowej zjeżdżalni
Fig. 2. Views of a sample slide

Po wstępnym przyjęciu kształtu zjeżdżalni kolejnym zadaniem jest sprawdzenie, czy projektowany obiekt będzie bezpieczny w eksploatacji w sensie nieprzekraczania dopuszczalnych wartości przeciążeń działających na osobę zjeżdżającą [1]. W tym celu zbudowano uproszczony model fizyczny obiektu oraz model matematyczny zjawiska w postaci układu nieliniowych równań różniczkowych, opisującego ruch ciała. Rozwiązanie równań otrzymano stosując przybliżone metody numeryczne. Niniejszy artykuł stanowi rozwinięcie modelu prezentowanego w pracach [2,3], polegające na wprowadzeniu nieliniowych, lepko-sprężystych więzi kontaktowych.

2. Model ruchu

2.1. Przyjęte założenia i uproszczenia

Precyzyjny opis ruchu ciała ludzkiego w ograniczonej przestrzeni jest zadaniem trudnym, wprowadzono więc następujące, dopuszczalne zdaniem Autora, założenia upraszczające:

- rozkład masy człowieka przyjęto w modelu jako pojedynczą masę, skupioną w punkcie, znajdującym się w środku ciężkości ciała użytkownika,
- kontakt między użytkownikiem a wewnętrzną powierzchnią zjeżdżalni realizowany jest jako jednostronna podpora sprężysta z tłumieniem wiskotycznym,
- ze względu na to, że prędkość płynącej we wnętrzu zjeżdżalni wody jest zbliżona do prędkości użytkownika, pominięto wpływ stawianego przez nią oporu na osobę zjeżdżającą,
- siłę tarcia występującą między użytkownikiem a wewnętrzną powierzchnią zjeżdżalni przyłożono do środka masy użytkownika.

2.2. Układ współrzędnych

Pierwszym etapem modelowania ruchu jest przyjęcie układu współrzędnych (rys. 3). Matematyczny opis powierzchni wszystkich elementów zjeżdżalni w globalnym kartezjańskim układzie współrzędnych (związanym np. z halą basenu) byłby bardzo skomplikowany, wprowadzono więc układy lokalne, osobno dla każdego kolejnego segmentu. Układy te są zdefiniowane w następujący sposób:

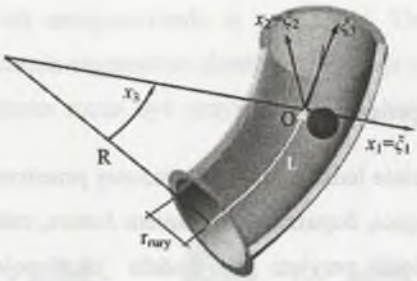
- dla elementów zakrzywionych są to zmodyfikowane cylindryczne układy współrzędnych, w których oś Ox_1 leży w płaszczyźnie osi elementu, oś Ox_2 jest do niej prostopadła, a kątowa współrzędna x_3 określa położenie bieżącego przekroju poprzecznego,
- dla elementów prostych przyjęto prostokątne lewoskrętne układy współrzędnych liniowych, w których oś Ox_1 leży w płaszczyźnie poziomej, oś Ox_2 w płaszczyźnie pionowej, a oś Ox_3 pokrywa się z osią elementu zjeżdżalni.

W tak zdefiniowanych układach współrzędnych położenie ciała opisuje wektor **x**:

$$\mathbf{x} := \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\}^T \tag{1}$$

a równanie wewnętrznej powierzchni zjeżdżalni przyjmuje formę:

$$x_1^2 + x_2^2 = r_{rury}^2 \tag{2}$$



Rys. 3. Układy współrzędnych dla elementów zakrzywionych w lewo
Fig. 3. Coordinate systems for the left curved elements

Dodatkowo przyjęto ruchome, prostokątne układy współrzędnych liniowych $O\xi_i$, ułatwiające zapisanie wektora prędkości liniowej ($\mathbf{v}_\xi$) oraz jej wartości (v_ξ) (indeks „ξ" przy wielkościach wektorowych oznacza, że są one zapisane w układzie $O\xi_i$).

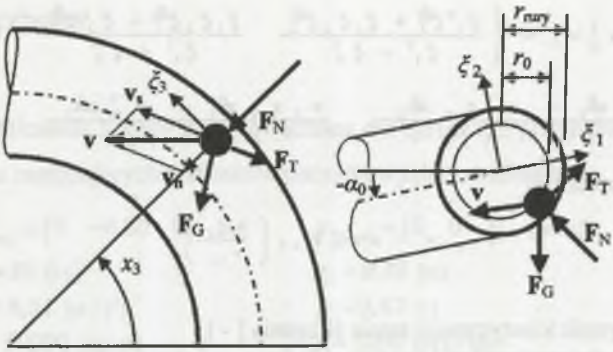
$$\mathbf{v}_\xi := \dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \pm x_1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \tag{3}$$

$$v_\xi := \sqrt{\mathbf{v}_\xi^T \mathbf{v}_\xi} \tag{4}$$

2.3. Siły działające na ciało w ruchu

Kolejnym krokiem w procesie modelowania ruchu jest określenie sił działających na poruszające się ciało, co zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona pozwoli na zapisanie równania ruchu. W przyjętych układach współrzędnych można wyróżnić następujące siły (rys. 4):

- siłę grawitacji ($\mathbf{F}_G$), skierowaną pionowo w dół,
- siłę reakcji na nacisk ($\mathbf{F}_N$), skierowaną prostopadle do powierzchni elementu w miejscu jego kontaktu z poruszającym się ciałem, wymuszającą pozostawanie wewnątrz zjeżdżalni,
- siłę tarcia ($\mathbf{F}_T$), skierowaną przeciwnie do stycznej do elementu składowej wektora prędkości ($\mathbf{v}_s$),
- siłę bezwładności ($\mathbf{F}_B$), konieczną do uwzględnienia w przypadku stosowania nieinercjalnych układów współrzędnych.



Rys. 4. Siły działające na poruszające się ciało
Fig. 4. Forces acting on moving body

Współrzędne wektorów wymienionych sił, zapisanych w układzie $O\xi_i$, wyznacza się z następujących wzorów:

- wektor siły grawitacji [N]

$$\mathbf{F}_{G\xi} := mg\left\{\cos(\beta)\sin(\alpha_0) \quad -\cos(\beta)\cos(\alpha_0) \quad \sin(\beta)\right\}^T \tag{5}$$

gdzie:

m – masa [kg],
g – przyspieszenie ziemskie [m / s^2],
α_0, β – kąty opisujące położenie układu $O\xi_i$ wzgl. płaszczyzny poziomej [rad];

$$\alpha_0 := \arctan\left(\frac{\sin(\alpha_p)\cos(\beta_p)\cos(x_3) \pm \sin(\beta_p)\sin(x_3)}{\cos(\alpha_p)\cos(\beta_p)}\right) \tag{6}$$

$$\beta := \arcsin\left(\sin(\beta_p)\cos(x_3) \mp \sin(\alpha_p)\cos(\beta_p)\sin(x_3)\right) \tag{7}$$

α_p, β_p – kąty opisujące położenie elementu względem płaszczyzny poziomej [rad];

- wektor siły reakcji na nacisk [N]

$$\mathbf{F}_{N\xi} := \begin{cases} \mathbf{0} & \textit{jeżeli} \quad (r < r_0) \vee \left[\left(k(r-r_0) - c\mathbf{n}_\xi^T\mathbf{v}_{n\xi}\right) < 0\right] \\ k(r-r_0)\mathbf{n}_\xi - c\mathbf{v}_{n\xi} & \textit{jeżeli} \quad (r \geq r_0) \wedge \left[\left(k(r-r_0) - c\mathbf{n}_\xi^T\mathbf{v}_{n\xi}\right) \geq 0\right] \end{cases} \tag{8}$$

gdzie:

$$r := \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{9}$$

r_0 – zredukowany promień rury [m],
k – współczynnik sprężystości [N / m],
c – współczynnik tłumienia [N s / m],
$\mathbf{n}_\xi$ – wektor jednostkowy normalny do powierzchni kontaktu [-];

$$\mathbf{n}_\xi := \left\{-\frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \quad -\frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \quad 0\right\}^T = \left\{-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad 0\right\}^T \tag{10}$$

$\mathbf{v}_{n\xi}$ – normalna do powierzchni kontaktu składowa wektora prędkości [m / s];

$$\mathbf{v}_{n\xi} := \mathbf{n}_{\xi}\mathbf{n}_{\xi}^{T}\mathbf{v}_{\xi} = \left\{ \frac{\xi_1^2\dot{\xi}_1 + \xi_1\xi_2\dot{\xi}_2}{\xi_1^2+\xi_2^2} \quad \frac{\xi_1\xi_2\dot{\xi}_1 + \xi_2^2\dot{\xi}_2}{\xi_1^2+\xi_2^2} \quad 0 \right\}^T =$$
$$= \left\{ \frac{x_1^2\dot{x}_1 + x_1x_2\dot{x}_2}{x_1^2+x_2^2} \quad \frac{x_1x_2\dot{x}_1 + x_2^2\dot{x}_2}{x_1^2+x_2^2} \quad 0 \right\}^T \tag{11}$$

- wektor siły tarcia [N]

$$\mathbf{F}_{T\xi} := -\mu\,\mathbf{n}_{\xi}^{T}\mathbf{F}_{N\xi}\left(\frac{\mathbf{v}_{s\xi}}{v_{s\xi}}\right) \tag{12}$$

gdzie:

μ – współczynnik kinetycznego tarcia ślizgania [-],

$\mathbf{v}_{s\xi}$ – styczna do powierzchni kontaktu składowa wektora prędkości [m / s];

$$\mathbf{v}_{s\xi} := \mathbf{v}_{\xi} - \mathbf{v}_{n\xi} = \left\{ \frac{\xi_2^2\dot{\xi}_1 - \xi_1\xi_2\dot{\xi}_2}{\xi_1^2+\xi_2^2} \quad \frac{-\xi_1\xi_2\dot{\xi}_1 + \xi_1^2\dot{\xi}_2}{\xi_1^2+\xi_2^2} \quad \dot{\xi}_3 \right\}^T =$$
$$= \left\{ \frac{x_2^2\dot{x}_1 - x_1x_2\dot{x}_2}{x_1^2+x_2^2} \quad \frac{-x_1x_2\dot{x}_1 + x_1^2\dot{x}_2}{x_1^2+x_2^2} \quad \dot{x}_3\,(R \pm x_1) \right\}^T \tag{13}$$

$$v_{s\xi} := \sqrt{\mathbf{v}_{s\xi}^{T}\mathbf{v}_{s\xi}} \tag{14}$$

- siła bezwładności (odśrodkowa i Coriolisa) [N]

$$\mathbf{F}_{B\xi} := \left\{ \pm\frac{m\,\dot{\xi}_1^2}{R \pm \xi_1} \quad 0 \quad m\,\frac{2\,m\,\dot{\xi}_1\dot{\xi}_3}{R \pm \xi_1} \right\}^T =$$
$$= \left\{ \pm\, m\,\dot{x}_3^2\,(R \pm x_1) \quad 0 \quad m\,2\,m\,\dot{x}_1\dot{x}_3 \right\}^T \tag{15}$$

W powyższych wzorach górne znaki w symbolach ($\pm$m) dotyczą przypadku elementu lewoskrętnego przedstawionego na rys. 4, a dolne prawoskrętnego, w którym oś Ox_1 skierowana jest do środka łuku. Natomiast wewnątrz elementu prostego współrzędne wektora siły grawitacji mają wartości stałe, obliczane dla $\alpha_0 := 0$ i $\beta := \beta_p$, a siła bezwładności ma wartość równą zeru ($\mathbf{F}_{B\xi} := \mathbf{0}$).

2.4. Równanie ruchu

Korzystając z obliczonych powyżej wektorów sił działających na ciało oraz II zasady dynamiki Newtona [4], można napisać równanie ruchu, które dla elementów zakrzywionych ma postać:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m\,(R \pm x_1) \end{pmatrix} \ddot{x} =$$
$$= \mathbf{F}_{G\xi} + \mathbf{F}_{N\xi} + \mathbf{F}_{T\xi} + \mathbf{F}_{B\xi} \tag{16}$$

Jest to układ trzech nieliniowych równań różniczkowych drugiego rzędu. Przybliżone rozwiązanie uzyskano na drodze całkowania numerycznego, przeprowadzonego przy użyciu procedur systemu *Mathematica 5.0*. Procedury te automatycznie dobierają algorytm całkowania oraz długość kroku czasowego.

3. Przykład liczbowy

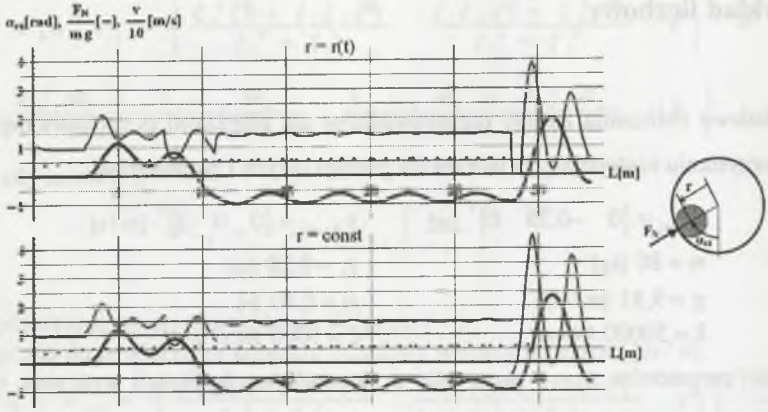
Przykładowe obliczenia zostały przeprowadzone dla zjeżdżalni przedstawionej na rys. 2, przy wykorzystaniu następujących warunków początkowych i parametrów:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_{(t=0)} = \{0 \quad -0.20 \quad 0\}^T \text{ [m]} && \mathbf{v}_{\xi(t=0)} = \{0 \quad 0 \quad 3\}^T \text{ [m/s]} \\ &m = 80 \text{ [kg]} && r_0 = 0.20 \text{ [m]} \\ &g = 9{,}81 \text{ [m/s}^2\text{]} && \mu = 0{,}07 \text{ [-]} \\ &k = 50000 \text{ [N/m]} && c = 5000 \text{ [N s/m]} \end{aligned} \tag{17}$$

Wartości parametrów $\mathbf{x}_{(t=0)}$, $\mathbf{v}_{\xi(t=0)}$ oraz μ są rezultatem kalibracji programu, mającej na celu dopasowanie wyników modelowania do wartości oszacowanych na podstawie normy [1] i Autor uznaje je za najbardziej niekorzystne spośród mogących wystąpić w rzeczywistości (skutkują szybką jazdą z dużymi przeciążeniami). Pozostałe parametry zależą od masy i wymiarów osoby, której ruch się modeluje, mogą więc wykazywać szerokie spektrum wartości. Tutaj ustalono je na podstawie założenia, że leżącemu nieruchomo użytkownikowi o masie 100 kg odpowiada spłaszczenie ciała rzędu 2 cm. Wartość współczynnika oporu c dobrano natomiast tak, aby uzyskać efekt drgań silnie tłumionych na kierunku prostopadłym do powierzchni zjeżdżalni.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 5 (górny wykres). Na osi odciętych odłożono położenie przekrojów poprzecznych (L), przez które poruszało się ciało (mierzone wzdłuż osi elementów), a na osi rzędnych przedstawiono współrzędną kątową położenia ciała w tych przekrojach (α_{rz} – linia gruba), wartość przeciążenia względnego (F_N / m g – linia cienka) oraz wartość prędkości podzieloną przez 10 (v / 10 – linia kropkowana). Dolny wykres przedstawia wyniki modelowania ruchu w identycznej zjeżdżalni, jednak przy stosowanym w pracach [2, 3] założeniu, że r = const.

Charakterystyczną cechą wykresów na rys. 5 jest silne zaburzenie ruchu w końcowej części zjeżdżalni, będące efektem nagłej zmiany krzywizny jej osi (patrz rys. 2) i mogące doprowadzić do występowania urazów u użytkowników. Ze względu na trudności w wykonaniu fragmentów ślizgu mogących pełnić funkcję krzywych przejściowych (elementy o płynnie zmieniającym się promieniu krzywizny R) zaleca się więc wprowadzanie, pomiędzy kolejne zakręty zjeżdżalni, elementów prostych, tak jak w analizowanym przykładzie w okolicach 8 ÷ 11 mb. Pozwala to na zaprojektowanie bezpiecznego, lecz dostarczającego dużo wrażeń obiektu.



Rys. 5. Wyniki modelowania ruchu
Fig. 5. Results of the modeling of the motion

4. Podsumowanie

W porównaniu z pracami [2, 3] zastosowany tutaj nieliniowy model matematyczny dokładniej opisuje ruch użytkownika w zjeżdżalni wodnej, dając m.in. ciągły wykres przeciążenia względnego i pozwalając wiarygodnie analizować zjeżdżalnie, w których celowo wprowadza się możliwość oderwania się użytkownika od jej powierzchni (krótki skok).

Zagadnienie będzie nadal rozwijane poprzez uwzględnianie kolejnych czynników oraz identyfikację parametrów na drodze eksperymentalnej, a stworzone oprogramowanie będzie testowane w wyspecjalizowanej firmie projektowej. Problemy te zostaną przedstawione w przyszłości.

LITERATURA

1. PN-EN 1069 Zjeżdżalnie wodne o wysokości 2 m i większej, Warszawa 2003.
2. Szczepaniak P.: Zjeżdżalnie wodne. Obliczanie geometrii zjeżdżalni i modelowanie ruchu użytkownika, praca magisterska, Gliwice 2003.
3. Walentyński R., Szczepaniak P.: Sprawdzanie geometrii torów zjeżdżalni wodnych ze względu na bezpieczeństwo użytkowania, Inżynieria i Budownictwo 1/2005, s. 10-12.
4. Borkowski Sz.: Mechanika ogólna: Tom III: Dynamika newtonowska, Skrypty Uczelniane nr 1872 Politechnika Śląska, Gliwice 1994.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Rakowski