ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2005
Seria: BUDOWNICTWO z.104 Nr kol.1695

Agnieszka WINKLER*
Politechnika Śląska

OCENA WPŁYWU PERTURBACJI PARAMETRÓW ZADANIA BRZEGOWEGO NA ROZWIĄZANIE RÓWNANIA HELMHOLTZA

Streszczenie. Niniejszy artykuł jest prezentacją nowego systemu algebraicznego oraz jego aplikacji do teorii perturbacji cząstkowych równań różniczkowych. Nowa metoda zastosowana została do rozwiązania zadania brzegowego dla równania Helmholtza. Wprowadzone zostały zaburzenia parametrów równania oraz warunków początkowych i brzegowych. W nowym systemie klasyczne problemy perturbacyjne opisywane równaniami różniczkowymi mogą być rozwiązane w sposób tak prosty jak zwykłe równania różniczkowe stosowane w akustyce, matematyce czy technice. Nie są konieczne dodatkowe przekształcenia analityczne.

ESTIMATION OF PARAMETER PERTURBATIONS IN BOUNDARY PROBLEMS FOR HELMHOLTZ EQUATION

Summary. This paper presents applications of the new algebraic system in the theory of perturbed partial differential equations. New method is applied to solve boundary problems for Helmholtz equation. Perturbation of equation parameters as well as for initial and boundary conditions are considered. Classical perturbation problems described by differential equations are solved in the new algebraic system as easy as usual differential problems of applied acoustics, mathematics and techniques. Additional analytical transformations are not required.

1. Wprowadzenie

Teoria perturbacji po raz pierwszy pojawiła się w jednej z najstarszych dziedzin matematyki stosowanej - w mechanice nieba. W dzisiejszych czasach ma ona znacznie szersze zastosowanie, lecz główna idea pozostaje ta sama. Podstawą teorii perturbacji są publikacje Rellicha [7]. Rellich po raz pierwszy rozpatrzył zbieżność rozszerzenia szeregu w

*Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. Politechniki Śląskiej

teorii perturbacji. Obecnie teoria ta doczekała się olbrzymiej bibliografii, która ciągle budzi zainteresowanie, np. monografia Kato [5].

Pierwsze badania nad perturbacyjnym równaniem różniczkowym prowadził Keller i były one poświęcone równaniu Helmholtza, por. [1,3]. Równanie to stosowane jest między innymi do opisu zjawisk akustycznych, takich jak dyfrakcja, por. [4], a także do analizy pola akustycznego obszarów zamkniętych (por. [12]) czy bliskiego pola źródeł fali akustycznej.

Często znalezienie dokładnego rozwiązania zadania jest trudne. Wówczas łatwiej jest wykorzystać znane rozwiązanie zadania podobnego, a następnie, stosując teorię perturbacji, określić przybliżone rozwiązanie pierwotnego zadania. Teorię perturbacji stosuje się także w przypadkach, kiedy podstawowe zagadnienie fizyczne może zostać poddane zaburzeniom (perturbacjom). W takiej sytuacji ważne jest określenie wpływu małych perturbacji parametrów zadania na jego rozwiązanie.

W tym artykule zaprezentowana zostanie nowa metoda przedstawiona w formie analizy równania Helmholtza, w sytuacji kiedy zaburzone zostaną parametry tego równania oraz warunki początkowe i brzegowe.

2. Liczby perturbacyjne, moduł liczby perturbacyjnej

DEFINICJA 1 [8,9]. Zdefiniujemy liczbę zwaną dalej liczbą perturbacyjną jako parę uporządkowaną liczb rzeczywistych $(x,y)\in R^2$.Zbiór liczb perturbacyjnych będziemy oznaczać jako R_ε.

Niech $z,z_1,z_2\in R_\varepsilon$ oznaczają dowolne liczby perturbacyjne oraz $z=(x,y)$,$z_1:=(x_1,y_1)$, $z_2:=(x_2,y_2)$, $x_i,y_i\in R$, $i=1,2$. Powiemy, że dwie liczby perturbacyjne są równe: $z_1=z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$.

W zbiorze R_ε wprowadzone zostały działania dodawania $(+_\varepsilon)$ i mnożenia $(\bullet_\varepsilon)$ w następujący sposób:

$$z_1+_\varepsilon z_2:=(x_1+x_2,y_1+y_2) \tag{1}$$

$$z_1\bullet_\varepsilon z_2:=(x_1x_2,x_1y_2+x_2y_1) \tag{2}$$

TWIERDZENIE 1 [8,9]. Zbiór R_ε z działaniami dodawania $(+_\varepsilon)$ i mnożenia $(\bullet_\varepsilon)$ określonymi wzorami (1) i (2) oraz z wyróżnionymi elementami: zerowym $0_\varepsilon:=(0,0)$ oraz jedynkowym $1_\varepsilon:=(1,0)$ jest ciałem. Ciało to nazwiemy ciałem liczb perturbacyjnych.

W zbiorze R_ε zachowane są przemienność i łączność dodawania, a także przemienność i łączność mnożenia oraz prawo rozdzielności.

Określone powyżej ciało R_ε nie zawiera ciała liczb rzeczywistych R. Można jednak wykazać, że liczby rzeczywiste mogą być traktowane jako pewne elementy ciała R_ε, z zachowaniem działań algebraicznych oraz elementów neutralnych dodawania i mnożenia.

DEFINICJA 2 [8,9]. Przekształcenie $j:R\rightarrow R_\varepsilon$ nazwiemy zanurzeniem systemu algebraicznego liczb rzeczywistych R w systemie algebraicznym R_ε, gdy j(.) jest przekształceniem różnowartościowym oraz zachowuje odpowiadające sobie działania oraz elementy neutralne dodawania i mnożenia.

DEFINICJA 3 [8,9]. Modułem lub wartością bezwzględną liczby $z=a+\varepsilon b$ nazwiemy ε - liczbę $|z|_\varepsilon$ zdefiniowaną w następujący sposób:

$$|z|_\varepsilon := |a|+\varepsilon|b|. \tag{3}$$

Niech $D\subset R$ oraz $E\subset R_\varepsilon$ będą dowolnymi podzbiorami rzeczywistych oraz ε-rzeczywistych liczb. Przypuśćmy, że mamy funkcję f_ε , która przyporządkowuje każdemu elementowi $t\in D$ oraz $z\in E$ dokładnie jeden element r ze zbioru R_ε. Wówczas powiemy, że $f_\varepsilon:D\times E\rightarrow R_\varepsilon$ jest rozszerzeniem funkcji zdefiniowanej na $D\times E$ z wartościami ze zbioru R_ε, zapisanej jako $r=f_\varepsilon(t,z)$ lub prościej $w=\varepsilon\text{-}f(t,z)$.

W ten sam sposób można zdefiniować bardziej skomplikowane funkcje wielowymiarowe.

Własności liczb perturbacyjnych, pojęcia analizy perturbacyjnej, takie jak zbieżność, ciągłość itp. patrz [8,10,11].

3. Funkcje zmiennych perturbacyjnych i rzeczywistych

Niech $D\subset R$ i $E\subset R_\varepsilon$ będą dowolnymi podzbiorami zmiennej rzeczywistej i perturbacyjnej odpowiednio. Jeśli każdej parze elementów $t\in D$, $z\in E$ przyporządkujemy pewną liczbę perturbacyjną $r=f(t,z)$, to powiemy, że w zbiorze $D\times E$ została określona funkcja perturbacyjna $f_\varepsilon :D\times E \rightarrow R_\varepsilon$, zmiennych rzeczywistej i perturbacyjnej [8,10].

$$r = f_\varepsilon(t,z) \tag{4}$$

Niech $f_\varepsilon(t,z) = u+\varepsilon v$, przy czym u(.) i v(.) oznaczają funkcje o wartościach rzeczywistych zmiennej rzeczywistej t i zmiennej perturbacyjnej $z=x+\varepsilon y$ lub inaczej trzech zmiennych rzeczywistych t, x oraz y, co możemy zapisać

$$f_\varepsilon(t,z) = u(t,z) + \varepsilon v(t,z) = u(t,x,y) + \varepsilon v(t,x,y), \tag{5}$$

dlatego u(.) i v(.) będą oznaczane jak zwykłe funkcje rzeczywiste bez indeksu ε. Funkcje u(.) i v(.) nazwiemy odpowiednio częścią główną i częścią perturbacyjną funkcji $f_\varepsilon(.)$.

Można udowodnić, że jeżeli funkcja f(t,z) jest ciągła w punkcie $(t_0,z_0)=(t_0,x_0+\varepsilon y_0)$, to funkcje u(t,x,y) i v(t,x,y) są ciągłe w punkcie (t_0,x_0,y_0) i odwrotnie.

4. Różniczkowanie funkcji perturbacyjnych

Przyjmijmy funkcję $f_\varepsilon(t)$, $t\in D\subset R_\varepsilon$, będącą funkcją perturbacyjną zmiennej perturbacyjnej rzeczywistej.

DEFINICJA 4 [8,9]. Jeśli w punkcie $z_0\in D\subset R_\varepsilon$ istnieje granica (w sensie ε - zbieżności) ilorazu różnicowego

$$\frac{f_\varepsilon(z_0+\Delta z)-f_\varepsilon(z_0)}{\Delta z} \tag{6}$$

dla $\Delta z = \Delta x + \varepsilon\Delta y \xrightarrow{\varepsilon} 0_\varepsilon$, wówczas powiemy, że ε-funkcja $f_\varepsilon(z)$ jest ε-różniczkowalna (lub prościej różniczkowalna) w punkcie z_0. Granicę tę nazwiemy ε-różniczką funkcji f_ε w punkcie z_0 i zapiszemy jako

$$f_\varepsilon'(z_0) := \varepsilon - \lim_{\Delta z\to 0_\varepsilon} \frac{f_\varepsilon(z_0+\Delta z)-f_\varepsilon(z_0)}{\Delta z} \tag{7}$$

Definicję tę można uogólnić na różniczkowanie wyższych rzędów.

5. Perturbacyjne równanie różniczkowe zwyczajne

Perturbacyjnym równaniem różniczkowym zmiennej rzeczywistej nazwiemy równanie

$$\frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t)+f(t), \qquad t_0 \le t \le t_1, \quad y(t_0)=c\in R_\varepsilon^n \tag{8}$$

gdzie A(t), $t\in[t_0,t_1]$ jest macierzą o wymiarach nxn, której elementy są perturbacyjnymi rzeczywistymi funkcjami ciągłymi, por. [10].

Zauważmy, że ponieważ każdą macierz perturbacyjną **A** można przedstawić jako parę uporządkowaną dwóch macierzy liczbowych $(\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1)$, gdzie $\mathbf{A}_0,\mathbf{A}_1\in R^{nxm}$, więc zgodnie z

przyjętą uproszczoną notacją będziemy dalej pisać $A=A_0+\varepsilon A_1$. Podobnie $f=f_0+\varepsilon f_1$, $c=c_0+\varepsilon c_1$, $f,c\in R_\varepsilon^n$. Równanie (8) będzie często zapisywane w równoważnej postaci

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left(A_0(t)+\varepsilon A_1(t)\right)y(t)+f_0(t)+\varepsilon f_1(t),\qquad t_0\le t\le t_1,\quad y(t_0)=c=c_0+\varepsilon c_1 \tag{9}$$

Bez dowodów przedstawione zostaną niektóre właściwości perturbacyjnych równań różniczkowych.

Weźmy na początku pod uwagę jednorodne perturbacyjne równanie różniczkowe o postaci

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left(A_0(t)+\varepsilon A_1(t)\right)y(t),\qquad t_0\le t\le t_1,\quad y(t_0)=c=c_0+\varepsilon c_1 \tag{10}$$

TWIERDZENIE 2 [10]. Jeżeli macierz $A(t)$ jest macierzą perturbacyjną o wymiarach nxn, elementami której są ciągłe funkcje perturbacyjne określone na przedziale $[t_0,t_1]$, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $y(t)$ jednorodnego równania różniczkowego (9), które jest określone w przedziale $[t_0,t_1]$ i przyjmuje wartość c dla $t=t_0$.

TWIERDZENIE 3 [10]. Jeżeli macierz $A(t)$ jest macierzą perturbacyjną o wymiarach nxn, elementami której są ε-ciągłe funkcje perturbacyjne określone na przedziale $[t_0,t_1]$, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $y(t)$ niejednorodnego równania różniczkowego (8), które jest określone w przedziale $[t_0,t_1]$ i przyjmuje postać

$$y_\varepsilon(t)=\Phi_\varepsilon(t,t_0)c_\varepsilon+\int\Phi_\varepsilon(t,s)f_\varepsilon(s)ds \tag{11}$$

gdzie $\Phi_\varepsilon(t,t_0)$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$\frac{d\Phi_\varepsilon(t,t_0)}{dt}=A(t)\Phi_\varepsilon(t,t_0),\qquad \Phi_\varepsilon(t_0,t_0)=I_\varepsilon \tag{12}$$

UWAGA. Równania cząstkowe w dalszej części pracy będą rozumiane w opisanym powyżej sensie.

6. Równanie Helmholtza z perturbacyjnymi parametrami

Przyjmijmy obszar Ω_ε o brzegu Γ_ε. W obszarze tym znajdują się dwa ośrodki sprężyste o wielkościach charakterystycznych pierwszego: przemieszczenie u_ε, wymuszenie b_ε, przemieszczenie początkowe $u_{\varepsilon 0}$. Wielkości charakterystyczne drugiego obszaru zaznaczymy odpowiednio: u_ε^*, b_ε^*, $u_{\varepsilon 0}^*$.

Fala płaska rozchodząca się w ośrodku pierwszym dociera do granicy ośrodków, gdzie zostaje częściowo odbita, a częściowo przechodzi do ośrodka drugiego.

Wywołane falą poprzeczną drgania ustalone opiszemy równaniem Helmholtza o postaci:

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_2^2}+\frac{\omega^2}{c_\varepsilon^2}u_\varepsilon=-\frac{1}{c_\varepsilon^2}b_\varepsilon \tag{13}$$

gdzie: $x=(x_1,x_2)\in\Omega$, ω – częstość kątowa, c_ε – prędkość propagacji w ośrodku pierwszym, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x_1, x_2, t)$ – przemieszczenie, $b_\varepsilon = b_\varepsilon(x_1, x_2, t) = b_\varepsilon(x_1, x_2, \omega)\exp i\omega t$ – wymuszenie.

Dla ustalonego stanu przemieszczeń o częstości kątowej ω zapiszemy:

$$u_\varepsilon(x,t)=u_\varepsilon(x,\omega)e^{i\omega t}. \tag{14}$$

Analogiczne relacje opisują stan ustalony drgań w ośrodku drugim, w którym wszystkie wielkości występują z indeksem (*).

6.1. Warunki brzegowe

Przykłady warunków brzegowych dla omawianego zadania stanowią:

- wewnętrzny problem Dirichleta polegający na znalezieniu funkcji harmonicznej $u_\varepsilon(x, t)$ w obszarze Ω_ε ograniczonym brzegiem Γ_ε i ciągłej w $\Omega_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$. Funkcja ta jest z góry znana na brzegu

$$u_\varepsilon(x,t)=f_\varepsilon(x),\ x\in\Gamma_\varepsilon \tag{15}$$

- wewnętrzny problem Neumanna polegający na znalezieniu funkcji harmonicznej $u_\varepsilon(x, t)$ w obszarze Ω_ε ograniczonym brzegiem Γ_ε i ciągłej w $\Omega_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$. Pochodna normalna funkcji jest z góry znana na brzegu

$$\left.\frac{\partial u_\varepsilon(x,t)}{\partial n}\right|_{\Gamma_\varepsilon}=g_\varepsilon(x),\ x\in\Gamma_\varepsilon \tag{16}$$

gdzie f_ε i g_ε są znanymi funkcjami określonymi na brzegu.

6.2. Rozwiązanie fundamentalne perturbacyjnego równania Helmholtza

Rozwiązanie fundamentalne perturbacyjnego równania Helmholtza definiujemy jako:

$$\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2^2}+\frac{\omega^2}{c_2^2}u_3^*=-\frac{1}{\mu}\delta_\varepsilon(x-\xi) \tag{17}$$

dla wymuszenia o zmienności czasowej $\exp[i\omega t]$ przyłożonego w punkcie „i" o współrzędnych ξ:

$$\rho b_3^*=\delta(x-\xi) \tag{18}$$

Można wykazać, że rozwiązanie to przyjmuje postać:

$$u_3^* = \frac{1}{2\pi\pi} K_0\left(i\frac{\omega r}{c_2}\right) \tag{19}$$

gdzie K_0 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju zerowego rzędu oraz $r = |x - \xi|$.

Nowa metoda matematyczna zastosowana została do klasycznych zadań akustyki, wykorzystujących równania różniczkowe. Zalety tej metody zaprezentowano na przykładzie obliczeń analitycznych oraz obliczeń komputerowych. Specjalne procedury numeryczne uwzględniają zaburzenia parametrów równania oraz warunków początkowych i brzegowych.

WNIOSKI

Obliczenia prowadzone przy zastosowaniu nowej metody perturbacyjnego rachunku różniczkowego są równoważne klasycznym metodom perturbacyjnym I rzędu. Zalety nowego systemu algebraicznego są następujące:

- można pominąć skomplikowane obliczenia analityczne, które są typowe dla rozszerzeń aproksymacji wartości rozwiązania dla nieskończonych szeregów. Sprowadza się to do rozszerzenia wartości rozwiązania tak jak rozszerzenia perturbacyjnych parametrów zadania;
- uproszczenie wszystkich obliczeń analizy matematycznej, które pojawiają się w analitycznym sformułowaniu danego zadania;
- większość znanych klasycznych wyników teorii równań różniczkowych może być w prosty sposób adaptowana do nowego systemu obliczeniowego bez większych różnic.

Nowy system algebraiczny daje nam cały zestaw bardzo prostych i użytecznych narzędzi matematycznych, które w prosty sposób mogą być zastosowane zarówno w obliczeniach analitycznych, jak i komputerowych perturbacyjnych zadań różniczkowych.

Przedstawiony przykład pokazuje prostotę aplikacji sformułowania perturbacyjnego do rozwiązania klasycznego zadania brzegowego dla równania Helmholtza, które poddane jest perturbacjom współczynników oraz warunków początkowych i brzegowych.

LITERATURA

1. Dence D., Spence J.E.: Wave Propagation in Random Anisotropic Media, in Probabilistic methods in Applied Mathematics Vol. 3, ed. Bharucha-Reid A.T., Academic Press, New York and London 1973, 122-182.
2. Dominguez J.: Boundary Elements in Dynamics, Computational Mechanics Publications Southampton, Boston & Elsevier Applied Science, London, New York 1993.
3. Frisch U. Wave Propagation in Random Media, in Probabilistic methods in Applied Mathematics Vol. 1, ed. Bharucha-Reid A.T., Academic Press, New York and London 1968, 76-198.
4. Janczur R.: Teoretyczne i modelowe badanie pola akustycznego wywołanego źródłem punktowym w obecności powierzchni odbijających i ekranu, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa 1990.
5. Kato T.: Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1966.
6. Murdock J. A.: Perturbations - Theory and Methods, SIAM, J.Wiley & Sons, Inc., New York 1999.
7. Rellich F.: Störumgstheory der Spektralzerlegung, I, Math. Ann., 113, 600-619, 1936.
8. Skrzypczyk, J.: Perturbation methods - New arithmetic. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., ser. Budownictwo, Gliwice 2003.
9. Skrzypczyk J.: Perturbation Methods I - Algebra, Functions, Linear Equations, Eigenvalue Problems: New Algebraic Methodology, Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 2004, Faculty of Civil Engineering SUT Bratysława, Slovakia, pp. 55-58.
10. Skrzypczyk J.: Perturbation Methods – New Algebraic Methodology, Proc. of CMM – 2005, Comp. Methods in Mechanics, Częstochowa, June 21 – 24 2005, Poland.
11. Skrzypczyk J., Winkler A.: Perturbation Methods II – Differentation, Integration and Elements of Functional Analysis with Applications to Perturbed Wave Equations, Proc. of International Conference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, October 2004, Faculty of Civil Engineering SUT Bratysława, Slovakia, pp. 147-150.
12. Wyrzykowski R. i in.: Wybrane zagadnienia z teorii pola akustycznego, Wydawnictwo Oświatowe FOSZE, Rzeszów 1994.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bohdan Mochnacki