ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLASKIEJ 2005
Seria: BUDOWNICTWO z.104 Nr kol.1695

Piotr WIELGOS*
Politechnika Lubelska

WYZNACZANIE EKWIWALENTEGO WSPÓŁCZYNNIKA TŁUMIENIA DRGAŃ DLA KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH Z WIELOKROTNYMI STROJONYMI TŁUMIKAMI MASOWYMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę wyznaczania współczynnika tłumienia krytycznego dla konstrukcji złożonych, porównanie jej do metody energetycznej oraz wyniki symulacji numerycznych komina z zainstalowanymi wielokrotnymi tłumikami masowymi.

DETERMINING OF EQUIVALENT DAMPING COEFFICIENT OF VIBRATION FOR ROD STRUCTURE WITH MULTIPLE TUNED MASS DUMPERS

Summary. The method of determining critical damping coefficient for complex structures has been presented in this paper. It has been compared to the energetic method. Numerical simulations for a chimney with multiple mass dampers have been performed.

1. Wstęp

Współczesne konstrukcje inżynierskie bardzo często projektowane są jako smukłe, coraz mniej sztywne (ze względów ekonomicznych), przez co podatne na działanie wiatru. W przypadku wielu istniejących konstrukcji, zmiana działających na nie obciążeń dynamicznych powoduje powstanie zbyt dużych amplitud drgań (wejście w strefę rezonansową). Także modernizacja obiektu, w wyniku której zachodzi np. zmiana charakterystyk materiałów, może spowodować zmniejszenie współczynnika tłumienia całej konstrukcji i co za tym idzie zwiększenie amplitud drgań przy nie zmienionych obciążeniach zewnętrznych. Często jedynym wyjściem z tej sytuacji staje się zastosowanie tłumików drgań.

W pracy tej zostaną przedstawione wyniki symulacji numerycznych konstrukcji prętowych z pojedynczymi (*TMD*) oraz wielokrotnymi (*MTMD*) masowymi tłumikami drgań. Celem pracy jest przedstawienie prostego sposobu wyznaczania ekwiwalentnego

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Andrzej Flaga

współczynnika tłumienia dla poszczególnych postaci drgań swobodnych układu konstrukcja-tłumiki. Zweryfikowano stosowanie metody energetycznej [1] do konstrukcji złożonych, w której na podstawie określania zmiany energii drgań wyznacza się współczynniki tłumienia.

2. Metoda energetyczna według Yamaguchi i Ito dla budowli złożonej z różnych elementów konstrukcyjnych

Model opisany przez Yamaguchi i Ito [1] jest stosowany do wyznaczania całkowitych współczynników tłumienia drgań budowli, składających się z różnych elementów konstrukcyjnych. Logarytmiczny dekrement tłumienia δ_i określany jest dla i-tej postaci drgań, tak jak dla układu o jednym stopniu swobody według wzoru:

$$\delta_i = \frac{D_i}{4\pi U_i}, \; D_i = \sum_{j=1}^{n} D_{ij}, \; U_i = \sum_{j=1}^{n} U_{ij}, \tag{1}$$

gdzie: D_i – dysypowana energia i-tej postaci drgań; U_i – całkowita energia potencjalna i-tej postaci; D_{ij} – udział energii dysypowanej j-tego materiału w konstrukcji (lub fragmencie konstrukcji) przy i-tej postaci drgań; U_{ij} – udział energii potencjalnej j-tego materiału w konstrukcji (lub fragmencie konstrukcji) przy i-tej postaci drgań.

Energia dysypowana dla fragmentu konstrukcji może być przedstawiona następująco:

$$D_{ij} = 2\pi\psi_j V_{ij}, \tag{2}$$

gdzie: ψ_j – współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego) dla danego materiału; V_{ij} – energia odkształcenia.

Wykorzystując bezwymiarowy współczynnik tłumienia krytycznego (liczba tłumienia) ξ_i, który powiązany jest następującymi zależnościami z pozostałymi wielkościami [2]:

$$\psi_i = 4\pi\xi_i, \; \delta_i = 2\pi\xi_i, \tag{3}$$

otrzymujemy ostateczną zależność na liczbę tłumienia ξ_i:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{V_{ij}}{U_i}, \; V_{ij} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\varphi}_i, \tag{4}$$

gdzie: $\boldsymbol{\varphi}_i$ – unormowany wektor własny i-tej postaci drgań; $\mathbf{K}_j$ – macierz sztywności j-tej części konstrukcji.

3. Metoda własna wyznaczania ekwiwalentnej liczby tłumienia dla budowli złożonej z różnych części konstrukcyjnych

3.1. Równania ruchu

Podstawowe macierzowe równanie ruchu :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{P}, \tag{5}$$

gdzie: **M**, **C**, **K** – odpowiednio diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności; **Q** – wektor przemieszczeń; **P** – wektor obciążeń.

Rozmiar macierzy **M**, **C**, **K** odpowiada dynamicznej liczbie stopni swobody układu. Macierze **M**, **C**, **K** mogą być przedstawione jako sumy macierzy dwóch podstruktur – konstrukcji głównej i tłumików. Równanie (5) przyjmie teraz postać:

$$(\mathbf{M}_k + \mathbf{M}_t)\ddot{\mathbf{Q}} + (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t)\dot{\mathbf{Q}} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_t)\mathbf{Q} = \mathbf{P}, \tag{6}$$

gdzie: $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{C}_k$, $\mathbf{K}_k$ – diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności dla konstrukcji głównej; $\mathbf{M}_t$, $\mathbf{C}_t$, $\mathbf{K}_t$ – diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności dla dodatkowo zainstalowanych *MTMD*.

Oznaczmy przez m liczbę dynamicznych stopni swobody układu podstawowego, a przez n liczbę dołączonych tłumików. Macierze $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{C}_k$, $\mathbf{K}_k$, $\mathbf{M}_t$, $\mathbf{C}_t$, $\mathbf{K}_t$ przestawione są poniżej:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{k;m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{t;n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k;m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k;m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathbf{K}_{k;m,m} = \sum_i^m \mathbf{A}^e{}_i k_{k,i} \mathbf{A}^e{}_i^T, \qquad \mathbf{C}_{k;m,m} = \sum_i^m \mathbf{A}^e{}_i c_{k,i} \mathbf{A}^e{}_i^T, \tag{8}$$

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k;m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{M}_{t;n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_t = \sum_i^n \mathbf{A}^t{}_i k_{t,i} \mathbf{A}^t{}_i^T, \quad \mathbf{C}_t = \sum_i^n \mathbf{A}^t{}_i c_{t,i} \mathbf{A}^t{}_i^T, \tag{9}$$

gdzie: $k_{k;i}$ – współczynnik macierzy sztywności elementu konstrukcji związany z i-tym stopniem swobody; $c_{k;i}$ – współczynnik macierzy tłuminia elementu konstrukcji związany z i-tym stopniem swobody; $k_{t;i}$ – oznacza sztywność i-tego tłumika; $c_{t;i}$ – oznacza tłumienie i-tego tłumika; $\mathbf{A}^e{}_i$, $\mathbf{A}^t{}_i$ – wektor połączeń (alokacji) dla elementów konstrukcji (tłumików).

Przy przyjęciu modelu tłumienia Rayleigha [3] macierz tłumienia konstrukcji głównej można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{C}_{k,m,m} = \alpha_R \mathbf{M}_{k,m,m} + \beta_R \mathbf{K}_{k,m,m}. \tag{10}$$

Zależność pomiędzy współczynnikami α_R, β_R i poszczególnymi częstościami kołowymi drgań ω_i oraz współczynnikiem tłumienia krytycznego ξ_i [4,5] przedstawia zależność:

$$2\xi_i = \frac{\alpha_R}{\omega_i} + \beta_R \omega_i . \tag{11}$$

3.2. Wyznaczenie ekwiwalentnego współczynnika tłumienia krytycznego dla konstrukcji z tłumikami wielokrotnymi

W wyniku numerycznego bezpośredniego całkowania równań ruchu otrzymujemy przebiegi czasowe przemieszczeń, prędkości, przyśpieszeń dla całej konstrukcji, które poddajemy następującej analizie:

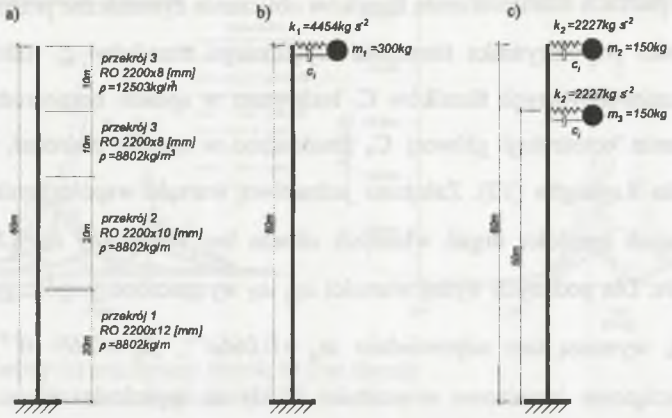
- analiza widmowa drgań, z której otrzymujemy częstotliwości drgań własnych konstrukcji złożonej;
- filtrowanie przebiegów za pomocą filtra wąskopasmowego, w wyniku czego otrzymuje się przebiegi przemieszczeń związanych z poszczególnymi postaciami drgań;
- wyodrębnienie z przebiegów amplitud tego samego znaku oraz dopasowanie krzywych $A_o e^{-ht}$ przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów. Współczynniki tłumienia h_i dla poszczególnych postaci drgań związane są zależnością (12) (por. [2]) z logarytmicznym dekrementem tłumienia δ_i oraz współczynnikiem tłumienia krytycznego ξ_i:

$$h_i = \frac{\delta_i}{\sqrt{4\pi^2 + \delta_i^2}} \omega_i , \quad h_i = \xi_i \omega_i . \tag{12}$$

4. Symulacja numeryczna

W rozważaniach przyjęto komin stalowy o wysokości 60 m, którego schemat przedstawiono na rys. 1a. Współczynniki δ_k=0.063, ξ_k=0.01 przyjęto na podstawie literatury [2,4]. Częstości drgań własnych komina wyznaczono za pomocą programów ABAQUS v.6.4 oraz KAM (por. [4]). Model MES składał się 25 elementów typu B21 (ABAQUS). Przyjęto do rozważań dwa przypadki rozmieszczenia tłumików:

- pojedynczy tłumik nastrojony na pierwszą częstość drgań własnych ω_1=3.872 rad/s umieszczony na wysokości 60 m o masie m_1=300kg (rys.1b);
- dwa tłumiki nastrojone na pierwszą częstość drgań własnych ω_1=3.872 rad/s umieszczone na wysokości 50 m i 60 m o masach m_2= m_3=150kg (rys.1c).



Rys. 1. Schemat geometryczny komina: a) bez tłumików; b) pojedynczy tłumik na wys. 60 m; c) z dwoma tłumikami na wysokościach 50 m i 60 m

Fig. 1. Chimney geometry scheme: a) without dampers; b) single damper at 60m; c) two dampers at 50 m, 60 m

Tablica 1 zawiera częstości drgań własnych układu podstawowego (bez tłumików), przypadku z jednym tłumikiem, gdzie otrzymano dwie bliskie siebie częstości drgań oraz przypadku z dwoma tłumikami, gdzie otrzymano trzy częstości o wartościach zbliżonych do pierwszej częstości drgań układu podstawowego ω_1=3.872 rad/s.

Tablica 1

Wartości częstości drgań własnych

Układ podstawowy – komin bez tłumików										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_i [rad/s]	3.8719	22.146	59.635	113.09	179.01	250.38	256.29	343.12		
f_i [Hz]	0.6162	3.5247	9.4912	17.999	28.491	39.848	40.789	54.610		
Przypadek 1 – pojedynczy tłumik, poziom 60 m										
ω_i [rad/s]	3.5261	4.2287	22.156	59.638	113.09	179.01	250.38	256.29	343.12	
f_i [Hz]	0.5612	0.6730	3.526	9.491	17.999	28.491	39.848	40.789	54.610	
Przypadek 2 – dwa tłumiki poziom 50 m, 60 m										
ω_i [rad/s]	3.5622	3.8528	4.1874	22.151	59.637	113.09	179.01	250.38	256.29	343.12
f_i [Hz]	0.5669	0.6132	0.6664	3.5255	9.4915	17.999	28.491	39.848	40.789	54.610

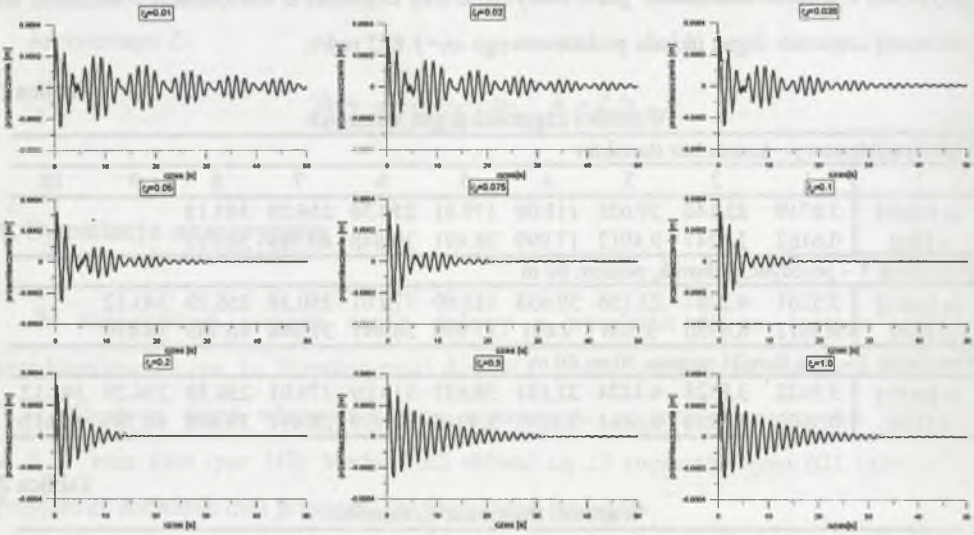
Tablica 2

Wartości tłumienia $c_{t,i}$ tłumika

Przypadek 1 – pojedynczy tłumik, poziom 60 m; m_1=300 kg									
ξ_{ti}	0.01	0.02	0.035	0.05	0.075	0.1	0.2	0.5	1.0
$c_{t,i}$(kg s^{-1})	23.120	46.240	80.919	115.599	173.398	231.198	462.396	1.156e3	2.312e3
Przypadek 2 – dwa tłumiki poziom 50 m, 60 m m_2=150 kg									
ξ_{ti}	0.01	0.02	0.035	0.05	0.075	0.1	0.2	0.5	1.0
$c_{t,i}$(kg s^{-1})	11.560	23.120	40.460	57.800	86.699	115.599	231.198	577.995	1.156e3

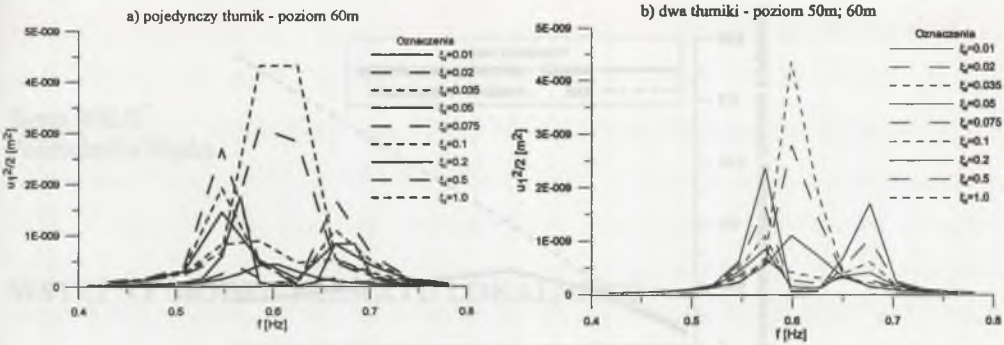
W obu przypadkach rozmieszczenia tłumików obliczenia dynamiczne przeprowadzono dla różnych wartości współczynnika tłumienia krytycznego tłumików ξ_{tl} (tabl. 2). Macierz tłumienia dla zainstalowanych tłumików $\mathbf{C}_t$ budowano w sposób bezpośredni według (9). Macierz tłumienia konstrukcji głównej $\mathbf{C}_k$ zbudowano w sposób pośredni, wykorzystując model tłumienia Rayleigha (10). Założono jednakową wartość współczynnika ξ_k=0.01 dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu bez tłumików: ω_1=3.872 rad/s oraz ω_2=22.146 rad/s. Dla podanych wyżej wartości ω_1, ω_2 wyznaczono współczynniki α_R, β_R z równania (11), wynoszą one odpowiednio $\alpha_R = 0.066s^{-1}$, $\beta_R = 7.69 \cdot 10^{-4} s$. Do układu przyłożono obciążenie impulsowe o wartości 10 kN na wysokości 60 m. Bezpośrednie całkowanie równań ruchu przeprowadzono programem `ABAQUS/Explicit v.6.4`

Na rys. 2 przedstawiono przykładowe przebiegi czasowe przemieszczeń dla przypadku pierwszego – pojedynczy tłumik, a na rys. 3 – gęstość widmową mocy dla obu przypadków. Dla wartości współczynnika tłumienia krytycznego tłumika ξ_t=0.01÷0.2 obserwujemy zwiększenie tłumienia efektywnego, a przy wartości ξ_t=0.5÷1.0 układ drga z jedną częstotliwością, z jednoczesnym zmniejszeniem tłumienia efektywnego.



Rys. 2. Przebiegi czasowe przemieszczeń na wysokości 60 m dla różnych wartości współczynnika ξ_t dla zainstalowanego pojedynczego tłumika

Fig. 2. Time histories of displacements at the hight 60 m for different values of coefficient ξ_t in the case of single damper



Rys. 3. Spektrum mocy: a) pojedynczy tłumik; b) dwa tłumiki
Fig. 3. Auto power spectrum: b) single damper; b) two dampers

Na podstawie rysunku 3 stwierdzono większe tłumienie w przypadku pierwszym – z pojedynczym tłumikiem. Potwierdzają to także wyznaczone współczynniki efektywnego tłumienia krytycznego ξ zestawione w tablicy 3.

Tablica 3

Tłumienie efektywne ξ w zależności od tłumienia własnego tłumika ξ_t

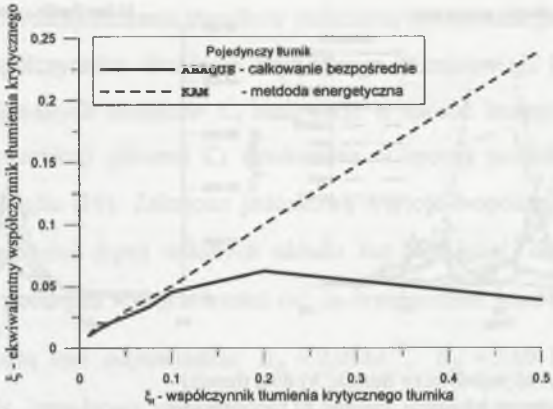
Przypadek 1 – pojedynczy tłumik									
ξ_t	0.01	0.02	0.035	0.05	0.075	0.1	0.2	0.5	1.0
f=0.561Hz	0.00858	0.01137	0.01616	0.02297	0.02833				
f=0.586Hz						0.04542	0.03869	0.03869	0.02753
f=0.673Hz	0.01024	0.01497	0.02102	0.02540	0.03314				
f=3.526Hz	0.00986	0.01002	0.00992	0.01000	0.01013	0.01008	0.01077	0.01296	0.01385
f=9.491Hz	0.00366	0.00367	0.00369	0.00372	0.00376	0.00367	0.00402	0.00459	0.00458
Przypadek 1 - dwa tłumiki									
ξ_t	0.01	0.02	0.035	0.05	0.075	0.1	0.2	0.5	1.0
f=0.567Hz	0.0081	0.0117	0.0164	0.0196	0.0261				
f=0.599Hz						0.0477	0.0246	0.0246	0.0169
f=0.666Hz	0.0092	0.0131	0.0178	0.0200	0.0303				
f=3.526Hz	0.0097	0.0100	0.0099	0.0099	0.0099	0.0100	0.0103	0.0113	0.0124
f=9.491Hz	0.0037	0.0037	0.0037	0.0037	0.0038	0.0037	0.0038	0.0041	0.0045

Dla przyjętych układów wykorzystano także metodę energetyczną [1] wyznaczania współczynnika ξ. Przykładowe wartości przedstawiono w tablicy 4. Z porównania obu metod (rys. 4) wynika, iż tylko w wąskim zakresie wartości współczynnika ξ_t (ξ_t <0.1) można stosować metodę energetyczną [1].

Tablica 4

Pojedynczy tłumik - tłumienie efektywne ξ w zależności od tłumienia własnego tłumika ξ_t dla f=0.561Hz

ξ_t	0.01	0.02	0.0350	0.0500	0.0750	0.1000	0.2	0.5	1
ABAQUS	0.0085	0.0113	0.0161	0.0229	0.0283	0.0454	0.0623	0.0386	0.0275
KAM - met. Energetyczna [1]	0.0100	0.0146	0.0216	0.0286	0.0402	0.0518	0.0982	0.2374	0.4694



Rys. 4. Współczynnik ξ – pojedynczy tłumik (f=0.561Hz)
Fig. 4. Coefficient ξ – single damper (f=0.561Hz)

5. Wnioski

Proponowana metoda wyznaczania ekwiwalentnego współczynnika tłumienia krytycznego pozwala na:

- badanie obiektów z zainstalowanymi tłumikami wielokrotnymi;
- optymalne nastrojenie tłumika (przyjęcie masy tłumika m_t, sztywności k_t, tłumienia ξ_t), na podstawie symulacji numerycznej;
- badanie rozłożenia masy tłumików po wysokości czy długości budowli;
- wykorzystanie wyznaczonych współczynników ξ do obliczeń metodą superpozycji modalnej.

W pracy zweryfikowano także metodę energetyczną [1], która może służyć wyznaczaniu ekwiwalentnego współczynnika tłumienia drgań, ale tylko dla tłumienia występującego w rzeczywistych konstrukcjach, tj. do poziomu około 10% tłumienia krytycznego.

LITERATURA

1. Yamaguchi H., Ito M.: *Mode-dependency of structural damping in cable-stayed bridges*, 9th International Conference on Wind Engineering, New Delhi, India (1995).
2. Dyląg Z. i inni: *Wytrzymałość materiałów*, tom 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
3. Flaga A.: *Praktyczne ujęcie tłumienia drgań budowli jako całości*, Zeszyt Naukowy Politechniki Krakowskiej, nr 6, 1979.
4. Rakowski G. i inni.: *Mechanika budowli: ujęcie komputerowe*, tom 2, Arkady, Warszawa 1992.
5. Hibbitt, Karsson & Sorensen, Inc.: *ABAQUS/Explicicit User's Manual*, Volume II,Version 6.3, 2002.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Mieczysław Kuczma