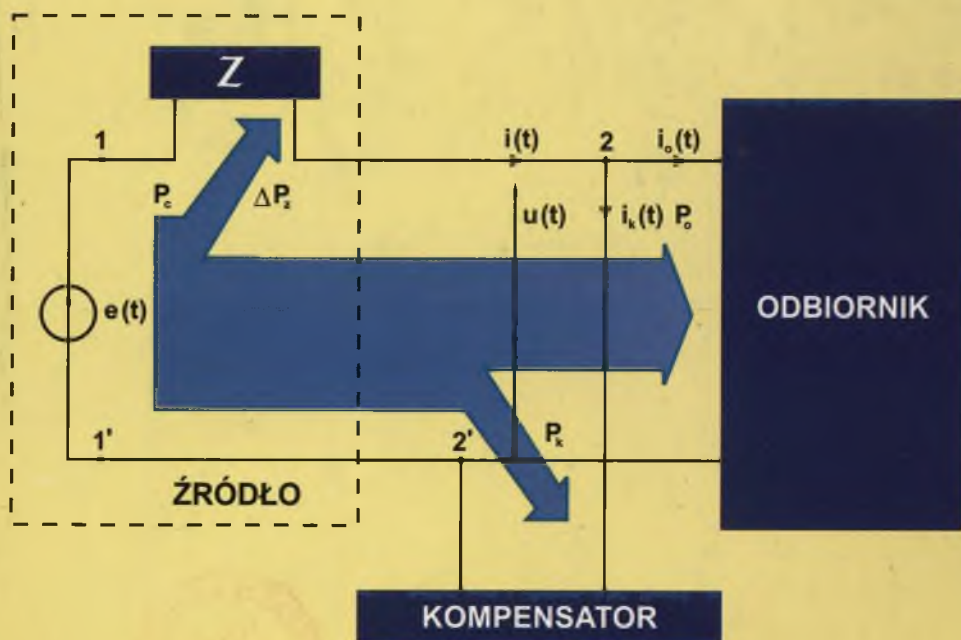


OPTIMALIZACJA ENERGETYCZNO - JAKOŚCIOWYCH WŁAŚCIWOŚCI OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH Z PRZEBIEGAMI OKRESOWYMI NIESINUSOIDALNYMI



MARIAN PASKO JANUSZ WALCZAK
MONOGRAFIA

ELEKTRYKA
Gliwice 1996

z. 150

P-3347/96

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 1322



P 3347/96

Marian PASKO, Janusz WALCZAK

**OPTYMALIZACJA
ENERGETYCZNO-JAKOŚCIOWYCH
WŁAŚCIWOŚCI
OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH
Z PRZEBIEGAMI OKRESOWYMI
NIESINUSOIDALNYMI**

GLIWICE 1996

OPINIODAWCY

Prof. dr Stanisław Bolkowski

Dr hab. Maciej Siwczyński – Profesor Politechniki Krakowskiej

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY – Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU – Doc. dr inż. Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI – Mgr Elżbieta Leško

REDAKCJA

Mgr Aleksandra Kłobuszowska

REDAKCJA TECHNICZNA

Alicja Nowacka

Wydano za zgodą

Rektora Politechniki Śląskiej

Publikacja dofinansowana
przez Komitet Badań Naukowych

PL ISSN 0072-4688

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakład 150+53 egz. Ark. wyd. 14. Ark. druk. 12,625. Papier offset. kl. III 70x100, 80g
Podpisano i oddano do druku 17.06.1996 r. Druk ukończono w lipcu 1996 r.
Zam. 29/96 Cena zł 14,00

Fotokopie, druk i oprawę wykonano w UKiP sc, Gliwice, ul. Pszczyńska 44

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA	5
1. WPROWADZENIE.....	7
1.1. Moce w obwodach z przebiegami sinusoidalnymi	8
1.2. Moce w obwodach z przebiegami niesinusoidalnymi	9
1.2.1. Koncepcja C.I. Budeanu	10
1.2.2. Koncepcja S. Fryzego	12
1.3. Idea koncepcji optymalizacyjnej.....	15
2. ZASTOSOWANIE ANALIZY FUNKCJONALNEJ W OPTYMALIZACJI OBWODÓW	18
2.1. Przestrzenie Hilberta przebiegów okresowych.....	18
2.2. Wskaźnik jakości	24
2.3. Algorytm rozwiązywania problemów optymalizacji.....	25
2.4. Charakterystyka rozpatrywanych modeli układów.....	26
3. OPTYMALIZACJA WARUNKÓW PRACY OBWODÓW JEDNOFAZOWYCH.....	29
3.1. Obwody z idealnymi źródłami napięcia.....	29
3.2. Obwody z rzeczywistymi źródłami napięcia	40
4. OPTYMALIZACJA WARUNKÓW PRACY OBWODÓW WIELOFAZOWYCH.....	56
4.1. Obwody ze źródłami idealnymi	57
4.2. Obwody ze źródłami rzeczywistymi.....	72
4.3. Optymalizacja pewnych klas obwodów złożonych.....	83
5. WYBRANE METODY REALIZACJI OPTYMALNYCH STANÓW PRACY OBWODÓW	102
5.1. Idea metody modyfikacji obwodów.....	103
5.2. Synteza dwójników aktywnych.....	110
5.3. Synteza dwójników LC.....	121
5.3.1. Interpolacyjna metoda syntezy.....	122
5.3.2. Metoda dekompozycji	139
5.4. Suboptymalna synteza dwójników LC	147
6. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA METOD OPTYMALIZACJI I MODYFIKACJI.....	153
ANEKS A. WYBRANE UOGÓLNIENIA TEORII MOCY OBWODÓW Z PRZEBIEGAMI NIESINUSOIDALNYMI.....	173
ANEKS B. UOGÓLNIONY WSKAŹNIK JAKOŚCI	184
LITERATURA	190
STRESZCZENIE.....	198

CONTENTS

PREFACE.....	5
1. INTRODUCTION.....	7
1.1. Powers in the sinusoidal systems.....	8
1.2. Powers in the nonsinusoidal systems.....	9
1.2.1. C.I. Budeanu conception.....	10
1.2.2. S. Fryze conception.....	12
1.3. The idea of optimization conception.....	15
2. APPLICATION OF FUNCTIONAL ANALYSIS TO CIRCUITS OPTIMIZATION.....	18
2.1. Hilbert spaces of periodical waveforms.....	18
2.2. The function of goal.....	24
2.3. The algorithm of solving of optimization problems.....	25
2.4. Description of the considered models of systems.....	26
3. OPTIMIZATION OF OPERATING CONDITIONS OF ONE-PHASE CIRCUITS.....	29
3.1. Circuits with ideal voltage sources.....	29
3.2. Circuits with non-ideal voltage sources.....	40
4. OPTIMIZATION OF OPERATING CONDITIONS OF MULTI-PHASE CIRCUITS.....	56
4.1. Circuits with ideal sources.....	57
4.2. Circuits with non-ideal sources.....	72
4.3. Optimization of certain classes of complex circuits.....	83
5. SOME REALIZATION METHODS OF OPTIMAL OPERATING POINTS OF CIRCUITS.....	102
5.1. The idea of circuits modification.....	103
5.2. The synthesis of active one-ports.....	110
5.3. The synthesis of LC one-ports.....	121
5.3.1. The interpolation method of synthesis.....	122
5.3.2. The method of decomposition.....	139
5.4 The synthesis of LC one-ports by suboptimization methods.....	147
6. EXAMPLES OF APPLICATION OF OPTIMIZATION AND MODIFICATION METHODS.....	153
APPENDIX A. CHOSEN GENERALIZATIONS OF POWER THEORY OF NONSINUSOIDAL SYSTEMS.....	173
APPENDIX B. GENERALIZED FUNCTION OF GOAL.....	184
REFERENCES.....	190
SUMMARY.....	198

PRZEDMOWA

Analiza i interpretacja właściwości energetycznych obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi zalicza się do ważnych, w pełni nie rozwiązanych i kontrowersyjnych zagadnień teorii obwodów. Prace nad tymi zagadnieniami prowadzone są na świecie od lat dwudziestych. Na Politechnice Śląskiej prace te zainicjował i prowadził od 1946 roku profesor Stanisław Fryze i wielu jego współpracowników. Monografia stanowi kontynuację tych prac i pokazuje, jak wiele idei wprowadzonych przez S. Fryzego zostało zaakceptowanych i uogólnionych poprzez stosowanie metod optymalizacyjnych.

Celem monografii jest wprowadzenie Czytelnika w krąg zagadnień dotyczących poprawy efektywności wykorzystania źródeł w obwodach bazujących na metodach optymalizacyjnych i interpolacyjnych metodach syntezy układów SLS.

Autorzy wyrażają nadzieję, że monografia przyczyni się do wzrostu zainteresowania teorią mocy i analizą zagadnień energetyczno-jakościowych w obwodach z przebiegami niesinusoidalnymi i będzie przydatna dla studentów wyższych szkół technicznych, inżynierów i doktorantów.

Autorzy wyrażają podziękowania obu Recenzentom prof. zw. dr inż. Stanisławowi Bolkowskiemu z Politechniki Warszawskiej i dr hab.inż. Maciejowi Siwczyńskiemu profesorowi Politechniki Krakowskiej za trud recenzji oraz wiele cennych uwag wniesionych do monografii.

Słowa podziękowania składamy redaktorowi działowemu Pani doc. dr inż. Zofii Cichowskiej oraz pracownikom Wydawnictwa Politechniki Śląskiej, dzięki którym monografia otrzymała doskonałą oprawę edytorską.

Na koniec pragniemy podziękować także Pani mgr Renacie Frączek oraz Panu Andrzejowi Wierzbickiemu za staranne przygotowanie tekstu do druku.

Gliwice, styczeń 1996 r.

Marian Pasko

Janusz Walczak

1. WPROWADZENIE

Optymalizacja przesyłu energii w obwodach elektrycznych może być rozpatrywana z punktu widzenia wielu różnych kryteriów. Do najważniejszych z nich zaliczyć można:

- minimalizację strat mocy czynnej w elementach pośredniczących pomiędzy źródłami a odbiornikami energii występującymi w obwodach,
- optymalizację kształtu przebiegów prądów i napięć,
- optymalizację warunków pracy wybranych elementów obwodów, a w szczególności źródeł i odbiorników.

Z uwagi na różnorodność kształtów przebiegów występujących w obwodach, złożoność opisu modeli elementów obwodów oraz złożoność struktur tych obwodów, formalizacja problemów optymalizacji warunków przesyłu energii jest zagadnieniem trudnym i na ogół niejednoznacznym. Konstrukcję wskaźników jakości (funkcji celu) utrudnia dodatkowo niejednoznaczność pojęcia „optymalnego kształtu przebiegu”, jak i duże rozbieżności dotyczące sposobów opisu (oraz ich interpretacji) właściwości energetycznych obwodów.

Jednoznaczny wybór optymalnego kształtu przebiegów jest możliwy dla obwodów z przebiegami okresowymi i niesinusoidalnymi, które stanowią modele układów elektroenergetycznych. W tym przypadku przez przebiegi o optymalnym kształcie rozumie się przebiegi sinusoidalne.

Opis właściwości energetycznych obwodów przeprowadza się z wykorzystaniem wartości skutecznych przebiegów oraz wielu pojęć mocy. Dla obwodów z przebiegami sinusoidalnymi opis ten jest w pełni jednoznaczny i nie budzi żadnych zastrzeżeń, w przeciwieństwie do obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi.

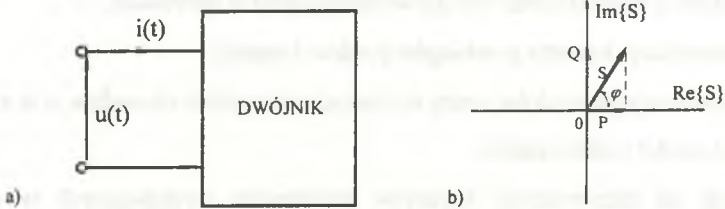
1.1. Moce w obwodach z przebiegami sinusoidalnymi

Dla dwójnika przedstawionego na rys.1.1 i opisanego parą przebiegów sinusoidalnych:

$$u(t) = \sqrt{2}|U|\cos(\omega t + \alpha) \quad (1.1)$$

$$i(t) = \sqrt{2}|I|\cos(\omega t + \beta) \quad (1.2)$$

gdzie: $|U|$, $|I|$ - wartości skuteczne napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$,



Rys.1.1. Element dwuzaciskowy

Fig.1.1. Two-terminal element

definiuje się następujące moce:

- chwilową $p(t)$

$$p(t) = u(t)i(t) = P[1 + \cos 2(\omega t + \alpha)] + Q \sin 2(\omega t + \alpha), \quad (1.3)$$

- czynną P

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = |U||I| \cos \varphi, \quad \varphi = \alpha - \beta, \quad (1.4)$$

- bierną Q

$$Q = |U||I| \sin \varphi, \quad (1.5)$$

- pozorną zespoloną S

$$S = P + jQ, \quad (1.6)$$

- pozorną $|S|$

$$|S| = |U||I| = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (1.7)$$

oraz współczynnik mocy λ :

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{|S|}. \quad (1.8)$$

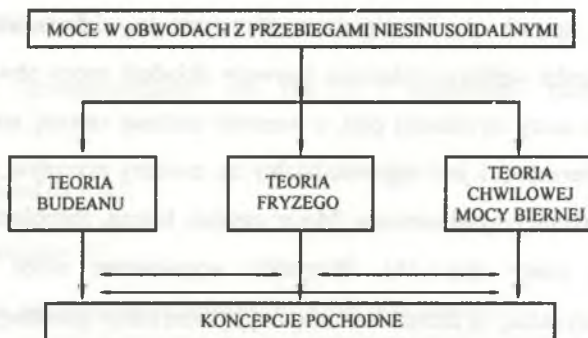
W podobny sposób określa się moce dla elementu wielozaciskowego. Na moc czynną P dwójnika wpływa wyłącznie pierwszy składnik mocy chwilowej $p(t)$ (1.3). Drugi składnik mocy chwilowej $p(t)$, o wartości średniej równej zeru, ma amplitudę równą mocy biernej Q i jest odpowiedzialny za zwrotny przepływ energii pomiędzy elementami reaktancyjnymi obwodu. Moce: czynna, bierna, zespolona pozorna tworzą znany trójkąt mocy (rys.1.1b). Wszystkie wymienione moce mają poprawną interpretację fizykalną, są zachowawcze (z wyjątkiem mocy pozornej $|S|$) i mogą być wykorzystywane w bilansach energetycznych obwodów. Moce te oraz współczynnik mocy λ stanowią kryteria oceny energetycznych warunków pracy obwodów z przebiegami sinusoidalnymi.

1.2. Moce w obwodach z przebiegami niesinusoidalnymi

Opis właściwości energetycznych obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi stanowi jeden z najbardziej kontrowersyjnych problemów elektrotechniki. Istnieje sporo wielkości, którym przypisuje się nazwy mocy, określając ogólnie mocami „nieczynnymi”. Kontrowersyjne, a nawet sprzeczne interpretacje fizykalne tych mocy, które (najczęściej) nie spełniają zasad bilansu mocy, stanowią podstawową przyczynę uniemożliwiającą ich akceptację w elektrotechnice, jak i w jej zastosowaniach [25, 26, 30, 32, 36].

Dla obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi istnieją trzy podstawowe koncepcje opisu właściwości energetycznych obwodów (rys.1.2) oraz szereg wzajemnie przenikających się koncepcji pochodnych.

Koncepcje mocy bazujące na teoriach C.I. Budeanu [14] i S. Fryzego [38, 39] dotyczą obwodów z przebiegami okresowymi i niesinusoidalnymi, które najczęściej występują w praktyce. Koncepcje mocy wykorzystujące pojęcie „chwilowej mocy biernej” [2, 27, 67, 92] dotyczą najczęściej obwodów z przebiegami nieokresowymi. Wybrane uogólnienia teorii C.I. Budeanu, S. Fryzego oraz ich pochodne zostały omówione w aneksie A.



Rys.1.2. Klasyfikacja koncepcji źródłowych w teorii mocy

Fig.1.2. Classification of original conception in the power theory

1.2.1. Koncepcja Budeanu

Dla dwójnika z rys.1.1, opisanego parą $(u(t), i(t))$ T -okresowych przebiegów niesinusoidalnych, wyrażanych w postaci szeregów Fouriera

$$u(t) = U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (1.9)$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} I_h \exp(jh\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.10)$$

gdzie:

$U_h, I_h, h \in \mathbb{N}$ - wartości zespolone skuteczne h -tej harmonicznej napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$,

ω_0 - pulsacja pierwszej harmonicznej.

C.I. Budeanu [14] zdefiniował w 1927 r. moc czynną P i bierną ${}_B Q$ jako superpozycję mocy czynnych i biernych wszystkich harmonicznych przebiegów $u(t)$, $i(t)$:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{h=1}^{\infty} |U_h| |I_h| \cos \varphi_h, \quad (1.11)$$

$${}_B Q = \sum_{h=1}^{\infty} |U_h| |I_h| \sin \varphi_h. \quad (1.12)$$

W przeciwieństwie do układów z przebiegami sinusoidalnymi, dla wymienionych mocy zachodzi nierówność (por. wzór(1.7))

$$P^2 + {}_B Q^2 \leq |S|^2, \quad (1.13)$$

gdzie: $|S|$ - moc pozorna określona wzorem ¹⁾

$$|S| = \|u\|_{L_T^2} \|i\|_{L_T^2} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} |U_h|^2 \sum_{h=0}^{\infty} |I_h|^2}. \quad (1.14)$$

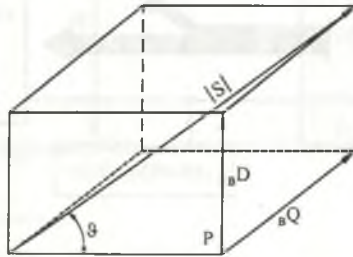
W celu uzupełnienia nierówności (1.13) C.I. Budeanu wprowadził nową wielkość ${}_B D$, nazywaną mocą deformacji, tak by:

$$P^2 + {}_B Q^2 + {}_B D^2 = |S|^2, \quad (1.15)$$

dzięki czemu moce P , ${}_B Q$, ${}_B D$, $|S|$ tworzą dobrze znany prostopadłościan mocy (rys.1.3), a wielkość λ :

$$\lambda = \frac{P}{|S|} = \cos \vartheta, \quad (1.16)$$

nosi nazwę współczynnika mocy.



Rys.1.3. Prostopadłościan mocy w sensie Budeanu

Fig.1.3. A rectangular of power in the sense of Budeanu

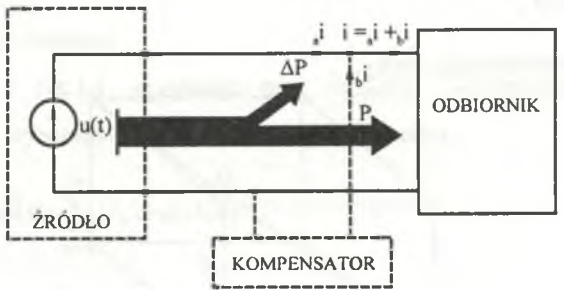
Niestety, wprowadzone przez C.I. Budeanu: moc bierna ${}_B Q$ i moc deformacji ${}_B D$ nie mają poprawnej interpretacji fizycznej [24]. Moc bierna ${}_B Q$ nie jest miarą zwrotnego przepływu energii pomiędzy elementami reaktancyjnymi obwodów, a moc deformacji ${}_B D$ nie określa zniekształceń przebiegów w obwodach, z uwagi na fakt niezdefiniowania przez C.I. Budeanu pojęcia „zniekształcenia” przebiegów. Jediną formalną zaletą mocy biernej ${}_B Q$ jest zachowawczość, która niewątpliwie wpłynęła na szerokie jej rozpowszechnienie. Teoria mocy Budeanu coraz częściej jest przyjmowana sceptycznie, co stało się przyczyną rozwoju innych kierunków teorii mocy.

¹⁾ Symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę sygnału (napięcia, prądu). Celowość stosowania takich oznaczeń, stosowanych w analizie funkcjonalnej, uzasadniono w rozdz.2.

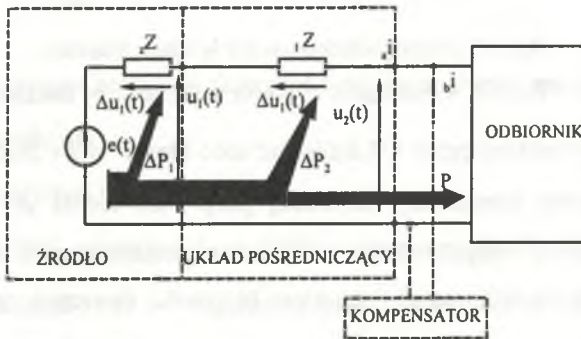
1.2.2. Koncepcja Fryzego

Zaproponowana przez S. Fryzego (1931 r.) teoria mocy dotyczyła elementarnego obwodu (rys.1.4a) złożonego z idealnego źródła napięcia i odbiornika.

Przyjęty przez S. Fryzego model obwodu (rys.1.4a) jest wyidealizowany, ponieważ zarówno źródło, jak i układ pośredniczący w przesyle energii mają niezerowe impedancje zZ , γZ (rys.1.4b). Przyjmując, że wpływ impedancji zZ , γZ uwidacznia się wyłącznie w stratach mocy czynnej przenoszonej ze źródła do odbiornika, natomiast napięcia na tych impedancjach są pomijalnie małe w stosunku do napięcia źródła, układy przedstawione na rys.1.4a i 1.4b stają się równoważne.



a)



b)

Rys.1.4. Model S.Fryzego układu zasilania

Fig.1.4. Fryze's model of supply system

Myślą przewodnią teorii S. Fryzego był taki rozkład całkowitego prądu źródła (rys.1.4a), by zawierał on składnik pożądany (w zadanym sensie) oraz składnik niepożądany, który należy eliminować z prądu źródła. Według S. Fryzego, składnik

pożądany prądu źródła to taki prąd, który ma minimalną wartość skuteczną i umożliwia przy tym doprowadzenie zadanej mocy czynnej P (rys.1.4a) ze źródła do odbiornika. Składnik ten nazywany jest prądem aktywnym a_i w sensie S. Fryzego. Jeżeli źródło wydaje prąd aktywny, to straty mocy czynnej na impedancjach źródła i układu pośredniczącego (rys.1.4b) są minimalne, a zatem sprawność energetyczna tego źródła jest największa. Eliminację zbędnego składnika b_i prądu źródła zapewnia dowolne (często energoelektroniczne) źródło ładunku, nazywane kompensatorem. Kompensator ten dostarcza w przeciwfazie prąd b_i do węzła pomiędzy źródłem i odbiornikiem (rys.1.4). Algorytm postępowania S. Fryzego składał się z opisanych poniżej etapów:

1. Aksjomatyczne określenie prądu aktywnego a_i źródła:

$$a_i(t) = eG u(t), \quad (1.17)$$

gdzie:

eG - konduktancja zastępcza źródła, określona wzorem:

$$eG = \frac{P}{\|u\|_{L_T^2}} = \frac{P}{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}, \quad (1.18)$$

P - moc czynna doprowadzana do odbiornika,

u - napięcie źródła.

Prąd aktywny a_i przenosi moc czynną P , gdyż²⁾:

$$(u, a_i)_{L_T^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) a_i(t) dt = P. \quad (1.19)$$

2. Dekompozycja całkowitego prądu źródła na składnik aktywny a_i oraz składnik niepożądany b_i :

$$i(t) = a_i(t) + b_i(t). \quad (1.20)$$

²⁾ Symbol (\cdot, \cdot) oznacza iloczyn skalarny sygnałów, por. rozdział 2.

3. Dowód wzajemnej ortogonalności napięcia u źródła oraz prądu b_i :

$$\begin{aligned} (u, b_i)_{L_T^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) b_i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) [i(t) - a_i(t)] dt = \\ &= P - \frac{1}{T} \int_0^T u(t) a_i(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

pozwalający stwierdzić, że prąd b_i nie przenosi mocy czynnej ze źródła do odbiornika.

4. Dowód wzajemnej ortogonalności prądów a_i, b_i :

$$(a_i, b_i)_{L_T^2} = \frac{1}{T} \int_0^T a_i(t) b_i(t) dt = e_G \frac{1}{T} \int_0^T u(t) b_i(t) dt = 0. \quad (1.22)$$

5. Definiowanie mocy:

Ze wzoru (1.22) wynika, że:

$$\|i\|_{L_T^2}^2 = \|a_i + b_i\|_{L_T^2}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [a_i(t) + b_i(t)]^2 dt = \|a_i\|_{L_T^2}^2 + \|b_i\|_{L_T^2}^2, \quad (1.23)$$

i stąd:

$$|S|^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|i\|_{L_T^2}^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 (\|a_i\|_{L_T^2}^2 + \|b_i\|_{L_T^2}^2) = \|u\|_{L_T^2}^2 \|a_i\|_{L_T^2}^2 + \|u\|_{L_T^2}^2 \|b_i\|_{L_T^2}^2 = P^2 + {}_F Q^2. \quad (1.24)$$

Moc ${}_F Q$ określona wzorem:

$${}_F Q^2 = \left(\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt \right) \left(\frac{1}{T} \int_0^T b_i^2(t) dt \right), \quad (1.25)$$

nosi nazwę mocy biernej S. Fryzego i spełnia zależność (por. wzór (1.15)):

$${}_F Q^2 = {}_B Q^2 + {}_D^2. \quad (1.26)$$

■

S. Fryze interpretował moc ${}_F Q$ jako miarę niepożądanego prądu b_i , rezygnując z nadania tej mocy bardziej szczegółowej interpretacji fizycznej.

Z przedstawionych rozważań wynika, że:

- definicja mocy biernej ${}_F Q$ jest efektem wtórnym i podrzędnym w stosunku do dekompozycji prądu źródła,

- idea rozkładu prądu źródła na składnik pożądaný (aktywny) i niepożądaný umożliwia łatwą eliminację składnika niepożądanego (prądu i_i) bez potrzeby jego interpretacji, co jest szczególnie istotne w sytuacji, gdy brak jest metod poprawnej interpretacji tego składnika,
- przedstawiona koncepcja (w przeciwieństwie do koncepcji C.I. Budeanu) nie wymaga stosowania metod analizy częstotliwościowej.

Koncepcja S. Fryzego ma również wiele wad:

- obowiązuje ona dla obwodu z przebiegami okresowymi i niesinusoidalnymi, złożonego z idealnego źródła napięcia i odbiornika (rys.1.4a), a zatem nie została ona sprecyzowana dla obwodów złożonych i innych klas przebiegów,
- nie umożliwia oceny kształtu przebiegów,
- moc bierna P_Q jest niezachowawcza.

Teoria mocy S. Fryzego została uogólniona na układy wielofazowe [38] (stanowiące analogony obwodu z rys.1.4a) i mimo jej wad jest szeroko rozpowszechniona na świecie.

1.3. Idea koncepcji optymalizacyjnej

Wprowadzone przez C.I. Budeanu i S. Fryzego koncepcje opisu właściwości energetycznych obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi oraz ich uogólnienia (por. Aneks A) mają następujące cechy wspólne:

- wprowadzone definicje mocy nie mają jednoznacznej interpretacji fizycznej związanej z wymianą, magazynowaniem i dyssypacją energii w obwodach z przebiegami niesinusoidalnymi,
- moce te są uzależnione od struktury obwodów i klasy przebiegów w nich występujących,
- wprowadzone moce nie są z reguły zachowawcze, nie mogą być więc wykorzystane do bilansów energetycznych obwodów,
- w żadnej z wprowadzonych teorii mocy nie precyzuje się odkształcenia przebiegów, co stanowi niewątpliwie wadę tych teorii.

Wynika stąd, że brak jest ogólnie akceptowanych pojęć mocy „nieczynnych”, które mogłyby być wykorzystane do opisu właściwości energetycznych obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi. Istnieje również pogląd, że prawidłowe zdefiniowanie pojęcia mocy biernej dla takich obwodów jest niemożliwe oraz że nie istnieje poprawna koncepcja sposobu zdefiniowania tej mocy [26, 32, 36, 64, 67, 75, 84]. Przy opisie właściwości energetycznych obwodów należy więc zrezygnować z prób (jak dotąd nieudanych) wprowadzania pojęć różnych mocy, natomiast do opisu obwodu wykorzystać te wielkości, które są powszechnie akceptowane w elektro-technice. Rozpatrywana w pracy koncepcja umożliwia optymalizację warunków przesyłu energii i jest pozbawiona wymienionych wad. Ideę tej koncepcji można przedstawić w postaci ciągu postulatów [84, 65].

1. Do opisu właściwości energetycznych obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi wykorzystuje się wyłącznie prądy i napięcia występujące w obwodach wartości skuteczne przebiegów oraz moc czynną P .
2. Przez uogólniony prąd aktywny obwodu rozumie się zbiór prądów wyróżniony w wyniku rozwiązania odpowiedniego problemu optymalizacji warunków pracy źródeł i odbiorników energii tego obwodu.
3. Zdefiniowany dla obwodu optymalizacyjny wskaźnik jakości powinien umożliwiać ocenę:
 - właściwości energetycznych przebiegów na podstawie ich wartości skutecznych i strat mocy czynnej,
 - zniekształceń przebiegów w zadanym sensie.
4. Wyróżniony zbiór prądów aktywnych określa optymalny punkt pracy obwodu, którego realizację zapewnia się przez eliminację prądów biernych w sensie S. Fryzego, występujących w obwodzie, przez dołączenie do wybranych węzłów obwodu układów kompensacyjnych.

Realizację tych postulatów przeprowadza się w dwóch krokach:

- I. Optymalizacja przyjętego dla obwodu wskaźnika jakości, celem wyróżnienia zbioru prądów aktywnych, określających optymalny punkt pracy obwodu [84].

II. Realizacja optymalnego punktu pracy obwodu poprzez eliminację prądów biernych (zgodnie z koncepcją S. Fryzego), polegającą na doborze odpowiednich kompensatorów [65].

Optymalizacji warunków pracy obwodu poświęcone są rozdziały 2, 3, 4 pracy, natomiast modyfikacje rozpatrzono w rozdziałach 5, 6.

Optymalizację tę w całej pracy przeprowadza się z wykorzystaniem dwukryterialnego wskaźnika jakości (funkcji celu) opisanego w rozdziale 2.

2. ZASTOSOWANIE ANALIZY FUNKCJONALNEJ W OPTYMALIZACJI OBWODÓW

Metody analizy funkcjonalnej są od dawna stosowane w teorii obwodów i sygnałów [37, 48]. Metody te umożliwiają nie tylko zwięzły i ścisły zapis problemów teorii obwodów i sygnałów, ale przede wszystkim efektywne rozwiązywanie tych problemów. Szczególne znaczenie w analizie i syntezie obwodów mają przestrzenie Hilberta, tzn. przestrzenie liniowe, unormowane, zupełne z wprowadzonym odpowiednio iloczynem skalarnym. Normy wielu takich przestrzeni Hilberta mogą być interpretowane jako wartości skuteczne sygnałów, natomiast iloczyny skalarne tych przestrzeni interpretuje się często jako moc czynną lub energię. Cechą znaną przestrzeni Hilberta jest to, że każda z nich zawiera zbiory liniowo niezależnych i wzajemnie ortogonalnych elementów, nazywane bazami. Bazy wykorzystuje się do opisu dowolnych elementów przestrzeni Hilberta za pomocą uogólnionych szeregów Fouriera. Tak więc w każdej przestrzeni Hilberta wprowadzić można nieskończenie wymiarowe układy współrzędnych, modelowane na przestrzeni arytmetycznej \mathbb{R}^∞ , a dowolny element (sygnał) przestrzeni Hilberta opisywalny jest zawsze ciągiem współczynników Fouriera względem przyjętej bazy [3]. W przestrzeniach Hilberta, podobnie jak w przestrzeniach euklidesowych, definiuje się pojęcia prostopadłości (ortogonalności) i równoległości sygnałów. Charakterystykę stosowanych w pracy przestrzeni Hilberta sygnałów T-okresowych opisano poniżej.

2.1. Przestrzenie Hilberta przebiegów okresowych

Przestrzeń L_T^2

Niech $\{f\}$ będzie zbiorem sygnałów (funkcji) okresowych, o tym samym okresie T , mierzalnych na przedziale $[0, T]$ i całkowalnych z kwadratem na tym przedziale. Zbiór ten tworzy przestrzeń Hilberta, oznaczoną symbolem L_T^2 [3], w której normę i iloczyn skalarny określają wzory:

$$\|f\|_{L_T^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}, \quad (2.1)$$

$$(f, g)_{L_T^2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt, \quad f, g \in L_T^2. \quad (2.2)$$

W przestrzeni L_T^2 istnieje baza trygonometryczna $\{e_h\}$.

$$e_h = \begin{cases} 1, & \text{dla } h = 0 \\ (\sqrt{2} \cosh \omega_0 t, \sqrt{2} \sinh \omega_0 t), & \text{dla } h \geq 1 \end{cases} \quad h \in \mathbb{N}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.3)$$

z wykorzystaniem której każdy sygnał $f \in L_T^2$ można zapisać w postaci zespolonego szeregu Fouriera:

$$f(t) = F_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} F_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (2.4)$$

gdzie:

F_h - wartości skuteczne zespolone h -tej harmonicznej sygnału f , określone wzorem:

$$F_h = \begin{cases} F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, & \text{dla } h = 0, \\ F_h = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f(t) \exp(-jh\omega_0 t) dt, & \text{dla } h \neq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Na podstawie twierdzenia Parsewala normę i iloczyn skalarny (2.1), (2.2) można zapisać w następującej postaci:

$$\|f\|_{L_T^2} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} |F_h|^2}, \quad (2.6)$$

$$(f, g)_{L_T^2} = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} F_h G_h^* \quad (2.7)$$

gdzie:

F_h, G_h - wartości skuteczne zespolone h -tej harmonicznej funkcji f, g .

Przestrzeń $L_{T,n}^2$

Niech $\{f\} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ będzie zbiorem sygnałów złożonym z n wymiarowych ciągów funkcji, z których każda należy do przestrzeni L_T^2 . Zbiór $\{f\}$ tworzy [12] wektorową przestrzeń Hilberta $L_{T,n}^2$ z normą i iloczynem skalarnym:

$$\|f\|_{L_{T,n}^2} = \|(f_\alpha)\|_{L_{T,n}^2} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T f_\alpha^2(t) dt}, \quad (2.8)$$

$$(f, g)_{L_{T,n}^2} = ((f_\alpha), (g_\alpha))_{L_{T,n}^2} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T f_\alpha(t) g_\alpha(t), \quad f = \{f_\alpha\}, \quad g = \{g_\alpha\}, \quad \alpha \in N. \quad (2.9)$$

Bazę trygonometryczną w przestrzeni $L_{T,n}^2$ określa wzór:

$$e_h = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} (1, 0, 0, \dots, 0) \\ (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \dots \\ (0, 0, 0, \dots, 1) \end{array} \right\} \text{ dla } h = 0 \\ \left. \begin{array}{l} (\sqrt{2} \cosh \omega_0 t, 0, \dots, 0), (\sqrt{2} \sinh \omega_0 t, 0, \dots, 0) \\ (0, \sqrt{2} \cosh \omega_0 t, \dots, 0), (0, \sqrt{2} \sinh \omega_0 t, \dots, 0) \\ \dots \\ (0, 0, \dots, \sqrt{2} \cosh \omega_0 t), (0, 0, \dots, \sqrt{2} \sinh \omega_0 t) \end{array} \right\} \text{ dla } h \neq 0, h \in N \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Z wykorzystaniem bazy (2.10) dowolny sygnał wektorowy $f = \{f_n\}$ ma szereg Fouriera:

$$f_\alpha(t) = F_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} F_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

którego współczynniki $F_{\alpha h}$ ($\alpha \in \{1, \dots, n\}$, $h \in N$) oblicza się na podstawie wzorów (2.5).

Na podstawie twierdzenia Parsewala normę (2.8) i iloczyn skalarny (2.9) określają wzory:

$$\|f\|_{L^2_{T,n}} = \|(f_\alpha)\|_{L^2_{T,n}} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^n \sum_{h=0}^{\infty} |F_{\alpha h}|^2}, \quad (2.12)$$

$$(f, g)_{L^2_{T,n}} = ((f_\alpha), (g_\alpha))_{L^2_{T,n}} = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=0}^n \sum_{h=0}^{\infty} F_{\alpha h} G_{\alpha h}^*, \quad (2.13)$$

gdzie:

$F_{\alpha h}, G_{\alpha h}$ - wartości zespolone skuteczne h-tej harmonicznej sygnałów f_α, g_α , $\alpha \in \{1, \dots, n\}$.

Przestrzeń Sobolewa $W_T^{2,p}$

Zbiór funkcji $\{f\}$ należących do przestrzeni L^2_T , których pochodne uogólnione w sensie Sobolewa [1] mają te same własności, co funkcje f , tworzy przestrzeń Hilberta, nazywaną przestrzenią Sobolewa $W_T^{2,p}$. Normę i iloczyn skalarny w tej przestrzeni określają wzory:

$$\|f\|_{W_T^{2,p}} = \sqrt{\sum_{k=0}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [D^k f]^2(t) dt}, \quad (2.14)$$

gdzie:

ρ_k - nieujemne współczynniki wagi, $\rho_0 > 0, \rho_k \geq 0$ dla $k \geq 1, k \in \{1, \dots, m\}$,

D^k - symbol pochodnej uogólnionej k-tego rzędu,

$$(f, g)_{W_T^{2,p}} = \sum_{k=0}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [D^k f](t) [D^k g](t) dt. \quad (2.15)$$

W przestrzeni $W_T^{2,p}$ istnieje baza trygonometryczna $\{e_w^h\}$ określona wzorem [11]:

$$e_w^h = \begin{cases} \nabla_0^{-1}, & \text{dla } h = 0, \\ (\nabla_h^{-1} \sqrt{2} \cosh \omega_0 t, \nabla_h^{-1} \sqrt{2} \sinh \omega_0 t), & \text{dla } h \neq 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

gdzie:

$$\nabla_h = \sqrt{\sum_{k=0}^m \rho_k (h\omega_0)^{2k}}. \quad (2.17)$$

Można wykazać [11], że pomiędzy współczynnikami Fouriera F_h funkcji $f \in W_T^{2,p} \subset L_T^2$ względem bazy (2.16) a współczynnikami Fouriera F_h (2.5) tej funkcji względem bazy przestrzeni L_T^2 (2.3) zachodzą zależności

$$F_h = \nabla_h F_h, \quad h \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Stąd i z twierdzenia Parsewala wynikają następujące wzory na normę (2.14) i iloczyn skalarny (2.15):

$$\|f\|_{W_T^{2,p}} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 |F_h|^2}, \quad (2.19)$$

$$(f, g)_{W_T^{2,p}} = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 F_h G_h^*. \quad (2.20)$$

Dowolny element (sygnał) $f \in W_T^{2,p}$ można więc przedstawić w postaci szeregu Fouriera względem bazy $\{e_h\}$ (2.3), zgodnie z wzorem (2.4).

Przestrzeń $W_{T,n}^{2,p}$

Zbiór funkcji wektorowych $\{f\}$ należących do przestrzeni $L_{T,n}^2$, których pochodne uogólnione do rzędu m -tego ($m \in \mathbb{N}$) włącznie mają te same właściwości, co wymienione funkcje, tworzy przestrzeń Hilberta [13], w której normę i iloczyn skalarny określają wzory:

$$\|f\|_{W_{T,n}^{2,p}} = \|(f_\alpha)\|_{W_{T,n}^{2,p}} = \sqrt{\sum_{k=0}^m \rho_k \frac{1}{T} \sum_{\alpha=1}^n \int_0^T [D^k f_\alpha]^2(t) dt}, \quad (2.21)$$

$$(f, g)_{W_{T,n}^{2,p}} = ((f_\alpha), (g_\alpha))_{W_{T,n}^{2,p}} = \sum_{k=0}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{\alpha=1}^n [D^k f_\alpha](t) [D^k g_\alpha](t) dt, \quad (2.22)$$

$$f = \{f_\alpha\}, g = \{g_\alpha\} \in W_{T,n}^{2,p}.$$

Bazę trygonometryczną e_h określa tu [13] wzór:

$$e_h = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} (\nabla_0^{-1}, 0, 0, \dots, 0) \\ (0, \nabla_0^{-1}, 0, \dots, 0) \\ \dots \\ (0, 0, 0, \dots, \nabla_0^{-1}) \end{array} \right\} \text{ dla } h = 0 \\ \left. \begin{array}{l} ((\nabla_0^{-1} \sqrt{2} \cosh \omega_0 t, 0, \dots, 0), (\nabla_0^{-1} \sqrt{2} \sinh \omega_0 t, 0, \dots, 0)) \\ ((0, \nabla_0^{-1} \sqrt{2} \cosh \omega_0 t, \dots, 0), (0, \nabla_0^{-1} \sqrt{2} \sinh \omega_0 t, \dots, 0)) \\ \dots \\ ((0, 0, \dots, \nabla_0^{-1} \sqrt{2} \cosh \omega_0 t), (0, 0, \dots, \nabla_0^{-1} \sqrt{2} \sinh \omega_0 t)) \end{array} \right\} \text{ dla } h \neq 0, \quad h \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Można wykazać [13], że normę (2.21) i iloczyn skalarny (2.22) przedstawić można w postaci wzorów:

$$\|f\|_{W_{T,n}^{2,p}} = \|(f_\alpha)\|_{W_{T,n}^{2,p}} = \sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \nabla_h^2 |F_{\alpha h}|^2}, \quad (2.24)$$

$$(f, g)_{W_{T,n}^{2,p}} = ((f_\alpha), (g_\alpha))_{W_{T,n}^{2,p}} = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \nabla_h^2 F_{\alpha h} G_{\alpha h}^*, \quad (2.25)$$

gdzie:

$F_{\alpha h}, G_{\alpha h}$ - współczynniki Fouriera funkcji f, g obliczone względem bazy (2.10).

Przestrzeń l^2

Zbiór ciągów zespolonych $\{C_h\}$ zbieżnych z kwadratem:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{\infty} |C_h|^2 < \infty \quad (2.26)$$

stanowi [3] przestrzeń ciągową Hilberta oznaczoną symbolem l^2 . Elementy tej przestrzeni $C_h, h \in \mathbb{N}$ identyfikuje się ze współczynnikami Fouriera F_h funkcji $f \in L_T^2$ lub też ze współczynnikami Fouriera F_h funkcji $f \in W_T^{2,p}$, zatem normę i iloczyn skalarny w przestrzeni l^2 określają wzory (2.6), (2.7), (2.19), (2.20).

Uwaga

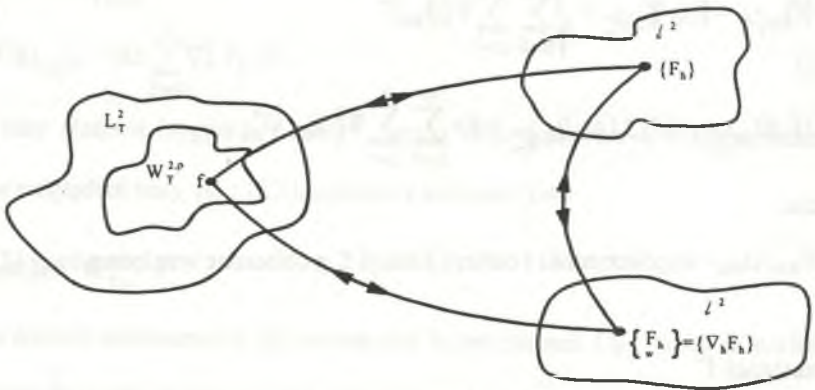
W celu uproszczenia oznaczeń w dalszej części pracy stosuje się odnośnie do norm i iloczynów skalarnych następujące uproszczenia:

$$\begin{aligned} \| \cdot \|_{L_T^2} &\hat{=} \| \cdot \|_L, & (\cdot, \cdot)_{L_T^2} &\hat{=} (\cdot, \cdot)_L \\ \| \cdot \|_{W_T^{2,p}} &\hat{=} \| \cdot \|_W, & (\cdot, \cdot)_{W_T^{2,p}} &\hat{=} (\cdot, \cdot)_W \\ \| \cdot \|_{W_{T,n}^{2,p}} &\hat{=} \| \cdot \|_{W,n}, & (\cdot, \cdot)_{W_{T,n}^{2,p}} &\hat{=} (\cdot, \cdot)_{W,n} \\ \| \cdot \|_{L_{T,n}^2} &\hat{=} \| \cdot \|_{L,n}, & (\cdot, \cdot)_{L_{T,n}^2} &\hat{=} (\cdot, \cdot)_{L,n} \end{aligned}$$

■

W podobny sposób można by wprowadzić wektorowe analogony przestrzeni l^2 [3], co z punktu widzenia niniejszej pracy nie jest jednak potrzebne.

Ilustrację opisanych zależności pomiędzy przestrzeniami sygnałowymi L_T^2 , $W_T^{2,p}$, l^2 przedstawia rys.2.1.



Rys.2.1. Ilustracja zależności pomiędzy przestrzeniami L_T^2 , $W_T^{2,p}$, l^2

Fig.2.1. Illustration of dependences between spaces L_T^2 , $W_T^{2,p}$, l^2

2.2. Wskaźnik jakości

Stosowany w pracy wskaźnik jakości (funkcja celu) J jest różniczkowo-całkowym funkcjonałem określonym na napięciach i prądach rozpatrywanych układów, zgodnie z wzorem:

$$J = \mathcal{A} + \mathcal{B} . \quad (2.27)$$

Wartość całkowitego funkcjonału \mathcal{A} jest proporcjonalna do kwadratu wartości skutecznych prądów źródeł lub też jest proporcjonalna do mocy czynnej wydzielanej na wybranych elementach obwodu. Wartość różniczkowego funkcjonału \mathcal{B} jest proporcjonalna do sumy kwadratów wartości skutecznych pochodnych prądu źródła (do zadanego rzędu włącznie) lub też jest proporcjonalna do wartości średniej iloczynu pochodnych napięcia i prądu, do zadanego rzędu włącznie. Wykorzystywany w pracy funkcjonał \mathcal{J} (2.27) stanowi zawsze kompozycję norm lub iloczynów skalarnych przestrzeni omówionych w rozdziale 2.1. Funkcjonał \mathcal{A} wyraża się przez pierwszy składnik (dla $k=0$) norm i iloczynów skalarnych określonych wzorami (2.14), (2.15), (2.21), (2.22), jest on więc proporcjonalny ze współczynnikiem wagi ρ_0 do kwadratów wartości skutecznych przebiegów bądź też do mocy czynnej wydzielanej na przyjętym elemencie obwodu. Funkcjonał \mathcal{B} stanowi pozostałe składniki (dla $k \geq 1$) wymienionych norm i iloczynów skalarnych. Funkcjonał ten umożliwi ocenę zniekształceń prądów, napięć w obwodach, rozumianych jako odchylenie kształtu przebiegu prądu lub napięcia od przebiegu sinusoidalnego. Uzasadnienie tej właściwości funkcjonału \mathcal{B} jest proste w przypadku, gdy wskaźnik \mathcal{J} ma postać określoną wzorami (2.14), (2.19). Ze wzoru (2.19) wynika, że harmoniczne F_h przebiegu są wzmacniane w stosunku h^k , gdzie k oznacza rząd pochodnej przebiegu (por. wzór (2.17)). Minimalizacja funkcjonału \mathcal{J} prowadzić więc będzie do przebiegu zawierającego przede wszystkim podstawową harmoniczną, a wyższe harmoniczne tego przebiegu zostaną silnie stłumione. Bardziej szczegółowe omówienie właściwości funkcjonału \mathcal{B} zostanie przeprowadzone w rozdziałach 3, 4 pracy przy omawianiu rozpatrywanych tam problemów optymalizacyjnych.

Możliwa jest ocena zniekształceń przebiegów w innym niż to opisano sensie, poprzez modyfikację funkcjonału \mathcal{B} (por. Aneks B).

2.3. Algorytm rozwiązywania problemów optymalizacji

Liniowa izometria omówionych w rozdziale 2.1 sygnałowych (funkcyjnych) przestrzeni Hilberta i przestrzeni ciągowej l^2 umożliwia unifikację metod analizy

rozpatrywanych w pracy problemów optymalizacji. Analizę tą przeprowadza się zgodnie z opisanym algorytmem [84]:

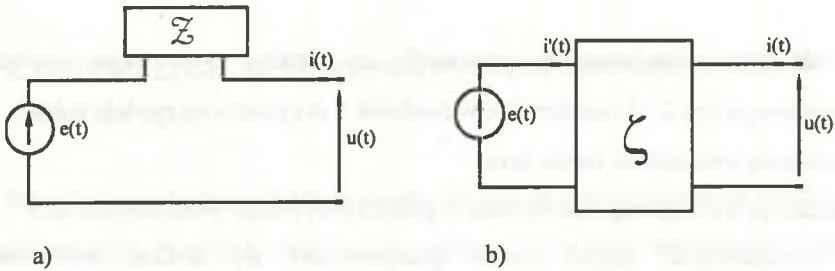
1. Formalizacja problemu optymalizacji w dziedzinie czasu, tzn. w pierwotnej sygnałowej przestrzeni Hilberta.
2. Transformacja problemu do dziedziny częstotliwości, czyli do przestrzeni ciągowej l^2 .
3. Rozwiązanie problemu w dziedzinie częstotliwości.
4. Transformacja rozwiązania do dziedziny czasu.

Podobnie jak w klasycznym rachunku operatorowym, opisany algorytm umożliwia pominięcie analizy złożonych problemów brzegowych równań różniczkowo-całkowych. Zamiast tych równań rozwiązuje się znacznie prostsze układy równań algebraicznych. Dla modeli SLS elementów obwodów rozpatrywanych w pracy, przedstawiony algorytm umożliwia uzyskanie rozwiązań problemów optymalizacji w postaci jawnej - zamkniętej, co znacząco upraszcza analizę tych problemów. Opisany algorytm został szczegółowo zastosowany do kilku pierwszych z rozpatrywanych problemów optymalizacji, analiza pozostałych problemów została przedstawiona skrótowo z pominięciem etapów pośrednich.

2.4. Charakterystyka rozpatrywanych modeli układów

W pracy rozpatruje się przeważnie proste modele układów z przebiegami niesinusoidalnymi, złożone ze źródła jedno- lub wielofazowego napięcia niesinusoidalnego, T-okresowego i odbiornika. W rozdziale 3 uwzględnia się następujące modele źródeł jednofazowych (rys.2.2):

- z impedancją wewnętrzną równą zeru (źródła idealne),
- z impedancją wewnętrzną modelowaną w postaci dwójnika SLS (rys.2.2a)
- z impedancją wewnętrzną modelowaną w postaci czwórnika SLS (rys.2.2b).



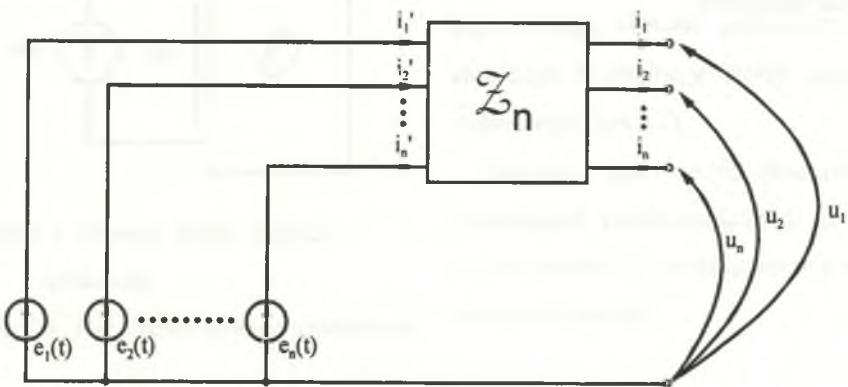
Rys.2.2. Modele źródeł jednofazowych

Fig.2.2. Models of one-phase sources

Operatory impedancyjne źródeł są zawsze pasywne. W rozdziale 3 rozpatruje się problemy minimalizacji:

- wartości skutecznych prądów źródeł z rys.2.2, czyli problemy minimalizacji funkcjonału (2.1),
- wartości skutecznych i zniekształceń prądów źródeł z rys.2.2, czyli problemy minimalizacji funkcjonału (2.14),
- strat mocy czynnej na elementach \mathfrak{Z} , ξ , czyli problemy minimalizacji funkcjonału (2.2),
- strat mocy czynnej na elementach \mathfrak{Z} , ξ oraz zniekształceń przebiegów prądów, napięć, czyli problemy minimalizacji funkcjonału (2.15)

przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzaną do odbiornika.



Rys.2.3. Model źródła n-fazowego

Fig.2.3. Model of multi-phase source

Dla układów wielofazowych złożonych ze źródła n -fazowego napięcia niesinusoidalnego (rys.2.3) i odbiornika, w rozdziale 4 przyjmuje się modele źródeł:

- z impedancją wewnętrzną równą zero,
- z impedancją wewnętrzną modelowaną w postaci pasywnego n -biegunnika SLS.

Dla wymienionych modeli źródeł przeprowadza się analizę problemów minimalizacji:

- wartości skutecznych prądów źródeł, czyli problemy minimalizacji funkcjonału (2.8),
- wartości skutecznych i zniekształceń prądów źródeł, czyli problemy minimalizacji funkcjonału (2.14),
- strat mocy czynnej na elemencie ξ_n oraz minimalizacji zniekształceń prądów i napięć, z wykorzystaniem funkcjonału (2.15).

Wszystkie wymienione problemy rozwiązuje się przy uwzględnieniu ograniczeń równościowych na całkowitą moc czynną doprowadzaną do odbiornika lub też na fazowe moce czynne odbiornika.

Oprócz przedstawionych modeli układów, w rozdziale 4 analizuje się również kilka bardziej złożonych struktur układów z przebiegami niesinusoidalnymi w celu pokazania, że opisane w pracy metody są słuszne dla wielu innych nie rozpatrywanych struktur obwodów.



3. OPTIMALIZACJA WARUNKÓW PRACY OBWODÓW JEDNOFAZOWYCH

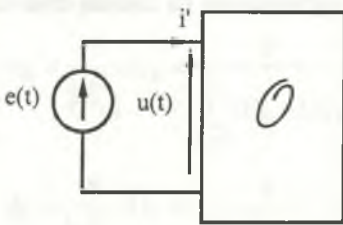
Rozpatrywane w tym rozdziale układy złożone są z jednofazowych źródeł napięcia i odbiorników. Napięcia źródłowe są opisane funkcjami okresowymi, niesinusoidalnymi. O odbiornikach wystarczy założyć, że przy zasilaniu napięciowym, okresowym i niesinusoidalnym ich prądy są również okresowe i niesinusoidalne. Zakładamy zatem, że napięcia źródłowe są elementami przestrzeni L_T^2 lub $W_T^{2,p}$, natomiast operatory admitancyjne Θ odbiorników spełniają warunek

$$\Theta : L_T^2 \rightarrow L_T^2, \quad (3.1)$$

$$\Theta : W_T^{2,p} \rightarrow W_T^{2,p}, \quad (3.2)$$

co jest równoważne ze spełnieniem warunku okresowości napięć i prądów w obwodach. Z punktu widzenia optymalizacji założenie liniowości odbiorników występujących w obwodach jest zbędne.

3.1. Obwody z idealnymi źródłami napięcia



Rys.3.1. Obwód: źródło napięcia - odbiornik

Fig.3.1. The circuit: voltage source-load

Optymalizację warunków pracy układów wygodnie jest rozpocząć od analizy najprostszego obwodu jednofazowego, złożonego z idealnego źródła napięcia i odbiornika (rys.3.1).

Napięcia i prądy w tym obwodzie są przebiegami niesinusoidalnymi o tym samym okresie T , wyrażonymi w postaci szeregów Fouriera

$$u(t) = U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (3.3)$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} I_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (3.4)$$

gdzie:

U_h - wartość skuteczna zespolona h -tej harmonicznej ($h \in \mathbb{N}$) napięcia źródła,

$$U_h = C_h - jD_h = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, & \text{dla } h = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u(t) \exp(-jh\omega_0 t) dt, & \text{dla } h > 0, h \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.5)$$

I_h - wartość skuteczna zespolona h -tej harmonicznej ($h \in \mathbb{N}$) prądu

$$I_h = A_h - jB_h = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt, & \text{dla } h = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T i(t) \exp(-jh\omega_0 t) dt, & \text{dla } h > 0, h \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Przyjmujemy ponadto, że do odbiornika powinna być doprowadzona zadana moc czynna P .

Dla obwodu przedstawionego na rys.3.1 rozpatruje się problem minimalizacji kwadratu wartości skutecznej prądu źródła, przy ograniczeniu na zadaną moc czynną odbiornika:

$$\min_{(i)} \|i\|_{L_T^2}^2 = \min_{(i)} \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \right), \quad (3.7)$$

gdys

$$P = (u, i)_{L_T^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt, \quad u, i \in L_T^2. \quad (3.8)$$

Problem optymalizacji (3.7), (3.8) wygodnie jest sprowadzić, w celu rozwiązania, do dziedziny częstotliwości (por. rozdz. 2.3). Jeśli wykorzystamy wzory (2.6), (2.7), funkcjonal Lagrange'a $L(A_h, B_h, \lambda)$ problemu (3.7), (3.8) ma postać:

$$L(I_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} I_h I_h^* + \lambda \left(P - \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} U_h I_h^* \right). \quad (3.9)$$

Funkcjonał (3.9) można zapisać w postaci:

$$L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} (A_h C_h + B_h D_h) \right] \quad (3.10)$$

gdzie:

P - zadana moc czynna odbiornika,

λ - mnożnik Lagrange'a.

Warunki konieczne ekstremum funkcyjonału $L(A_h, B_h, \lambda)$ opisanego zależnością (3.10) określa układ równań:

$$\frac{\partial L(A_h, B_h, \lambda)}{\partial A_h} = 2A_h - \lambda C_h = 0, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial L(A_h, B_h, \lambda)}{\partial B_h} = 2B_h - \lambda D_h = 0, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial L(A_h, B_h, \lambda)}{\partial \lambda} = P - \sum_{h=0}^{\infty} (A_h C_h + B_h D_h), \quad h \in \mathbb{N}, \quad (3.13)$$

którego rozwiązania ze względu na zmienne A_h, B_h, λ dla każdej harmonicznej $h \in \mathbb{N}$ przyjmują postać:

$$A_h = \frac{P}{\|u\|_{L^2_T}^2} C_h = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} (C_h^2 + D_h^2)} C_h = {}_e G C_h, \quad (3.14)$$

$$B_h = \frac{P}{\|u\|_{L^2_T}^2} D_h = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} (C_h^2 + D_h^2)} D_h = {}_e G D_h, \quad (3.15)$$

$$\lambda = \frac{2P}{\|u\|_{L^2_T}^2} = \frac{2P}{\sum_{h=0}^{\infty} (C_h^2 + D_h^2)} = 2 {}_e G, \quad (3.16)$$

gdzie:

${}_e G$ - konduktancja równoważna określona wzorem:

$$eG = \frac{P}{\|u\|_{L_T^2}^2} = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} |U_h|^2} = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} (C_h^2 + D_h^2)}. \quad (3.17)$$

Z nieujemności drugich pochodnych Freche'ta funkcjonału Lagrange'a (3.10) oraz z twierdzenia Lusternika [7] wynika, że harmoniczne A_h, B_h określone wzorami (3.14) i (3.15) realizują minimum globalne tego funkcjonału. Rozwiązanie problemu (3.7), (3.8) stanowi prąd a_i określony szeregiem Fouriera (2.4), ze współczynnikami (3.14), (3.15).

Prąd ten opisany jest wzorem:

$$a_i(t) = eGU_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} eGU_h \exp(jh\omega_0 t) = eGu(t), \quad (3.18)$$

i stanowi tzw. prąd aktywny, wprowadzony pierwotnie przez S. Fryzego (por. wzór 1.17). Ze wzoru (3.18) wynika, że prąd aktywny a_i wiernie odtwarza kształt napięcia źródła ze współczynnikiem proporcjonalności eG . Zniekształcenia tego prądu (3.18) są więc takie same jak zniekształcenia napięcia źródła. Optymalny stan pracy obwodu określony jest z reguły niesinusoidalnym prądem a_i (3.18) o minimalnej wartości skutecznej. Prąd ten jednocześnie zapewnia dopływ zadanej mocy czynnej do odbiornika. Ograniczenie zniekształceń prądu źródła (rys. 3.1) można uzyskać rozpatrując następujący problem optymalizacyjny:

$$\min_{(i)} \|i\|_{W_T^{2,p}}^2 = \sum_{k=0}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [D^k i](t) dt, \quad (3.19)$$

przy ograniczeniu równościowym określonym wzorem (3.8). Na podstawie wzorów (2.19), (2.20) funkcjonał (3.19) można zapisać w następującej postaci:

$$\|i\|_{W_T^{2,p}}^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (A_h^2 + B_h^2), \quad (3.20)$$

gdzie:

$$A_h, B_h - \text{wartości zespolone skuteczne } h\text{-tej harmonicznej prądu źródła (3.6),} \\ \nabla_h^2 = \rho_0 + \rho_1(h\omega_0)^2 + \rho_2(h\omega_0)^4 + \dots + \rho_m(h\omega_0)^{2m}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.21)$$

m - maksymalny rząd pochodnej występującej we wzorze (3.19).

Stąd funkcjonal Lagrange'a odpowiadający zadaniu minimalizacji funkcjonu (3.20) przy ograniczeniu (3.8) wyraża w dziedzinie częstotliwości wzór:

$$L(I_h, \lambda) = L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} (A_h C_h + B_h D_h) \right]. \quad (3.22)$$

Z warunków koniecznych minimum tego funkcjonu wynika nieskończony układ równań, ze względu na zmienne $A_h, B_h, \lambda, h \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial L(A_h, B_h, \lambda)}{\partial A_h} = 2\nabla_h^2 A_h - \lambda C_h = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial L(A_h, B_h, \lambda)}{\partial B_h} = 2\nabla_h^2 B_h - \lambda D_h = 0, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial L(A_h, B_h, \lambda)}{\partial \lambda} = P - \sum_{h=0}^{\infty} (A_h C_h + B_h D_h) = 0. \quad (3.25)$$

Rozwiązanie wymienionego układu równań wyrażają wzory:

$$A_h = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_h^2 + D_h^2}{\nabla_h^2}} C_h, \quad (3.26)$$

$$B_h = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_h^2 + D_h^2}{\nabla_h^2}} D_h, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (3.27)$$

$$\lambda = \frac{2P}{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_h^2 + D_h^2}{\nabla_h^2}}. \quad (3.28)$$

Można wykazać, że warunki wystarczające minimum rozpatrywanego problemu są zawsze spełnione, rozwiązanie jego określa zatem następujący szereg Fouriera:

$$\begin{aligned} i(t) &= {}_c G_0 U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (A_h - jB_h) \exp(jh\omega_0 t) = \\ &= {}_c G_0 U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_c G_h U_h \exp(jh\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie:

${}_c G_h$ - konduktancja równoważna, określona wzorem:

$${}_eG_h = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2 + D_k^2}{\nabla_k^2}} = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|U_k|^2}{\nabla_k^2}}. \quad (3.30)$$

Prąd a_i (3.29) nazywamy uogólnionym prądem aktywnym, gdyż dla $m=0$, $\rho_0=1$ (por. wzór (3.19)) prąd ten przyjmuje postać określoną wzorem (3.18).

W przeciwieństwie do prądu aktywnego S. Fryzego (3.18), konduktancje ${}_eG_h$ występujące w określeniu prądu a_i (3.29) są funkcjami częstotliwości i mają oszacowania:

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} {}_eG_h \leq Ch^{-2m}, \quad h \geq 1, \quad C \in \mathbb{R}^+, \quad (3.31)$$

gdzie:

h - numer harmonicznej, $h \in \mathbb{N}$,

m - maksymalny rząd pochodnej Sobolewa.

Harmoniczne prądu (3.29) ${}_aI_h$:

$${}_aI_h = {}_eG_h U_h, \quad (3.32)$$

są tłumione w stosunku h^{-2m} względem harmonicznych U_h napięcia źródła o tych samych wskaźnikach h . Jeżeli w przebiegu napięcia źródła nie występuje składowa stała oraz ρ_k ($k \geq 1$), to kształt przebiegu prądu a_i (3.29) jest zbliżony do przebiegu sinusoidalnego o częstości pierwszej harmonicznej napięcia źródła. Dla $\rho_0=1$, $\rho_k \neq 0$ ($k \geq 1$) prąd a_i (3.29) realizuje kompromis pomiędzy prądem S. Fryzego (3.18) (o minimalnej wartości skutecznej) a prądem o minimalnej zawartości wyższych harmonicznych. Z ograniczenia (3.8) wynika ponadto, że prąd a_i umożliwi doprowadzenie zadanej mocy czynnej P do odbiornika. Źródło (rys.3.1) wydaje określone w tym rozdziale prądy aktywne, gdy konduktancje widziane z jego zacisków wynoszą:

- ${}_eG$, dla prądu S. Fryzego (3.18),

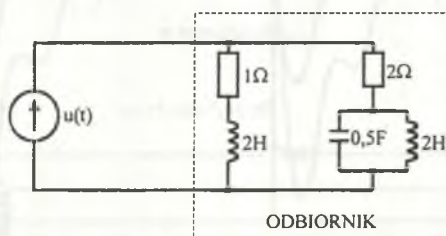
- ${}_eG_h$, dla uogólnionego prądu aktywnego (3.29).

Konduktancje te określają więc optymalny stan pracy obwodu z rys.2.1, w sensie problemów (3.7), (3.8), (3.19). Realizacji optymalnych stanów pracy układów poświęcone są rozdziały 5, 6 pracy.

Ilustrację przeprowadzonych rozważań stanowi poniższy przykład.

Przykład 3.1

Odbiornik przedstawiony na rys.3.2 zasilany jest z idealnego źródła napięcia okresowego o znormalizowanej pulsacji $\omega_0 = 1$ rad/s.



Rys.3.2. Przykładowy model układu źródło - odbiornik

Fig.3.2. Examples of models of systems: source-load

Napięcie źródła określa wzór:

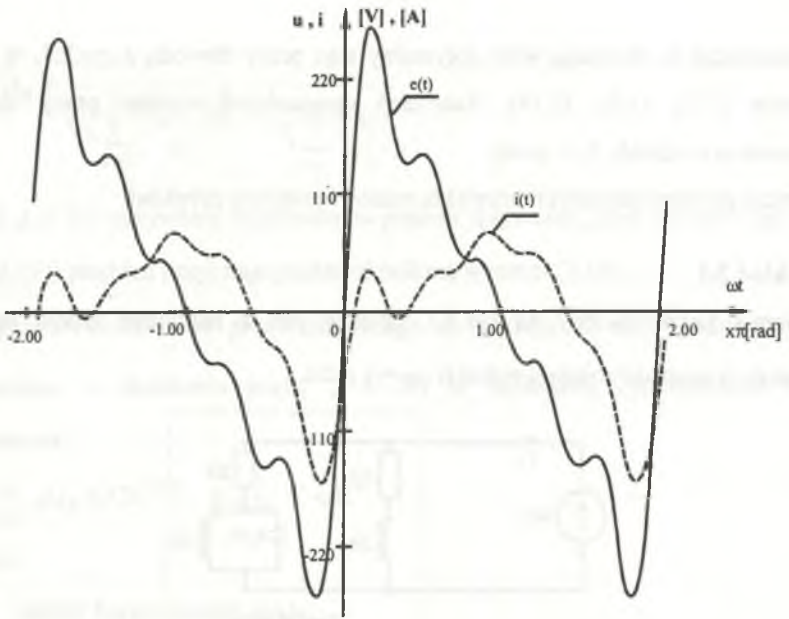
$$u(t) = \sqrt{2}(120 \sin \omega_0 t + 60 \sin 2\omega_0 t + 40 \sin 3\omega_0 t + 30 \sin 4\omega_0 t + 24 \sin 5\omega_0 t) \text{ V},$$

a moc czynna doprowadzona do odbiornika wynosi $P = 5798,5$ W.

Dla układu obliczono prąd źródła i moc czynną przenoszoną przez harmoniczne prądu i napięcia źródła dla czterech przypadków:

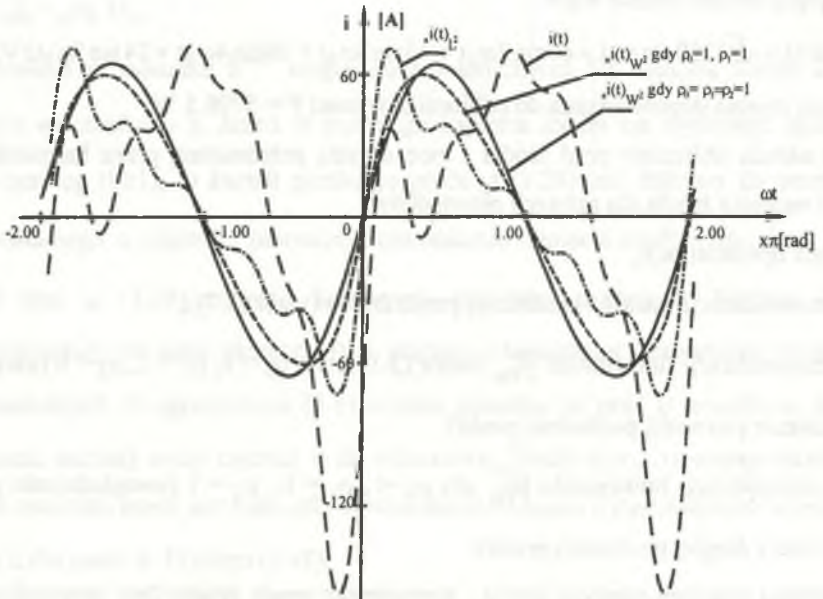
- A. bez optymalizacji,
- B. minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła (wzór (3.7)),
- C. minimalizacji funkcjonału $\|i\|_W^2$ (wzór (3.19)) dla $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$ (uwzględnienie pierwszej pochodnej prądu),
- D. minimalizacji funkcjonału $\|i\|_W^2$ dla $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$ (uwzględnienie pierwszej i drugiej pochodnej prądu).

Przebiegi czasowe napięcia źródła i pierwotnego prądu źródła (bez optymalizacji) pokazano na rys.3.3, natomiast przebiegi prądów aktywnych odpowiadających wariantom B, C, D optymalizacji pokazano na rys.3.4.



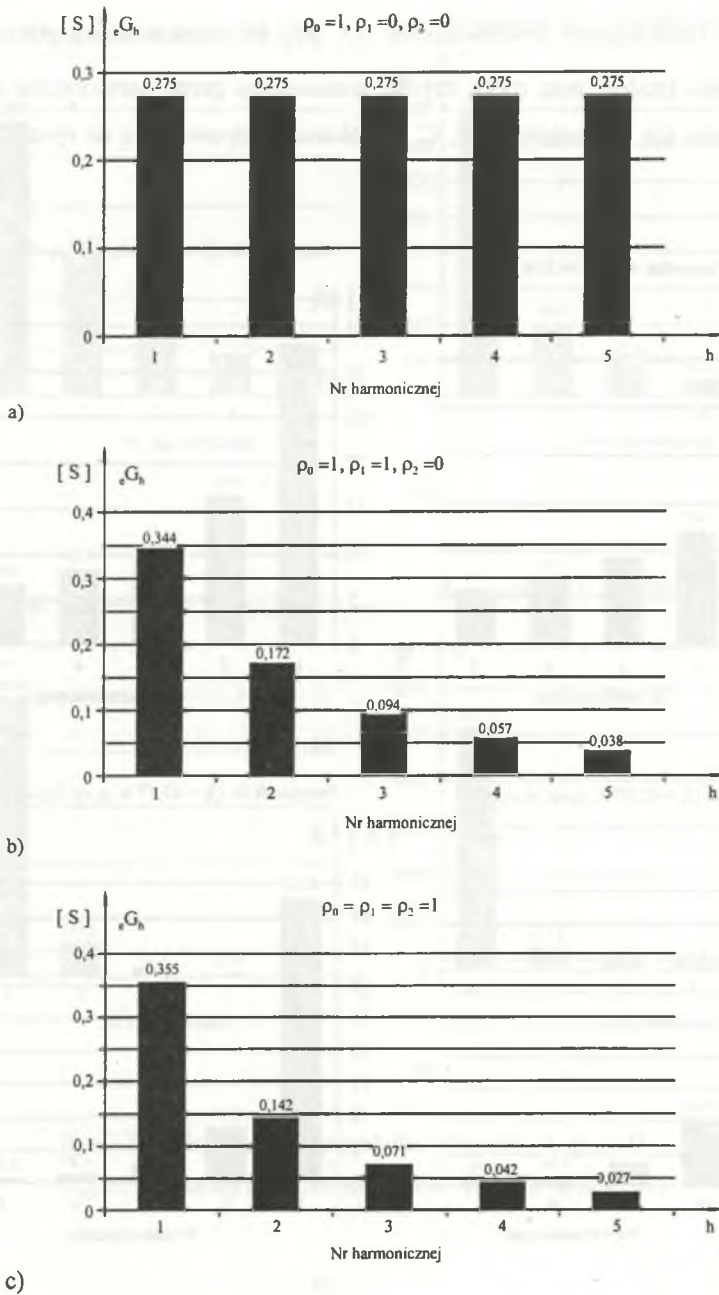
Rys.3.3. Przebiegi czasowe napięcia i prądu układu z rys.3.2

Fig.3.3. Waveforms of voltage and current of system shown in Fig.3.2



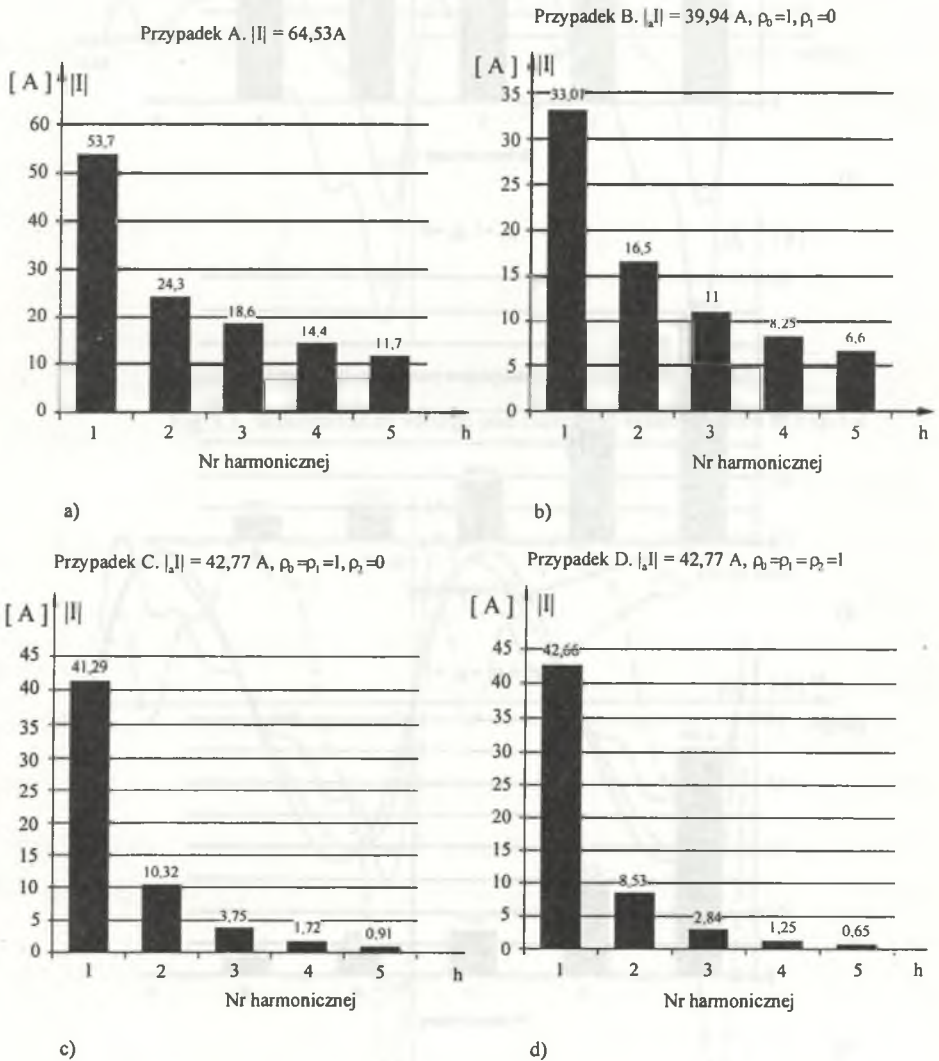
Rys.3.4. Przebiegi czasowe prądów aktywnych odpowiadające wariantom B, C, D

Fig.3.4. Waveforms of active current corresponding with B,C,D variants



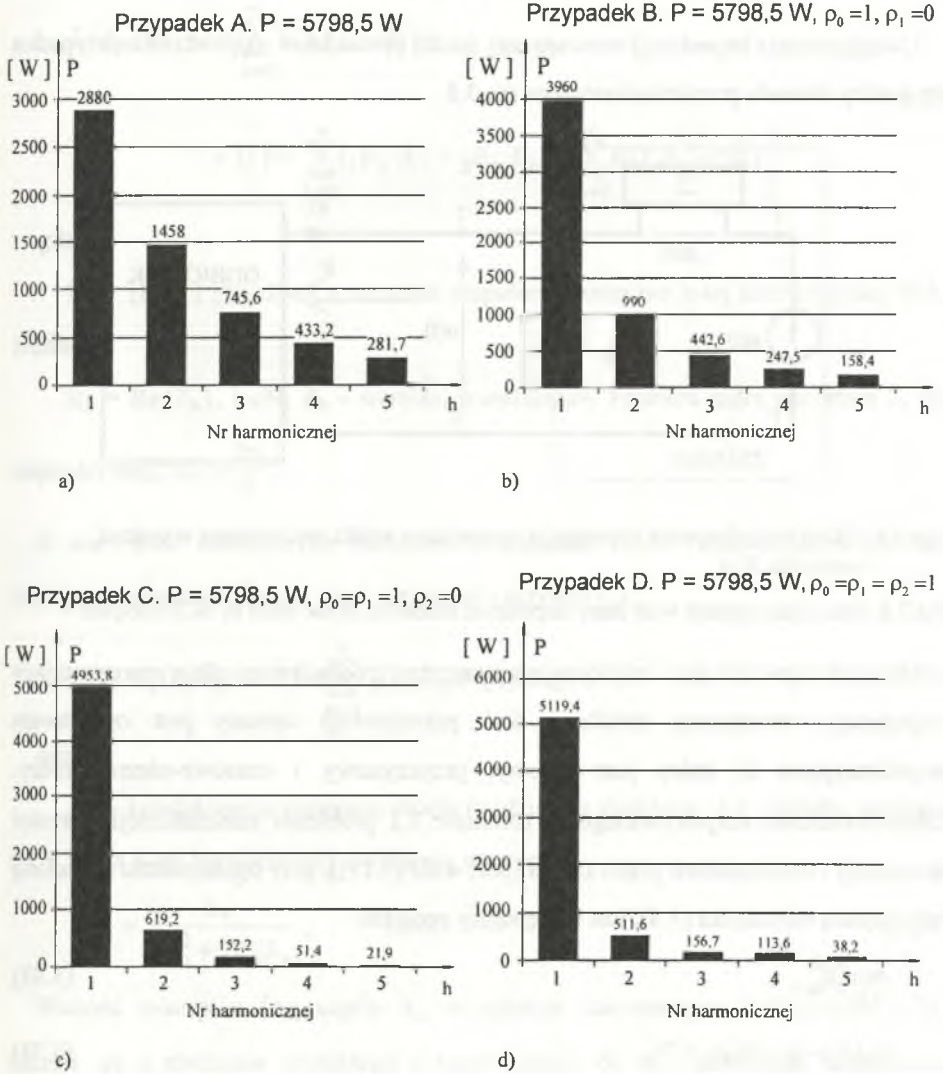
Rys.3.5. Zależność konduktancji równoważnych ϵG , ϵG_h od pulsacji
 Fig.3.5. Dependence of equivalent conductances ϵG , ϵG_h on frequency

Zależność konduktancji równoważnych eG , eG_h od częstotliwości pokazano na rys.3.5. Widmo prądów oraz moce czynne przenoszone przez harmoniczne napięcia i prądów źródła dla wariantów A, B, C, D pokazano odpowiednio na rysunkach 3.6, 3.7.



Rys.3.6. Widmo prądów źródła dla wariantów A, B, C, D

Fig.3.6. Spectrum of source currents for variants A, B, C, D

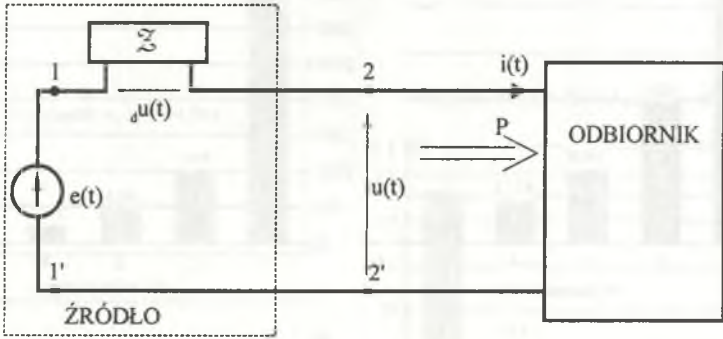


Rys.3.7. Widmo mocy czynnych dla wariantów A, B, C, D

Fig.3.7. Spectrum of active power for variants A, B, C, D

3.2. Obwody z rzeczywistymi źródłami napięcia

Uwzględnienie impedancji wewnętrznej źródeł prowadzi w najprostszym przypadku do analizy obwodu przedstawionego na rys.3.8.



Rys.3.8. Układ jednofazowy z impedancją wewnętrzną źródła modelowaną w postaci dwójnika SLS

Fig.3.8. One-phase system with inner impedance modelled in the form of SLS one-port

Dwójnik reprezentujący impedancję wewnętrzną źródła (ewentualnie reprezentujący impedancję wewnętrzną źródła i linii przesyłowej) opisany jest operatorem impedancyjnym \mathfrak{Z} , który jest liniowy, przyczynowy i czasowo-niezmienniczy. Odpowiednikiem rozpatrywanego w rozdziale 3.1 problemu minimalizacji wartości skutecznej i zniekształceń prądu źródła (por. wzór (3.19)), przy ograniczeniu na zadaną moc czynną odbiornika (3.8), jest następujący problem:

$$\min_{(i)} \|i\|_W^2, \quad (3.33)$$

$$(u, i)_L = (e - \mathfrak{Z}i, i)_L = P, \quad (3.34)$$

gdzie:

P - zadana moc czynna odbiornika,

$u - e - \mathfrak{Z}i$ - napięcie na zaciskach odbiornika,

e - SEM źródła,

\mathfrak{Z} - operator impedancyjny źródła.

Funkcjonał Lagrange'a problemu (3.34) w przestrzeni ciągowej l^2 współczynników Fouriera napięć i prądu układu z rys.3.8 ma postać:

$$L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} ({}_1E_h A_h + {}_2E_h B_h) + \sum_{h=0}^{\infty} R_h (A_h^2 + B_h^2) \right] \quad (3.35)$$

gdzie:

$E_h = {}_1E_h - j {}_2E_h$, $h \in \mathbb{N}$ - wartości zespolone skuteczne h-tej harmonicznej SEM źródła,

$R_h = \text{Re}\{Z_h\}$, $h \in \mathbb{N}$, Z_h - wartości transformaty Fouriera jądra operatora \mathfrak{Z} , dla częstości $h\omega_0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Z warunków koniecznych minimum funkcjonału (3.35) wynika układ równań, którego rozwiązanie określa prąd optymalny (aktywny) a_i :

$$a_i(t) = eG_0 E_0 + \sqrt{2} \text{Re} \sum_{h=1}^{\infty} eG_h E_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (3.36)$$

gdzie:

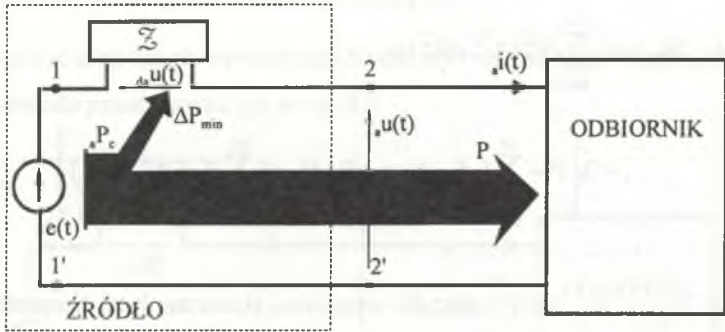
eG_h - konduktancja zastępcza źródła (widziana z zacisków (1-1')) źródła, układu z rys.3.8) dla h-tej harmonicznej, określona wzorem:

$$eG_h = \frac{\lambda_*}{2\nabla_h^2 + 2R_h\lambda_*}, \quad h \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

Wartość mnożnika Lagrange'a λ_* w punkcie stacjonarym funkcjonału (3.35) określa się z równania wynikłego z przyrównania do zera pochodnej funkcjonału (3.35) względem zmiennej λ :

$$P = F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda}{2\nabla_h^2 + 2R_h\lambda} |E_h|^2 - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 R_h}{(2\nabla_h^2 + 2R_h\lambda)^2} |E_h|^2 = {}_aP_c - \Delta P_{\min}. \quad (3.38)$$

Równanie to przedstawia bilans mocy czynnej w układzie z rys.3.8 znajdującym się w optymalnym stanie pracy (rys.3.9):



Rys.3.9. Optymalny stan pracy układu z rys.3.8

Fig.3.9. Optimum operating state of system shown in Fig.3.8

Zakładając pasywność operatora λ , tzn.

$$(\mathop{d}u, i)_L \geq 0 \quad (3.39)$$

gdzie:

$\mathop{d}u$ - napięcie na dwójniku λ

można wykazać [79], że funkcja $F(\lambda)$ (3.38) dla $\lambda \in (0, \infty)$ jest monotonicznie rosnąca (rys.3.10) oraz że:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = \mathop{d}P, \quad (3.40)$$

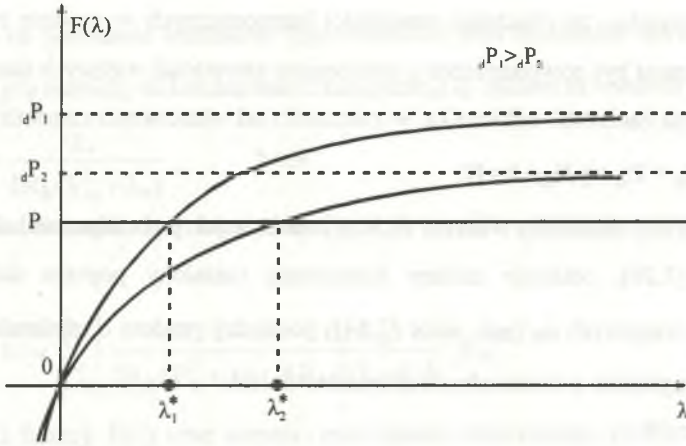
gdzie:

$\mathop{d}P$ - moc dopasowania energetycznego źródła z rys.3.8, czyli największa możliwa moc wydawana przez to źródło:

$$\mathop{d}P = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|E_h|^2}{4R_h}. \quad (3.41)$$

Warunki wystarczające minimum problemu (3.33), (3.34) określa [79] wzór:

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} (\nabla_h^2 + \lambda_* R_h) > 0. \quad (3.42)$$



Rys.3.10. Wykres funkcji $F(\lambda)$ dla dwóch różnych mocy dopasowania źródła

Fig.3.10. Plot of function $F(\lambda)$ for two various matching powers of source

Z przedstawionych rozważań wynika, że jeżeli:

- operator impedancyjny \mathfrak{Z} jest pasywny ($R_h \geq 0$),
- moc czynna doprowadzana do odbiornika jest mniejsza od mocy dopasowania energetycznego (w układach fizycznych warunek ten musi być zawsze spełniony),

to rozpatrywany problem optymalizacyjny ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie, które określa wzór (3.36). Ze wzoru (3.37) wynika, że harmoniczne ${}_a I_h$ ($h \in \mathbb{N}$) prądu źródła (3.36) mają oszacowanie:

$$|{}_a I_h| \leq \frac{C}{h^{2m} + R_h(h)} |E_h|, \quad h, m \in \mathbb{N}, \quad C > 0. \quad (3.43)$$

Tłumienie tych harmonicznych w stosunku do harmonicznych E_h SEM źródła uzależnione jest od właściwości częstotliwościowych części rzeczywistej operatora impedancyjnego źródła $R_h(h)$. Podobnie harmoniczne napięcia na zaciskach odbiornika ${}_a U_h$ w optymalnym stanie pracy źródła (rys.3.9) mają oszacowanie:

$$|{}_a U_h| \leq \frac{C \sqrt{(h^{2m} + R_h(h))^2 - X_h^2(h)}}{h^{2m} + R_h(h)} |E_h|, \quad (3.44)$$

z którego wynika, że obniżenie zawartości harmonicznych w prądzie źródła (wzór (3.43)) nie musi być równoznaczne z obniżeniem zawartości wyższych harmonicznych w napięciu na zaciskach odbiornika, w zależności od właściwości częstotliwościowych operatora $Z_h = R_h + j X_h$, $h \in N$.

Prąd aktywny określony wzorem (3.36), podobnie jak jego odpowiednik dla źródła idealnego (3.29), realizuje zadany kompromis (ustalony poprzez dobór współczynników wagowych ρ_k (por. wzór (2.14)) pomiędzy prądem o minimalnej wartości skutecznej a prądem o minimalnych zniekształceniach.

Uwaga

Przyjmując dla funkcjonau (3.33) współczynniki wagi równe: $\rho_0 = 1$, $\rho_k = 0$ ($k \geq 1$) problem (3.33), (3.34) sprowadza się do minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła rzeczywistego. Uzyskany w tym przypadku prąd aktywny (optymalny) a_i określony jest również wzorem (3.36) z tą różnicą, że:

$$e G_h = \frac{\lambda_*}{2 + 2R_h \lambda_*} \quad (3.45)$$

Prąd taki może być nazywany uogólnionym prądem S. Fryzego dla źródeł rzeczywistych z impedancją modelowaną w postaci dwójnika SLS. ■

Alternatywnym w stosunku do opisanego problemu optymalizacji warunków pracy źródła problemem jest równoczesna minimalizacja strat mocy czynnej wydzielanej na impedancji źródła (rys.3.8) i wyższych harmonicznych w prądzie źródła. Polega ona [90] na rozwiązaniu dla układu z rys.3.8 następującego zagadnienia:

$$\min_i (u, i)_w = \min_{(i)} \left\{ \rho_0 \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt + \sum_{k=1}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [D^k u](t) [D^k i](t) dt \right\}, \quad (3.46)$$

przy ograniczeniu określonym wzorem (3.34). Funkcjonał Lagrange'a tego problemu ma postać:

$$L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 R_h (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} ({}_1 E_h A_h + {}_2 E_h B_h) + \sum_{h=0}^{\infty} R_h (A_h^2 + B_h^2) \right], \quad (3.47)$$

a określony na podstawie warunków jego minimum prąd optymalny określa również wzór (3.36) z tą różnicą, że konduktancje zastępcze eG_h opisane są wzorem [90]:

$$eG_h = \frac{\lambda_*}{2R_h(\nabla_h^2 + \lambda_*)}, \quad h \in N. \quad (3.48)$$

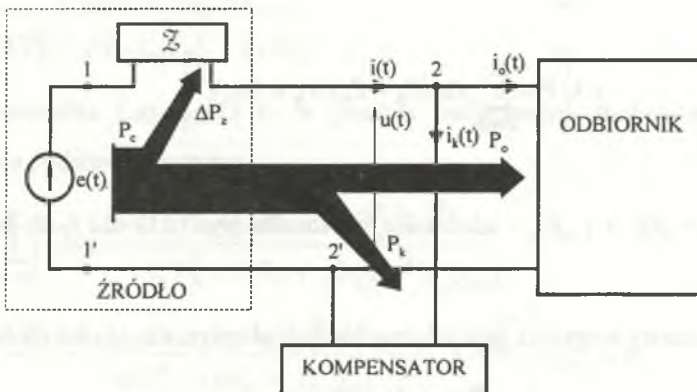
Wartość λ_* mnożnika Lagrange'a określa się w wyniku rozwiązania równania (por. (3.38)):

$$P = F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda}{2R_h(\nabla_h^2 + \lambda)} - \frac{\lambda^2 R_h}{4R_h(\nabla_h^2 + \lambda)^2} \right] |E_h|^2. \quad (3.49)$$

Własności funkcji $F(\lambda)$ oraz warunki rozwiązania omawianego problemu są identyczne z problemem minimalizacji wartości skutecznej i zniekształceń prądu źródła (3.33). Ze wzoru (3.48) wynika, że harmoniczne prądu optymalnego aI_h mają oszacowanie:

$$|aI_h| \leq C R_h^{-1}(h) h^{-2m} |E_h|, \quad C > 0, h \in N. \quad (3.50)$$

Prąd optymalny stanowiący minimum problemu (3.46) realizuje kompromis pomiędzy prądem źródła powodującym minimalne straty mocy czynnej na impedancji źródła Σ a prądem o minimalnych zniekształceniach. Harmoniczne jego prądu są tłumione względem harmonicznych SEM źródła zgodnie z wzorem (3.50). Prąd ten umożliwia ponadto doprowadzenie zadanej mocy czynnej P do odbiornika.



Rys.3.11. Uogólniony model układu z rys.3.8

Fig.3.11. Generalized model of system shown in Fig.3.8

W dotychczasowych rozważaniach dotyczących układu z rys.3.8 nie uwzględniano kompensatora umożliwiającego realizację optymalnego stanu pracy źródła, który jest opisany prądem i_a . W przypadku zastosowania najprostszego kompensatora równoległego (rys.3.11) problem minimalizacji wartości skutecznej i zniekształceń prądu źródła można rozpatrywać w trzech wariantach dotyczących ograniczeń na moc czynną [63, 65]:

A. Stałość mocy czynnej wydawanej przez źródło. Postawiony tak problem określają wzory (3.33), (3.34), a jego rozwiązanie opisano na początku rozdziału.

B. Stałość mocy czynnej odbiornika:

$$(u, i_o)_L = P. \quad (3.51)$$

C. Warunek bierności energetycznej kompensatora

$$(u, i_k)_L = 0. \quad (3.52)$$

Poniżej przedstawiono wyniki analizy problemu minimalizacji funkcjonału (3.33) przy ograniczeniach dotyczących wariantów B, C, na podstawie wyników prac [63, 65].

Funkcjonał Lagrange'a odpowiadający minimalizacji funkcjonału (3.33) przy ograniczeniu (3.51) ma postać:

$$L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} G_h |E_h - Z_h(A_h + jB_h)|^2 \right] \quad (3.53)$$

gdzie:

$${}_oY_h = {}_eG_h + j {}_oB_h - \text{admitancje odbiornika (rys.3.11) dla h-tej harmonicznej,} \\ h \in \mathbb{N},$$

a wyznaczony w wyniku jego minimalizacji prąd optymalny i_a określa wzór:

$${}_a i(t) = {}_e Y_o E_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_e Y_h E_h \exp(jh\omega_0 t). \quad (3.54)$$

Występujące we wzorze (3.54) admitancje zastępcze ${}_e Y_h$ widziane z zacisków (1-1') źródła (rys.3.11) wyznacza się na podstawie wzoru:

$${}_e Y_h = \frac{{}_o G_h \lambda_* Z_h^*}{\nabla_h^2 + {}_o G_h \lambda_* |Z_h|^2}, \quad h \in N, \quad (3.55)$$

przy czym wartość mnożnika Lagrange'a λ_* określa rozwiązanie równania (por. wzory (3.38), (3.49)):

$$P = F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} {}_o G_h \left[\frac{\nabla_h^2}{\nabla_h^2 + {}_o G_h \lambda |Z_h|^2} \right] |E_h|^2. \quad (3.56)$$

Funkcjonał Lagrange'a odpowiadający minimalizacji funkcyjonału (3.33) przy ograniczeniu (3.52) (wariant C) ma postać:

$$L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left[\sum_{h=0}^{\infty} {}_o G_h |E_h - Z_h (A_h + jB_h)|^2 - \sum_{h=0}^{\infty} ({}_1 E_h A_h + {}_2 E_h B_h - R_h (A_h^2 + B_h^2)) \right]. \quad (3.57)$$

Z warunków minimum tego funkcyjonału uzyskuje się prąd optymalny określony wzorem (3.54) z tą różnicą, że admitancje zastępcze ${}_e Y_h$ określa zależność:

$${}_e Y_h = \frac{2 {}_o G_h \lambda_* Z_h^* + \lambda_*}{2(\nabla_h^2 + {}_o G_h \lambda_* |Z_h|^2) + \lambda_* R_h} \quad (3.58)$$

Wartość mnożnika Lagrange'a λ_* w punkcie stacjonarym funkcyjonału (3.57) uzyskuje się na podstawie równania:

$$F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \left[{}_o G_h - \frac{\lambda(1 + 4 {}_o G_h R_h + 4 {}_o G_h^2 |Z_h|^2)}{2(\nabla_h^2 + \lambda(R_h + {}_o G_h |Z_h|^2))} + \frac{\lambda^2(1 + 4 {}_o G_h R_h + 4 {}_o G_h |Z_h|^2)(R_h + {}_o G_h |Z_h|^2)}{4(\nabla_h^2 + \lambda(R_h + {}_o G_h |Z_h|^2))^2} \right] |E_h|^2 = 0. \quad (3.59)$$

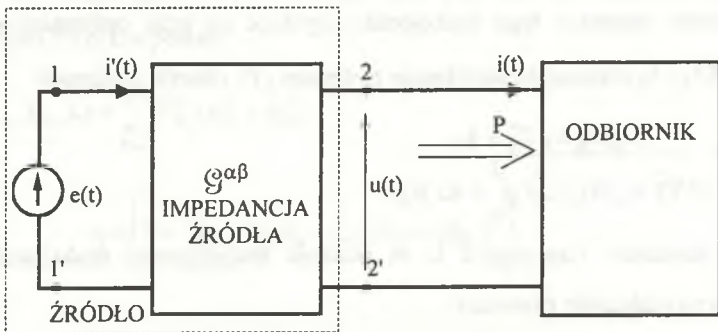
Właściwości prądów optymalnych uzyskanych w wyniku minimalizacji funkcyjonałów Lagrange'a (3.53), (3.57) są podobne do własności prądów aktywnych

określonych wcześniej dla źródła rzeczywistego. Oszacowania tych prądów wynikające ze wzorów (3.55), (3.58) są jednak o wiele bardziej złożone w porównaniu z oszacowaniami (3.43), (3.50), a tłumienie harmoniczných prądów optymalnych względem harmoniczných SEM źródła uzależnione jest zarówno od właściwości częstotliwościowych operatorów opisujących źródło, jak i odbiornik.

Optymalizacja układów ze źródłami w postaci dwójników Thévenina może być rozszerzona na przypadek źródła z impedancją wewnętrzną modelowaną w postaci czwórnika SLS (rys.3.12), [83]:

Dla układu z rys.3.12 możliwa jest:

- A. Minimalizacja wartości skutecznej prądu i' lub i' .
- B. Minimalizacja strat mocy czynnej wydzielanej w czwórniku modelującym impedancję źródła.
- C. Analiza wariantów A lub B połączona z równoczesną minimalizacją znieścień (wyższých harmoniczných) w przebiegach prądów układu z rys. 3.12.
- D. Analiza dowolnego z powyższých wariantów z ograniczeniami (3.51), (3.52), (por. rys.3.11).



Rys.3.12. Model układu z impedancją źródła modelowaną w postaci czwórnika

Fig.3.12. Model of system with inner impedance modelled in the form of the SLS two-port

Metodyka rozwiązywania każdego z wymienionych problemów jest identyczna, dla ilustracji rozpatrzony zostanie problem minimalizacji opisany poniżej (por. rys.3.12)

$$\begin{aligned} \min_{(i)} [(e, i)'_w - (u, i)_w] = \\ \min_{(i)} \left\{ \rho_0 \frac{1}{T} \int_0^T [(e(t)i'(t) - u(t)i(t))] dt + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T \{ [D^k e](t)[D^k i'](t) - [D^k u](t)[D^k i](t) \} dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

przy ograniczeniu:

$$(u, i)_L = P. \quad (3.60a)$$

Problem ten polega więc na minimalizacji strat mocy czynnej na czwórniku $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ oraz minimalizacji wyższych harmonicznych prądów w układzie z rys.3.12, przy ograniczeniu (3.60a) na moc czynną doprowadzaną do odbiornika.

Przyjmując, że liniowy, stacjonarny i czasowo-niezmienniczy operator impedancyjny źródła $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots\}$) ma postać określoną wzorem:

$$i'(t) = [\mathcal{G}^{11} e](t) - [\mathcal{G}^{12} i](t), \quad (3.61)$$

$$u(t) = [\mathcal{G}^{21} e](t) - [\mathcal{G}^{22} i](t) \quad (3.62)$$

oraz że reprezentacje częstotliwościowe tego operatora określają wzory:

$$I'_h = G_h^{11} E_h - G_h^{12} I_h, \quad (3.63)$$

$$U_h = G_h^{21} E_h - G_h^{22} I_h, \quad (3.64)$$

$$G_h^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Konstruuje się tak jak poprzednio funkcjonał Lagrange'a problemu (3.60), (3.60a):

$$\begin{aligned} L(A_h, B_h, \lambda) = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \left[G_h^{11*} |E_h|^2 - G_h^{12*} E_h (A_h + jB_h) - \right. \\ \left. - G_h^{21} E_h (A_h + jB_h) - G_h^{22} E_h (A_h^2 + B_h^2) \right] + \\ + \lambda \left[P - \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \left(G_h^{21} E_h (A_h + jB_h) - G_h^{22} E_h (A_h^2 + B_h^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

gdzie:

$$E_h = E_1 E_h - j_2 E_h, \quad (3.66)$$

$$G_h^{\alpha\beta} = \operatorname{Re}\{G_h^{\alpha\beta}\} + j \operatorname{Im}\{G_h^{\alpha\beta}\}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}. \quad (3.67)$$

Minimalizacja przedstawionego funkcjonału $L(A_h, B_h, \lambda)$ prowadzi [83] do wyznaczenia prądu optymalnego a_i (po stronie zacisków 2-2' układu z rys.3.12), który określa wzór:

$$a_i(t) = eK_0 E_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} eK_h E_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (3.68)$$

gdzie:

eK_h - transmitancja zastępcza układu dla h -tej harmonicznej, określona wzorem:

$$eK_h = \frac{G_h^{12*} + G_h^{21}(1 + \lambda')}{2 \operatorname{Re}\{G_h^{22}\}(\nabla_h^2 + \lambda')}. \quad (3.69)$$

Mnożnik Lagrange'a λ wyznacza się z równania

$$P = F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{Re}\{G_h^{12} G_h^{21}\} + |G_h^{21}|^2 (1 + \lambda)}{2 \operatorname{Re}\{G_h^{22}\}(\nabla_h^2 + \lambda)} - \frac{|G_h^{12*} + G_h^{21}(1 + \lambda)|^2}{4 \operatorname{Re}\{G_h^{22}\}(\nabla_h^2 + \lambda)^2} \right] |E_h|^2 = 0, \quad (3.70)$$

wyrażającego, podobnie jak poprzednio, bilans mocy czynnej w optymalnym punkcie pracy (w sensie problemu (3.60), (3.60a)) układu z rys.3.12 [83]. Można wykazać [83], że jeżeli czwórnik opisany operatorem $g^{\alpha\beta}$ jest pasywny, $\operatorname{Re}\{G_h^{22}\} > 0, h \in \mathbb{N}$ to funkcja $F(\lambda)$ (3.70) w przedziale $[0, \infty)$ jest monotonicznie rosnąca (rys. 3.13), a ponadto:

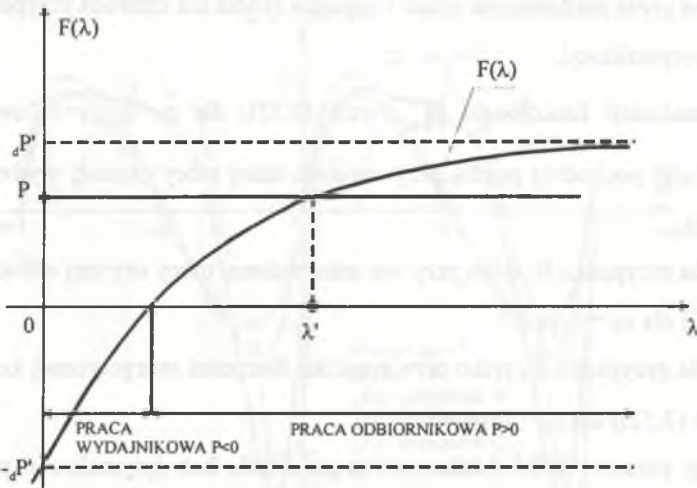
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|G_h^{21}|^2}{4 \operatorname{Re}\{G_h^{22}\}} |E_h|^2 = {}_dP' \quad (3.71)$$

gdzie:

${}_dP'$ - moc dopasowania energetycznego układu z rys.3.12.

Jeżeli moc czynna P doprowadzana do odbiornika jest mniejsza od mocy dopasowania ${}_dP'$, to istnieje zawsze jednoznaczne rozwiązanie równania (3.70) dla $\lambda \geq 0$, a rozpatrywany problem optymalizacji ma zawsze minimum globalne określone wzorem (3.68). W odróżnieniu od poprzednio rozpatrywanych zagadnień rozwiązania

problemu (3.60), (3.60a) istnieją dla odbiornikowej i wydajnikowej pracy odbiornika z rys.3.12, czyli dla $P \in (-dP', dP')$, (por. rys.3.13).



Rys.3.13. Przebieg funkcji $F(\lambda)$

Fig.3.13. Plot of function $F(\lambda)$

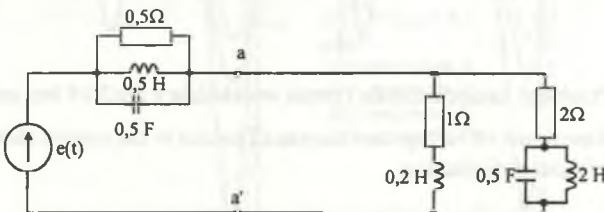
Ilustrację różnic jakościowych pomiędzy właściwościami rozwiązań problemów optymalizacji układów jednofazowych z idealnymi i rzeczywistymi źródłami napięcia stanowi poniższy przykład, będący kontynuacją przykładu 3.1.

Przykład 3.2

Odbiornik przedstawiony na rys.3.2 (przykład 3.1) zasilany jest z rzeczywistego źródła napięcia (rys.3.14) o pulsacji $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$.

SEM źródła $e(t)$ określa wzór:

$$e(t) = \sqrt{2}(120 \sin \omega_0 t + 60 \sin 2\omega_0 t + 40 \sin 3\omega_0 t + 30 \sin 4\omega_0 t + 24 \sin 5\omega_0 t) \text{ V.}$$



Rys.3.14. Model układu: rzeczywiste źródło napięcia - odbiornik

Fig.3.14. Model of system: non-ideal voltage source-load

Dla układu z rys.3.14 obliczono prąd źródła, straty mocy czynnej na impedancji źródła, napięcie na zaciskach odbiornika i moc czynną doprowadzaną do odbiornika, przenoszone przez harmoniczne prąd i napięcia źródła dla czterech przypadków:

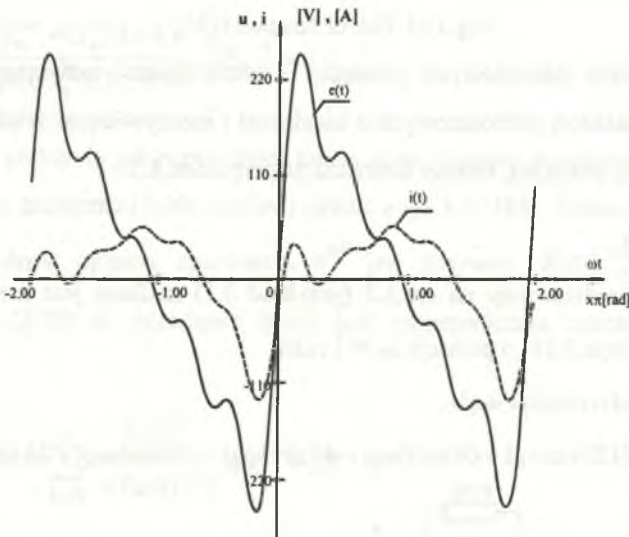
A. Bez optymalizacji.

B. Minimalizacji funkcjonału $\|i\|_w^2$ (wzór (3.33)) dla $\rho_0=1$, $\rho_1=1$ (uwzględnienie pierwszej pochodnej prądu) przy warunku stałej mocy czynnej wydawanej przez źródło.

C. Jak dla przypadku B, tylko przy warunku zadanej mocy czynnej odbiornika (wzór (3.51)) dla $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$.

D. Jak dla przypadku B, tylko przy warunku bierności energetycznej kompensatora (wzór (3.52)) dla $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$.

Przebiegi czasowe SEM źródła oraz prądu źródła bez optymalizacji pokazano na rys.3.15.

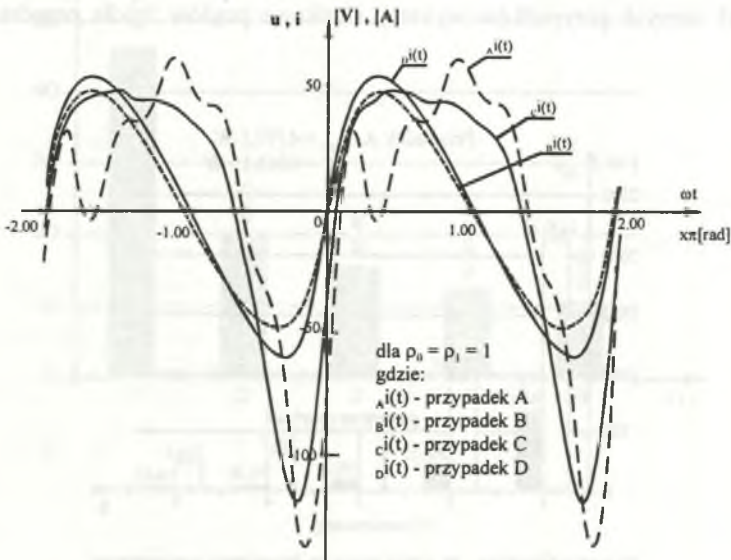


Rys.3.15. Przebiegi napięcia źródła i prądu w układzie z rys.3.14 bez optymalizacji

Fig.3.15. Waveforms of voltage and current of source in the system shown in Fig.3.14, without optimization

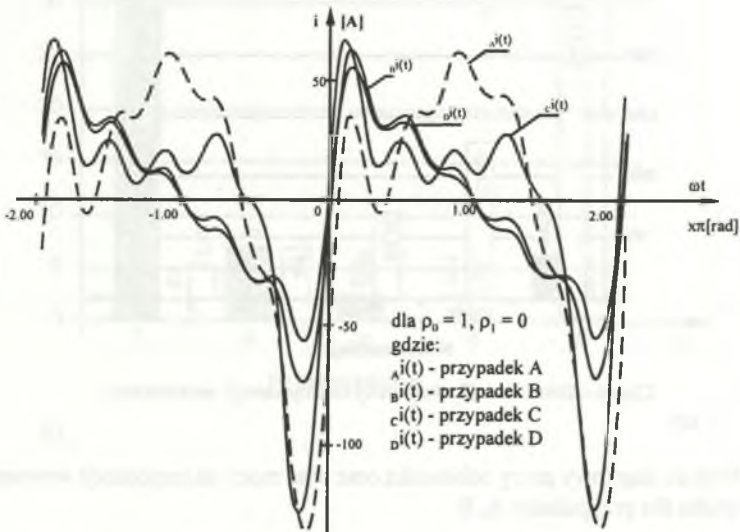
Przebiegi czasowe prądów źródła dla przypadków A,...,D dla $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$ pokazano na rys.3.16.

Natomiast na rys.3.17 pokazano przebiegi czasowe prądów źródła dla przypadków A,...,D, gdy $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 0$ (minimalizacja w L^2).



Rys.3.16. Przebiegi czasowe prądów źródła dla przypadków A,..., D dla $\rho_0=1$, $\rho_1=1$

Fig.3.16. Waveforms of source current for variants A,...,D, where $\rho_0=1$, $\rho_1=1$

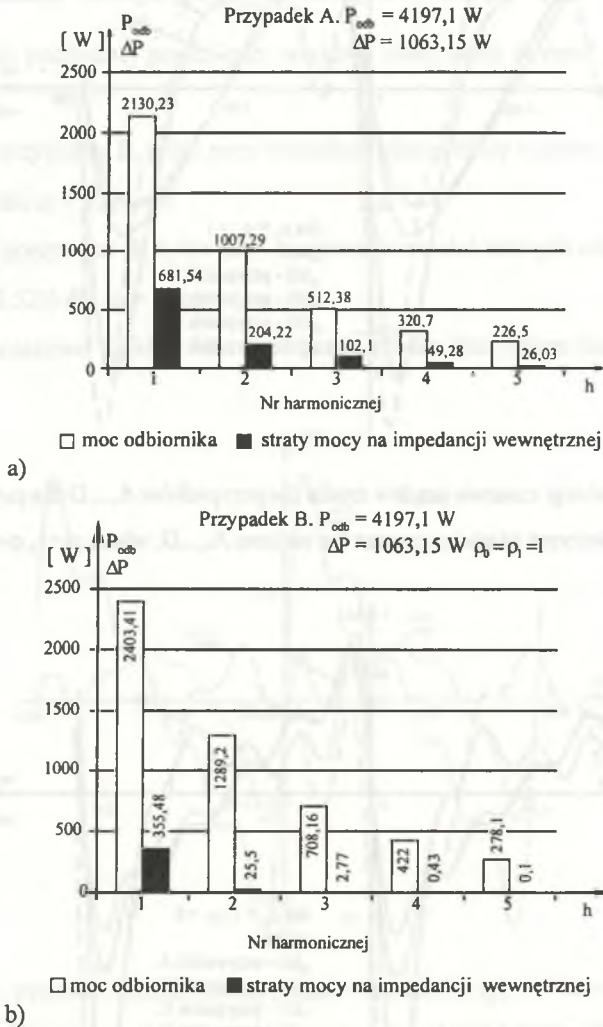


Rys.3.17. Przebiegi czasowe prądów źródła dla przypadków A,..., D dla $\rho_0=1$, $\rho_1=0$

Fig.3.17. Waveforms of source current for variants A,...,D, where $\rho_0=1$, $\rho_1=0$

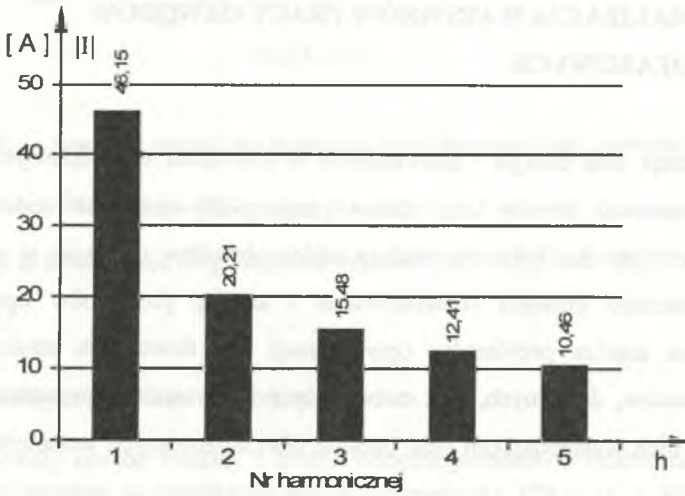
Wykresy słupkowe mocy odbiornika oraz strat mocy czynnej na impedancji wewnętrznej źródła dla przypadku A i B przedstawiono na rys.3.18.

Dla tych samych przypadków wykresy słupkowe prądów źródła przedstawiono na rys.3.19.

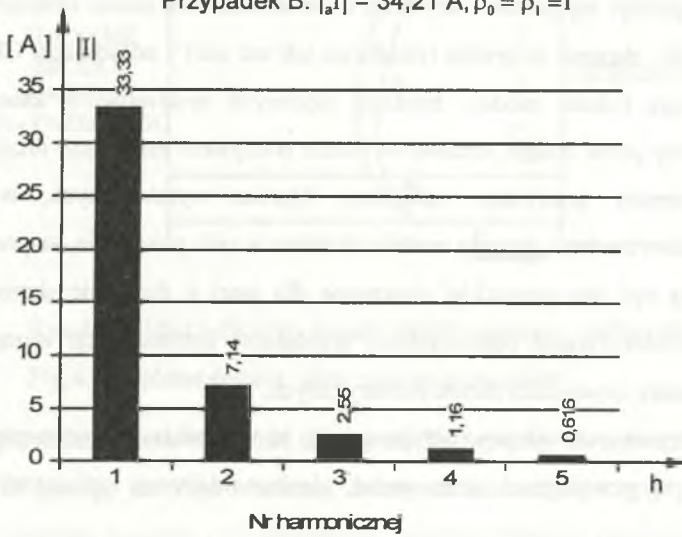


Rys.3.18. Wykres słupkowy mocy odbiornika oraz strat mocy na impedancji wewnętrznej źródła dla przypadków A, B

Fig.3.18. Bar chart of load power and power losses in the inner source impedance for variants A, B

Przypadek A. $|I| = 55,15 \text{ A}$ 

a)

Przypadek B. $|I_a| = 34,21 \text{ A}$, $\rho_0 = \rho_1 = 1$ 

b)

Rys.3.19. Wykres słupkowy prądów źródła dla przypadków A, B

Fig.3.19. Bar chart of source currents for variants A, B

4. OPTIMALIZACJA WARUNKÓW PRACY OBWODÓW WIELOFAZOWYCH

Minimalizacja strat energii i zniekształceń w obwodach wielofazowych ma duże znaczenie, ponieważ obwody takie stanowią najczęściej spotykane modele układów elektroenergetycznych. Złożoność struktur takich obwodów i zjawisk w nich występujących znacząco utrudnia rozwiązywanie i analizę problemów optymalizacji. Kompleksowa analiza problemów optymalizacji dla dowolnych struktur topologicznych układów, dowolnych, lecz mieszczących się w ramach przestrzeni Hilberta sygnałów w nich występujących oraz ogólnie sformalizowanych wskaźników jakości jest trudna [84, s. 53 ÷ 62]. Możliwe jest w tym przypadku co najwyżej postawienie problemów optymalizacyjnych, których rozwiązania (o ile istnieją) trudno jest interpretować i poddawać analizie jakościowej. Z wymienionych powodów w niniejszym rozdziale rozpatruje się przede wszystkim dwie stosunkowo proste struktury układów wielofazowych, złożone ze źródła (idealnego lub też nie) i odbiornika. Układy takie stanowią jednak modele bardziej złożonych systemów, z których jeden, reprezentowany przez źródło, stanowi w istocie podsystem zasilający, drugi natomiast stanowi zastępczy podsystem odbiorczy. Oprócz wymienionych, w rozdziale rozpatrzono dwa bardziej złożone modele układów w celu pokazania, że prezentowane metody mogą być bez przeszkód stosowane dla sieci o dowolnie skomplikowanej topologii. Rozwiązywanie odpowiednich problemów optymalizacji wymaga jednak w tym przypadku stosowania metod numerycznych.

Dla rozpatrywanych układów przyjmuje się, że wszystkie prądy i napięcia w nich występujące są przebiegami okresowymi, niesinusoidalnymi, opisanymi szeregami Fouriera:

$$u_{\alpha}(t) = U_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t), \quad (4.1)$$

$$i_{\alpha}(t) = I_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} I_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t), \quad (4.2)$$

$$\alpha \in \{1, \dots, n\},$$

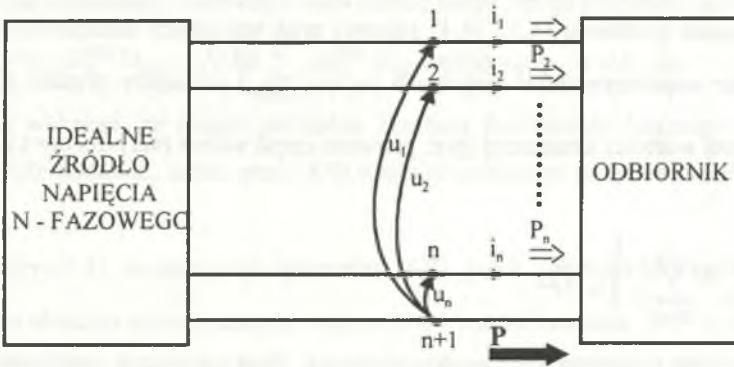
gdzie:

$U_{\alpha h}$, $I_{\alpha h}$ - wartości zespolone skuteczne h-tej harmonicznej napięcia lub prądu w fazie $\alpha \in \{1, \dots, n\}$.

Przebiegi te należą więc do przestrzeni sygnałowych $L^2_{T,n}$ lub $W^{2,p}_{T,n}$ opisanych w rozdziale 2.1.

4.1. Obwody ze źródłami idealnymi

Rozpatrywany obwód złożony z dwóch wielobiegunników o liczbie zacisków $n+1$, $n \in \mathbb{N}$ (rys.4.1).



Rys.4.1. Układ n-fazowy: idealne źródło napięcia - odbiornik

Fig.4.1. n-phase system: ideal voltage source-load

Pierwszy z nich zawiera wyłącznie idealne źródła napięcia, natomiast drugi stanowi odbiornik, do którego jest doprowadzany zadany strumień mocy czynnej P . W rozpatrywanym układzie dowolny $n+1$ wyróżniony przewód stanowi przewód odniesienia, względem którego określone są napięcia fazowe. Napięcia $\mathfrak{u} = (u_{\alpha}) = (u_1, \dots, u_n)$ i prądy fazowe $\mathfrak{i} = (i_{\alpha}) = (i_1, \dots, i_n)$, $n \in \mathbb{N}$ są elementami przestrzeni sygnałowych $L^2_{T,n}$ lub $W^{2,p}_{T,n}$. Impedancje przewodów łączących źródło z odbiornikiem są pomijalnie małe

w tym sensie, że napięcia na nich występujące są niewielkie w stosunku do napięć źródłowych, niemniej jednak straty mocy czynnej wydzielanej na tych impedancjach nie są pomijalne w stosunku do mocy czynnej przesyłanej ze źródła do odbiornika.

Minimalizacja wartości skutecznych i zniekształceń prądów źródła, przy ograniczeniu na moc czynną odbiornika, prowadzi (podobnie jak w przypadku układu jednofazowego, rozdz.3.1) do rozwiązania poniższego problemu minimalizacji:

$$\min_i \|\hat{i}\|_{W_n}^2 = \min_{(i)} \left[\rho_0 \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T i_{\alpha}^2(t) dt + \sum_{k=1}^m \rho_k \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T [D^k i_{\alpha}]^2(t) dt \right], \quad (4.3)$$

przy ograniczeniu:

$$P = \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha} = (\mathbb{M}, \hat{i})_{L,n} = \sum_{\alpha=1}^n (u_{\alpha}, i_{\alpha})_L = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T u_{\alpha}(t) i_{\alpha}(t) dt, \quad (4.4)$$

gdzie:

P - zadana, całkowita moc czynna odbiornika z rys.4.1.

Rozwiązanie problemu (4.3), (4.4) stanowi prąd realizujący kompromis (ustalony przez dobór współczynników wagowych $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_m$) pomiędzy prądem (i_{α}) źródła o minimalnej wartości skutecznej (por. pierwsza część wzoru (4.3) dla $\rho_0=1$), w sensie wzoru:

$$\|\hat{i}\|_{L,n}^2 = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T i_{\alpha}^2(t) dt, \quad (4.5)$$

a prądem źródła o minimalnych zniekształceniach. Prąd optymalny umożliwi ponadto doprowadzenie do odbiornika zadanej całkowitej mocy czynnej P.

Z powyższych stwierdzeń wynika, że rozwiązanie omawianego problemu nie umożliwia symetryzacji wartości skutecznych i zniekształceń prądów oraz mocy fazowych doprowadzanych do odbiornika (rys.4.1).

Wykorzystując wzory (2.13), (2.24) utworzyć można funkcjonal Lagrange'a problemu (4.3), (4.4) zgodnie z wzorem:

$$L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \nabla_h^2 (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n (A_{\alpha h} C_{\alpha h} + B_{\alpha h} D_{\alpha h}) \right], \quad (4.6)$$

gdzie:

$I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h}$; $U_{\alpha h} = C_{\alpha h} - jD_{\alpha h}$ - wartości zespolone skuteczne h-tej harmonicznej prądu lub napięcia źródła w fazie α ,

λ - mnożnik Lagrange'a.

Z warunków koniecznych minimum tego funkcjonału (por. rozdz.3.1) wynika układ równań liniowych ze względu na zmienne $A_{\alpha h}$, $B_{\alpha h}$, λ , którego rozwiązanie ma postać:

$${}_a I_{\alpha h} = {}_e G_h^{(n)} U_{\alpha h}, \quad (4.7)$$

gdzie:

${}_e G_h^{(n)}$ - konduktancja zastępcza odbiornika n+1 fazowego, określona wzorem:

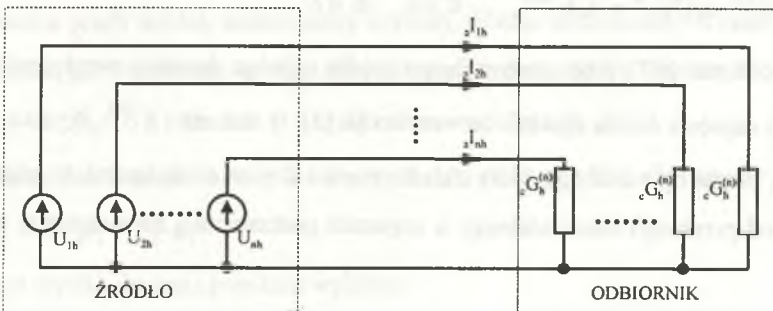
$${}_e G_h^{(n)} = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^{-2} \sum_{\alpha=1}^n (C_{\alpha k}^2 + D_{\alpha k}^2)}, \quad h \in N. \quad (4.8)$$

Stąd prąd optymalny stanowiący rozwiązanie omawianego problemu określa wzór:

$${}_a i_{\alpha}(t) = {}_e G_0^{(n)} U_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_e G_h^{(n)} U_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Można wykazać, że drugie pochodne Frecheta funkcjonału Lagrange'a (4.6) są zawsze ściśle dodatnie, zatem prąd (4.9) realizuje minimum globalne problemu (4.3), (4.4).

Źródło (rys.4.2) wydaje prąd optymalny (4.9), jeżeli odbiornik dla każdej harmonicznej jest układem symetrycznym, n-fazowym, o konduktancjach ${}_e G_h^{(n)}$ (rys.4.2).



Rys.4.2. Optymalny stan pracy układu z rys.4.1 dla h-tej harmonicznej

Fig.4.2. Optimal operating state of system shown in Fig.4.1 for h-th harmonic

Uwaga

Jeśli przyjmie się dla problemu (4.3), (4.4) współczynniki wagi ρ_k równe:

$$\rho_0 = 1, \rho_k = 0, \quad \text{dla } k \geq 1 \quad (4.10)$$

rozwiązanie tego problemu sprowadza się do minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła, w sensie wzoru (4.5), przy ograniczeniu (4.4). Uzyskuje się wtedy prąd optymalny określony wzorem:

$${}_a i_\alpha(t) = {}_e G^{(n)} U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[{}_e G^{(n)} \sum_{h=1}^{\infty} U_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t) \right], \quad (4.11)$$

gdzie:

$${}_e G^{(n)} = \frac{P}{\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n |U_{\alpha h}|^2} = \frac{P}{\|u\|_{L,n}^2}. \quad (4.12)$$

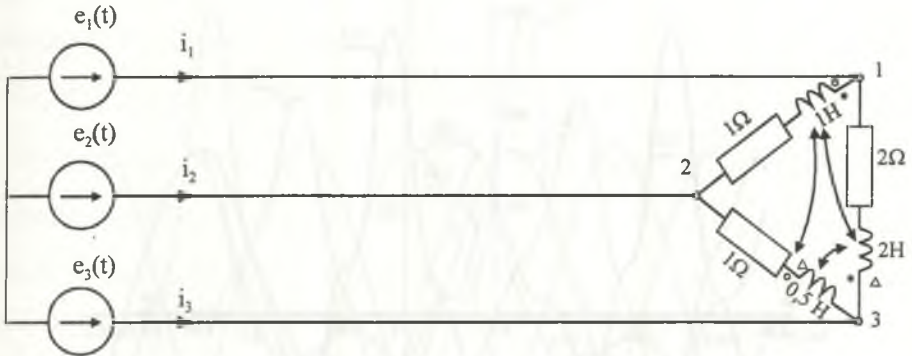
Prąd ten uzyskany został inną drogą przez S.Fryzego [39] i stanowi podstawę wielu teorii mocy. Prąd aktywny (4.12) umożliwia doprowadzenie do odbiornika zadanej, całkowitej, mocy czynnej P przy minimalnej wartości funkcjonału (4.5). Zniekształcenia prądu aktywnego S.Fryzego są identyczne (por. wzór (4.11)) z zniekształceniami napięcia źródła.

Oszacowanie zniekształceń prądu optymalnego (4.9) wynika ze wzoru (4.8) i stąd:

$$\left| {}_e G_h^{(n)} \right| \leq C V_n^{-2} = C h^{-2m}, \quad C > 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Harmoniczne (4.7) prądu optymalnego źródła są więc tłumione względem harmonicznych napięcia źródła zgodnie ze wzorem (4.13), w stosunku h^{-2m} . Wynika stąd, że przebieg prądu optymalnego (4.9) układu z rys.4.1 różnić się będzie w niewielkim stopniu od przebiegu sinusoidalnego o częstotliwości podstawowej harmonicznej napięcia źródła.

Przykład 4.1



Rys.4.3. Schemat odbiornika trójfazowego

Fig.4.3. The scheme of three-phase load

Odbiornik trójfazowy przedstawiony na rys.4.3 o następujących danych:

$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$, $Z_{11} = (1 + j1) \Omega$, $Z_{22} = (1 + j0,5) \Omega$, $Z_{33} = (2 + j2) \Omega$, $Z_{12} = Z_{21} = Z_{32} = Z_{13} = Z_{31} = j0,5 \Omega$, zasilano ze źródła o napięciu

$$e_1(t) = \sqrt{2}(120 \cos \omega_0 t + 60 \cos 2\omega_0 t + 30 \cos 4\omega_0 t + 24 \cos 5\omega_0 t) \text{ V.}$$

Zakłada się, że $e_2(t) = e_1(t - T/3)$, $e_3(t) = e_2(t - T/3)$.

Całkowita moc czynna doprowadzona do odbiornika wynosi: $P = 113,76 \text{ kW}$.

Dla rozpatrywanego układu obliczono:

A. Pierwotne prądy źródeł, widmo mocy czynnej, widmo harmonicznego prądu.

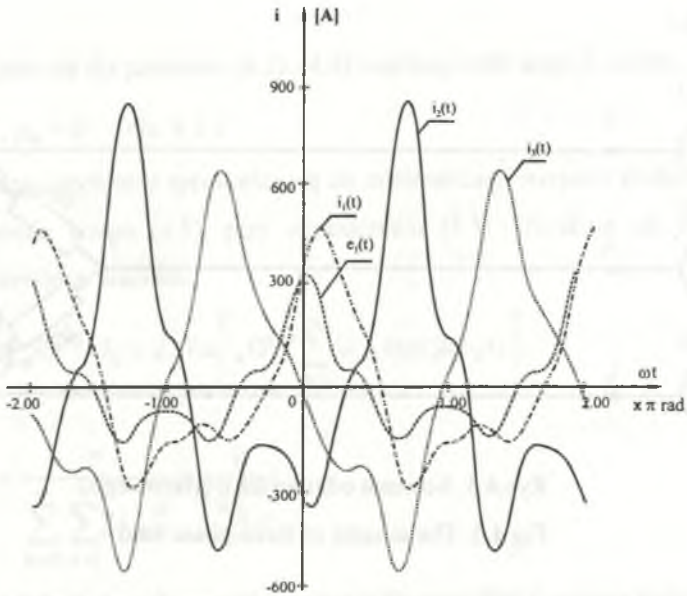
B. Wielkości jak w punkcie A, tylko dla prądu optymalnego (4.9), dla danych:

$$\rho_0 = 1, \rho_k = 0, \text{ dla } k \geq 1 \quad (\text{prąd aktywny S.Fryze}).$$

C. Wielkości jak w punkcie A, tylko dla prądu optymalnego (4.9), dla danych:

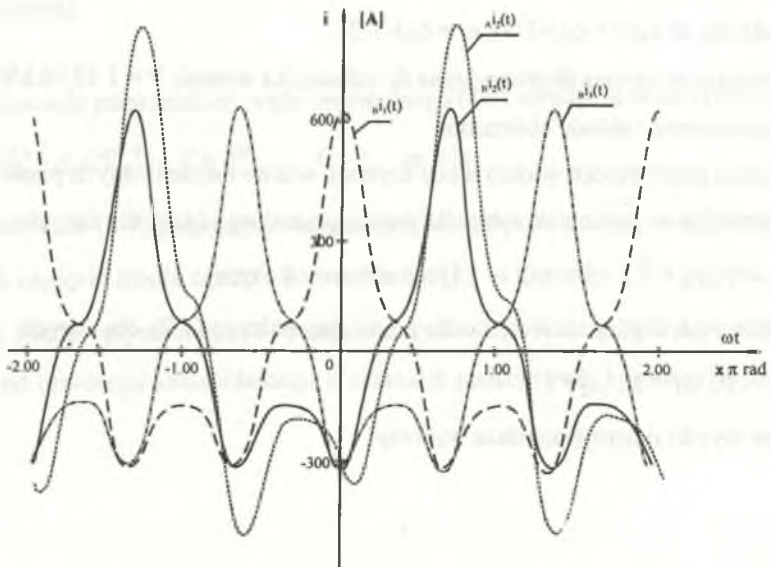
$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 1, \rho_2 = 1.$$

Uzyskane wyniki ilustrują poniższe wykresy:



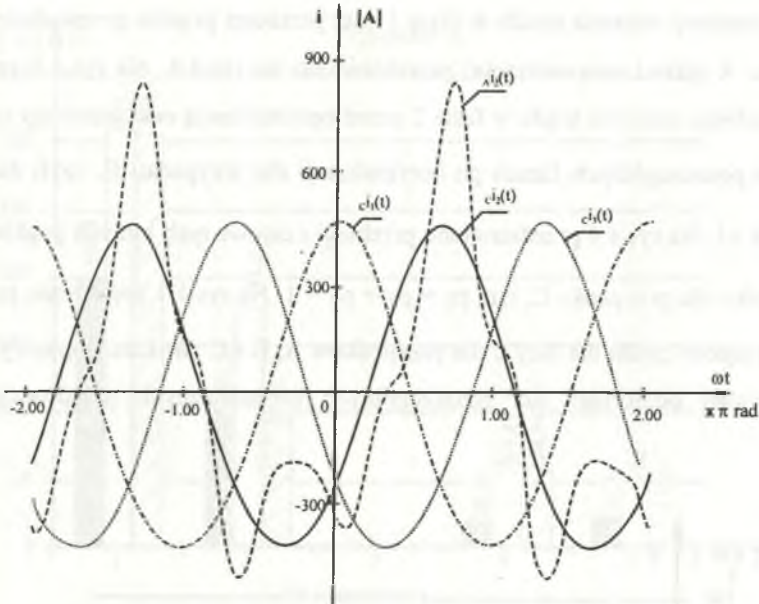
Rys.4.4. Przebieg czasowy napięcia źródła w fazie 1 oraz przebiegi prądów przewodowych przed optymalizacją

Fig.4.4. Waveforms of voltage source in the first phase and waveforms of line currents before optimization



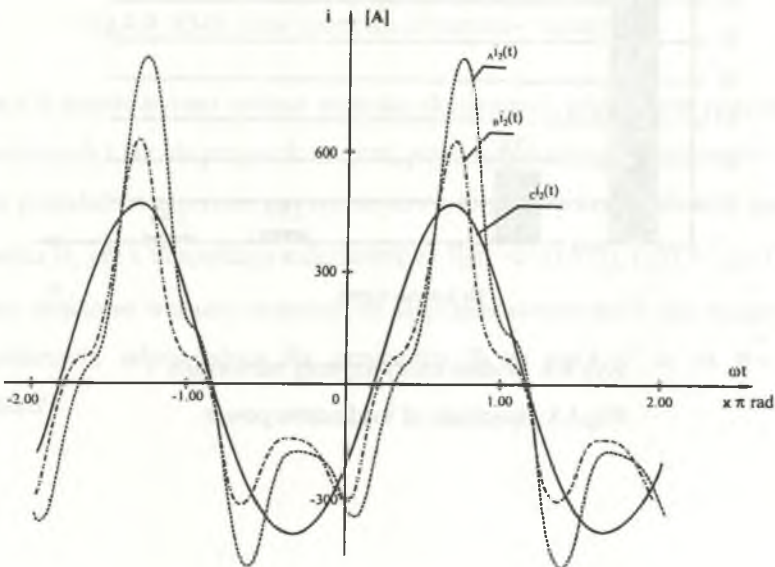
Rys.4.5. Pierwotny prąd w fazie 2 oraz prądy po optymalizacji

Fig.4.5. Primary current in the second phase and currents after optimization



Rys.4.6. Prądy fazowe po optymalizacji - wariant C

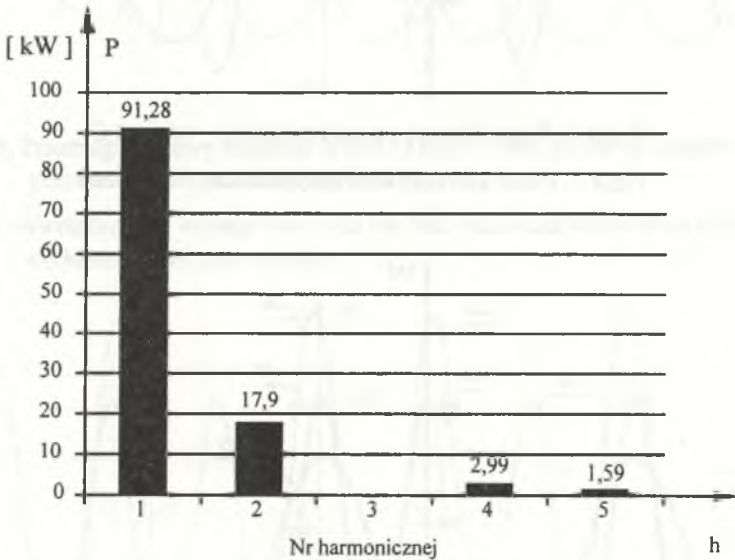
Fig.4.6. Phase currents after optimization - C variant



Rys.4.7. Prądy fazowe po optymalizacji - wariant A, B, C

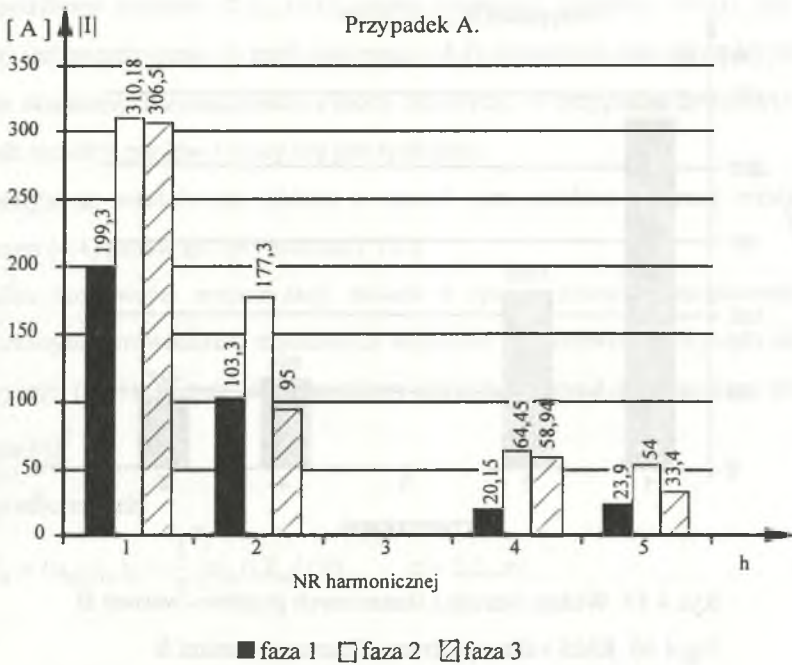
Fig.4.7. Phase currents after optimization - variant A, B, C

Przebieg czasowy napięcia źródła w fazie 1 oraz przebiegi prądów przewodowych dla przypadku A (przed optymalizacją) przedstawiono na rys.4.4. Na rys.4.5 przedstawiono przebiegi czasowe prądu w fazie 2 przed optymalizacją oraz przebiegi czasowe prądów w poszczególnych fazach po optymalizacji dla przypadku B, czyli dla $\rho_0=1$, $\rho_k=0$ dla $k \geq 1$. Na rys.4.6 przedstawiono przebiegi czasowe tych samych prądów co na rys.4.5, tylko dla przypadku C, tzn. $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1$. Na rys.4.7 zestawiono przebiegi czasowe prądów źródła dla fazy 2 dla przypadków A, B i C. Wykres słupkowy widma mocy czynnej odbiornika dla poszczególnych harmonicznych przedstawiono na rys.4.8.



Rys.4.8. Widma mocy czynnej odbiornika

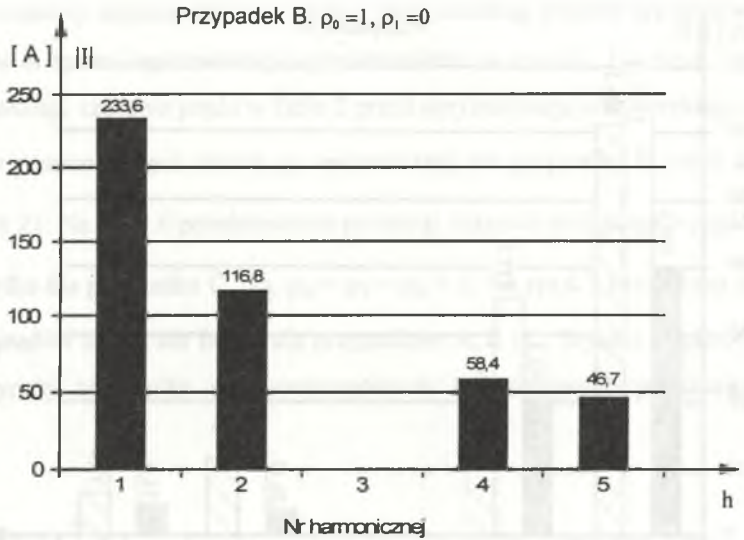
Fig.4.8. Spectrum of load active power



Rys.4.9. Widma wartości skutecznych prądów - wariant A

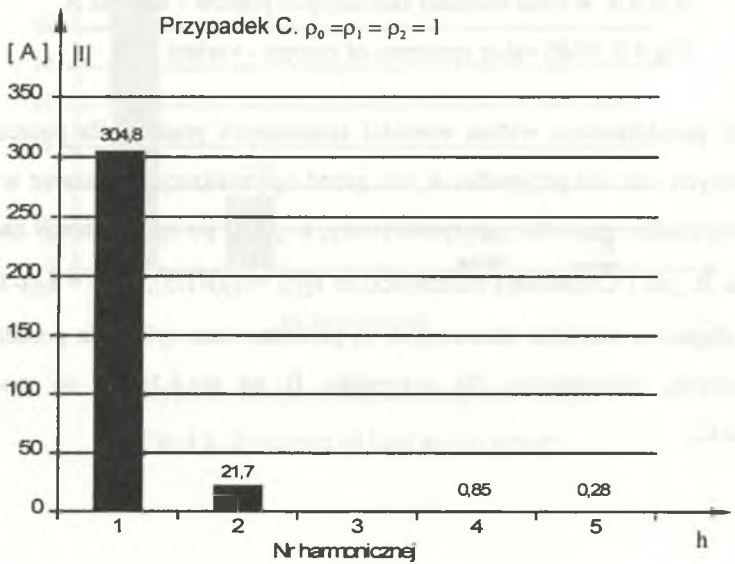
Fig.4.9. RMS value spectrum of current - variant A

Na rys.4.9 przedstawiono widma wartości skutecznych prądów dla poszczególnych harmoniczných i faz dla przypadku A, tzn. przed optymalizacją. Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie generator jest symetryczny, to prądy po optymalizacji zarówno dla przypadku B, jak i C spełniają zależności, że $i_2(t) = i_1(t-T/3)$, $i_3(t) = i_2(t-T/3)$, więc wykresy słupkowe wartości skutecznych są przedstawione tylko dla poszczególnych harmoniczných, odpowiednio dla przypadku B na rys.4.10, a na rys.4.11 dla przypadku C.



Rys.4.10. Widma wartości skutecznych prądów - wariant B

Fig.4.10. RMS value spectrum of current - variant B



Rys.4.11. Widma wartości skutecznych prądów - wariant C

Fig.4.11. RMS value spectrum of current - variant C

Na podstawie wzorów (4.8), (4.9) można zauważyć, że tylko wtedy, gdy źródło (rys.4.1) jest symetryczne, to prąd optymalny (4.9) umożliwia symetryzację (równość) wartości skutecznych zniekształceń i mocy fazowych. W przypadku dowolnych źródeł własność symetrii prądów i mocy nie jest spełniona.

Symetryzacja właściwości układu z rys.4.1 jest możliwa poprzez modyfikację ograniczeń (4.4) problemu optymalizacji. [85]

Analiza możliwości symetryzacji układu z rys.4.1 zostanie przeprowadzona z równoczesnym porównaniem uzyskanych wyników z właściwościami prądu aktywnego S.Fryzego (4.11). W tym celu rozpatrzmy dla układu z rys.4.1 następujący problem:

$$\min_{(i)} \|i\|_{L,n}^2 \quad (4.14)$$

przy ograniczeniach:

$$P_\alpha = (u_\alpha, i_\alpha)_L = \frac{1}{T} \int_0^T u_\alpha(t) i_\alpha(t) dt, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (4.15)$$

gdzie:

P_α - zadane fazowe moce czynne odbiornika.

Prąd optymalny ($a i_\alpha$) stanowiący rozwiązanie problemu (4.14), (4.15), podobnie jak prąd S.Fryzego (4.11), ma minimalną wartość skuteczną w sensie wzorów (4.5), (4.14), a ponadto umożliwia on doprowadzenie zadanych mocy czynnych P_α do odbiornika. Funkcjonał Lagrange'a rozpatrywanego problemu określa wzór:

$$L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda_\alpha) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \left[P_\alpha - \sum_{h=0}^{\infty} (A_{\alpha h} C_{\alpha h} + B_{\alpha h} D_{\alpha h}) \right], \quad (4.16)$$

gdzie:

λ_α - mnożniki Lagrange'a.

Można wykazać [85], że warunki konieczne i wystarczające minimum omawianego problemu są zawsze spełnione, a jego rozwiązanie określa wzór:

$${}_a i_\alpha(t) = {}_e G_\alpha^{(n)} U_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_e G_\alpha^{(n)} U_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (4.17)$$

gdzie:

$eG_{\alpha}^{(n)}$ - konduktancje zastępcze odbiornika dla fazy $\alpha=1,2,..,n$, określone wzorem:

$$eG_{\alpha}^{(n)} = \frac{P_{\alpha}}{\|u_{\alpha}\|_L^2}. \quad (4.18)$$

Porównanie prądu optymalnego (4.17) oraz prądu aktywnego S.Fryzego (4.11) przedstawiono w tabelicy 4.1, dla niesymetrycznego źródła napięcia wielofazowego spełniającego warunki:

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}} \|u_{\alpha}\|_L \neq \|u_{\beta}\|_L. \quad (4.19)$$

Tabela 4.1

Porównanie prądów (4.11), (4.17)

Lp.	Wielkość	Prąd aktywny S. Fryzego - wzór (4.11)	Prąd optymalny - wzór (4.17)
1	Konduktancje zastępcze $eG_{\alpha}^{(n)}, eG_{\alpha}^{(n)}$	$eG^{(n)} = \frac{P}{\sum_{\alpha=1}^n \ u_{\alpha}\ _L^2}$ jednakowe dla każdej fazy	$eG_{\alpha}^{(n)} = \frac{P_{\alpha}}{\ u_{\alpha}\ _L^2}.$ zależą od numeru fazy
2	Moce fazowe (przy założeniu, że $P = \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha}$)	$P'_{\alpha} = P \frac{\ u_{\alpha}\ _L^2}{\sum_{\beta=1}^n \ u_{\beta}\ _L^2}$	P_{α} - zadane, w szczególności $P_1 = P_2 = \dots = P_n$
3	Wartości skuteczne prądów fazowych	$\ i'_{\alpha}\ _L = P \frac{\ u_{\alpha}\ _L}{\sum_{\alpha=1}^n \ u_{\alpha}\ _L^2}$ zależą od symetrii źródła	$\ i_{\alpha}\ _L = \frac{P_{\alpha}}{\ u_{\alpha}\ _L}$ zależą od zadanych mocy P_{α} i asymetrii źródła

Ze wzorów zamieszczonych w tablicy 4.1 wynika, że:

- A. Dla prądu optymalnego (4.17) wartość konduktancji zastępczych odbiornika zależy od numeru fazy, a optymalny stan pracy układu z rys.4.1 wystąpi wtedy, gdy odbiornik (rys.4.2) stanowi niesymetryczną n-fazową gwiazdę o konduktancjach $eG_{\alpha}^{(n)}$. Dla prądu aktywnego S.Fryzego odbiornik ten stanowi układ rezystancyjny typu gwiazda o równych i niezależnych od częstotliwości konduktancjach $eG^{(n)}$ (4.12).
- B. Fazowe moce czynne doprowadzane do odbiornika za pośrednictwem prądu aktywnego S.Fryzego są różne i zdeterminowane niesymetrią źródeł (por. wzór (4.19)). Moce fazowe P_{α} doprowadzane przez prąd (4.17) są zadane i w szczególności mogą być one równe.
- C. Wartości skuteczne prądów fazowych dla obydwu rozpatrywanych prądów (4.11), (4.17) są różne, a symetryzacja (równość) mocy fazowych nie pociąga za sobą (dla źródła niesymetrycznego) równości wartości skutecznych prądów fazowych.

Inna niż to opisano modyfikacja problemu optymalizacji dla układu z rys.4.1 prowadzi [85] do:

- minimalizacji zniekształceń prądów fazowych źródła,
- symetryzacji (równości) prądów fazowych,
- symetryzacji (równości) mocy fazowych odbiornika.

Modyfikacja ta polega na minimalizacji funkcjonału (4.3), przy ograniczeniach:

$$P_{\alpha} = (u_{\alpha}, i_{\alpha})_L, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (4.20)$$

$$\varepsilon_{\beta} = \|i_1\|_L^2 - \|i_{\beta}\|_L^2, \quad \beta = 2, 3, \dots, n, \quad (4.21)$$

gdzie:

P_{α} - zadane moce fazowe odbiornika,

ε_{β} - liczby określające dopuszczalną niesymetrię wartości skutecznych prądów fazowych.

Funkcjonał Lagrange'a przedstawionego problemu określa wzór:

$$L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^n (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\ + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \left[P_{\alpha} - \sum_{h=0}^{\infty} (A_{\alpha h} C_{\alpha h} + B_{\alpha h} D_{\alpha h}) \right] + \\ + \sum_{\beta=2}^n \mu_{\beta} \left[\sum_{h=0}^{\infty} (A_{1h}^2 + B_{1h}^2) - \sum_{h=0}^{\infty} (A_{\beta h}^2 + B_{\beta h}^2) \right] \quad (4.22)$$

gdzie:

$\lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}$ ($\alpha \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in \{2, \dots, n\}$) - mnożniki Lagrange'a.

Minimum funkcyjonału (4.22) realizuje [85] prąd optymalny:

$$i_{\alpha}(t) = e^{G_{\alpha 0}^{(n)}} U_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{\alpha h}^{(n)} U_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t), \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.23)$$

gdzie:

$e^{G_{\alpha h}^{(n)}}$ - konduktancje zastępcze odbiornika w fazie α , dla h -tej harmonicznej, określone wzorem:

$$e^{G_{\alpha h}^{(n)}} = \frac{\lambda_{\alpha}^*}{2(\nabla_h^2 + \Lambda_{\alpha})}, \quad (4.24)$$

$$\Lambda_{\alpha} = \begin{cases} -\sum_{\beta=2}^n \mu_{\beta}^*, & \text{dla } \alpha = 1, \\ \mu_{\beta}^* \Big|_{\beta=\alpha}, & \text{dla } \alpha > 1. \end{cases} \quad (4.25)$$

Ciągi mnożników Lagrange'a: $\lambda_1^*, \dots, \lambda_h^*, \mu_2^*, \dots, \mu_h^*$ występujące we wzorze (4.25) określa się przez rozwiązanie układu równań, wynikłego z przyrównania do zera pochodnych funkcyjonału Lagrange'a (4.22) względem zmiennych $\lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}$:

$$P_{\alpha} - \lambda_{\alpha} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|U_{\alpha h}|^2}{2(\nabla_h^2 + \Lambda_{\alpha})} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_{\beta} \left[P_1^2 \frac{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{|U_{1h}|^2}{(\nabla_n^2 + \Lambda_1)^2}}{\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{|U_{\alpha h}|^2}{(\nabla_h^2 + \Lambda_1)^2} \right]^2} - P_{\beta} \frac{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{|U_{\beta h}|^2}{(\nabla_n^2 + \Lambda_{\beta})^2}}{\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{|U_{\beta h}|^2}{(\nabla_n^2 + \Lambda_{\beta})^2} \right]^2} \right] = 0. \quad (4.27)$$

Można wykazać, że jeżeli rozwiązanie tego układu równań spełnia warunki:

$$\bigwedge_{\beta \in \{2, \dots, n\}} \mu_{\beta}^* > 0 \quad \wedge \quad \bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \left(\nabla_h^2 - \sum_{\beta=2}^n \mu_{\beta}^* \right) > 0, \quad (4.28)$$

to rozpatrywany problem minimalizacji ma rozwiązanie. Rozwiązanie układu równań (4.26), (4.27) możliwe jest jednak wyłącznie metodami numerycznymi.

Optymalny stan pracy układu z rys.4.1, charakteryzowany prądem aktywnym (4.23), wystąpi wtedy, gdy odbiornik (rys.4.2) stanowić będzie układ typu niesymetryczna gwiazda o konduktancjach $e G_{\alpha h}^{(n)}$ (4.24) dla poszczególnych harmonicznym napięcia źródła.

Jeżeli mnożniki Lagrange'a λ_{α}^* , μ_{β}^* mają oszacowania:

$$\max_{\alpha} \{ \lambda_{\alpha}^* \} = C_1, \quad (4.29)$$

$$\max_{\beta} \{ \mu_{\beta}^* \} = C_2, \quad (4.30)$$

to harmoniczne prądu optymalnego (4.23) można oszacować zgodnie z wzorem:

$$|{}_a I_{\alpha h}| \leq C |E_h| h^{-2m}, \quad C > 0, \quad (4.31)$$

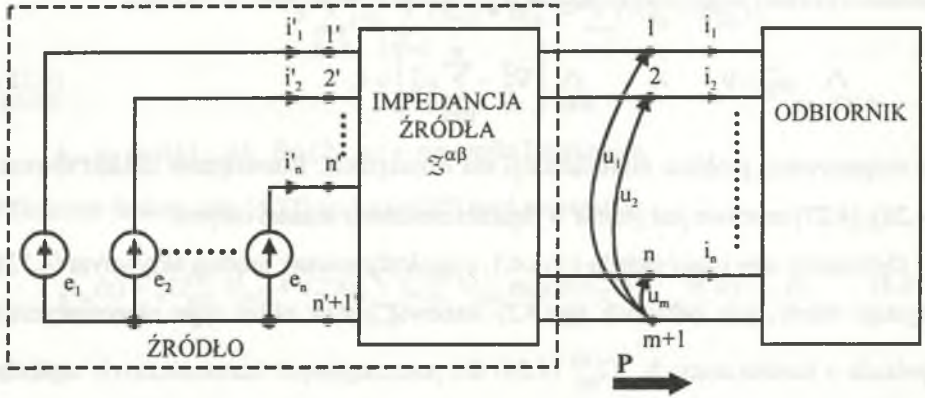
gdzie:

m - maksymalny rząd pochodnej występującej we wzorze (4.3).

Tak więc prąd optymalny (4.23) ma niewielkie zniekształcenia (podobnie jak wszystkie prądy optymalne uzyskane w wyniku minimalizacji funkcjonu (4.3)), zapewnia symetrię mocy fazowych i wartości skutecznych prądów fazowych odbiornika i umożliwi efektywną pracę układu z idealnym źródłem napięcia wielofazowego, niesinusoidalnego o dowolnych asymetriach.

4.2. Obwody ze źródłami rzeczywistymi

Uwzględnienie impedancji wewnętrznej źródeł i impedancji toru transmisyjnego łączącego źródło z odbiornikiem w układzie z rys.4.1, prowadzi do układu przedstawionego na rys.4.2. Wymienione impedancje są modelowane w postaci $2n+2$, $n \in \mathbb{N}$ wielobiegunnika opisanego operatorem $\mathcal{Z}^{\alpha\beta}$, $\alpha \in \{1, \dots, n\}$, $\beta \in \{1, \dots, m\}$.

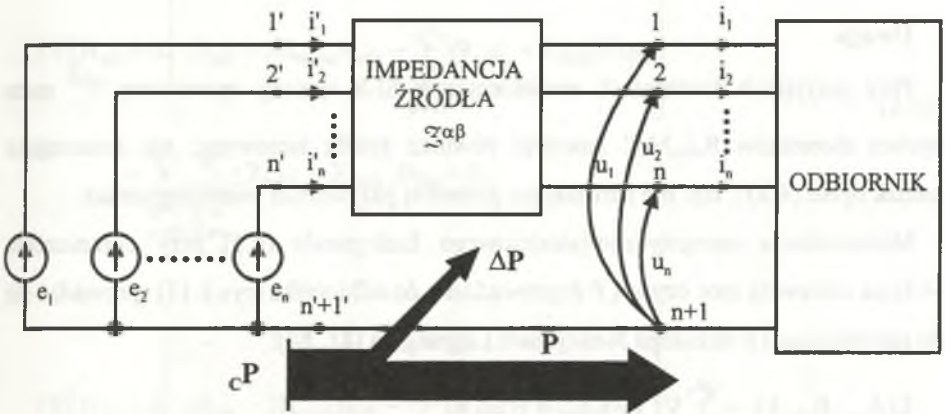


Rys.4.12. Układ wielofazowy z rzeczywistym źródłem napięcia

Fig.4.12. Multi-phase system with non-ideal voltage source

Optimalizacja warunków pracy takiego układu jest złożona i zostanie opisana w rozdz. 4.3. W rozdziale niniejszym rozpatrywany jest uproszczony wariant układu z rys.4.12, który przedstawiono na rys.4.13. Operator impedancyjny $\mathcal{Z}^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$, opisujący impedancję źródła (rys.4.16), określają wzory:

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha} &= e_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^n \left[\mathcal{Z}^{\alpha\beta} i_{\beta} \right] (t), \\ i'_{\alpha} &= i_{\alpha}, \\ \alpha &\in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$



Rys.4.13. Uproszczony wariant układu z rys.4.12

Fig.4.13. Simplified variant of system shown in Fig.4.12

Zakładając dodatkowo, że operator $\mathcal{Z}^{\alpha\beta}$ jest liniowy i czasowo-niezmieniczny można zauważyć, że jego reprezentację widmową stanowi ciąg macierzy nieskończonych $Z_{\alpha\beta h}$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$, $h \in \mathbb{N}$, złożonych z transformacji Fouriera jąder operatorów $Z^{\alpha\beta}$ typu splotu, obliczonych dla częstotliwości $\omega_h = h\omega_0$, $h \in \mathbb{N}$. Tak więc opisowi (4.32) w dziedzinie czasu odpowiada równoważny opis w dziedzinie częstotliwości:

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha h} &= E_{\alpha h} - \sum_{\beta=1}^n Z_{\beta h} I_{\beta h}, \\ I'_{\alpha h} &= I_{\alpha h}, \\ \alpha &\in \{1, \dots, n\}, h \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

gdzie:

$$Z_{\alpha\beta h} = R_{\alpha\beta h} + j X_{\alpha\beta h}, \quad (4.34)$$

$E_{\alpha h}$, $U_{\alpha h}$, $I'_{\alpha h}$, $I_{\alpha h}$ - wartości zespolone skuteczne napięć i prądów układu z rys.4.13 w fazie α i dla h -tej harmonicznej.

Uwaga

Przy przyjętych założeniach wielobiegunnik SLS opisany operatorem $\mathcal{Z}^{\alpha\beta}$ może oprócz elementów R,L,M,C zawierać również źródła sterowane, nie naruszające jednak opisu (4.33), tzn. nie naruszające globalnej pasywności wielobiegunnika.

Minimalizacja energetyczno-jakościowego funkcjonału (4.3) przy ograniczeniu (4.4) na całkowitą moc czynną P doprowadzaną do odbiornika (rys.4.13) sprowadza się do minimalizacji poniższego funkcjonału Lagrange'a [81, 84]:

$$\begin{aligned}
 L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda) = & \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^n (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\
 & + \lambda \left[P - \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n ({}_1E_{\alpha h} A_{\alpha h} + {}_2E_{\alpha h} B_{\alpha h}) + \right. \\
 & + \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n R_{\alpha\alpha h} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\
 & + \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n R_{\alpha\beta h} (A_{\alpha h} A_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h}) + \\
 & \left. + \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n X_{\alpha\beta h} (A_{\alpha h} B_{\beta h} + B_{\beta h} A_{\alpha h}) \right], \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$E_{\alpha h} = {}_1E_{\alpha h} - j {}_2E_{\beta h},$$

$$I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - j B_{\beta h}.$$

Z warunków koniecznych minimum funkcjonału (4.35) uzyskuje się następujący układ równań:

$$2\nabla_h^2 A_{\alpha h} - \lambda \left[{}_1 E_{\alpha h} - 2R_{\alpha\alpha h} A_{\alpha h} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) A_{\beta h} \right] - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) B_{\beta h} = 0, \quad (4.36)$$

$$2\nabla_h^2 B_{\alpha h} - \lambda \left[{}_2 E_{\alpha h} - 2R_{\alpha\alpha h} B_{\alpha h} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) B_{\beta h} \right] - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) A_{\beta h} = 0, \quad (4.37)$$

$$\alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in \mathbb{N},$$

$$P - \sum_{h=0}^{\infty} \left[\sum_{\alpha=1}^n \left\{ ({}_1 E_{\alpha h} A_{\alpha h} + {}_2 E_{\alpha h} B_{\alpha h}) - R_{\alpha\alpha h} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) \right\} - \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq \beta}}^n \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \left\{ R_{\alpha\beta h} (A_{\alpha h} B_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h}) - X_{\alpha\beta h} (A_{\alpha h} B_{\beta h} + A_{\beta h} B_{\alpha h}) \right\} \right], \quad (4.38)$$

gdzie: λ - mnożnik Lagrange'a.

Układ równań (4.36), (4.37) można zapisać w postaci równania macierzowego, dla każdej harmonicznej $h \in \mathbb{N}$:

$$A_h \mathbb{X}_h = \mathbb{E}_h, \quad (4.39)$$

gdzie:

$$\mathbb{X}_h = [A_{1h}, A_{2h}, \dots, A_{nh}, B_{1h}, B_{2h}, \dots, B_{nh}]^T,$$

$$\mathbb{E}_h = [{}_1 E_{1h}, {}_1 E_{2h}, \dots, {}_1 E_{nh}, {}_2 E_{1h}, {}_2 E_{2h}, \dots, {}_2 E_{nh}]^T,$$

A_h - macierz blokowa o wymiarach $2n \times 2n$ i o budowie przedstawionej poniżej.

$$\mathbb{A}_h = \begin{bmatrix} M_h & N_h \\ N_h & M_h \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

$$M_{\alpha\beta h} = \begin{cases} 2\nabla_h^2 + 2R_{\alpha\alpha h}\lambda, & \text{dla } \alpha = \beta, \\ \lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}), & \text{dla } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (4.41)$$

$$N_{\alpha\beta h} = \begin{cases} 0, & \text{dla } \alpha = \beta, \\ \lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (X_{\alpha\beta h} + X_{\beta\alpha h}), & \text{dla } \alpha > \beta, \\ -\lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n (X_{\alpha\beta h} + X_{\beta\alpha h}), & \text{dla } \alpha < \beta. \end{cases} \quad (4.42)$$

Jeżeli

$$\bigwedge_{h \in N} \det M_h \neq 0 \quad \wedge \quad \det(M_h - N_h M_h^{-1} N_h) \neq 0, \quad (4.43)$$

to rozwiązanie układu równań (4.39) istnieje i wyraża się wzorem:

$$A_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^n {}_1 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) {}_1 E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^n {}_2 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) {}_2 E_{\beta h}, \quad (4.44)$$

$$B_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^n {}_3 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) {}_1 E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^n {}_4 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) {}_2 E_{\beta h}, \quad (4.45)$$

$\alpha \in \{1, \dots, n\}$

gdzie:

$$A_h^{-1} = \begin{bmatrix} [{}_1 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*)] & [{}_2 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*)] \\ [{}_3 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*)] & [{}_4 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*)] \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

macierz odwrotna względem macierzy \mathbb{A}_h (4.40).

Wartość mnożnika Lagrange'a λ_* stanowi rozwiązanie nieliniowego układu równań algebraicznych, który uzyskuje się podstawiając wzory (4.44), (4.45) do równania bilansu mocy (4.38). Równanie to można rozwiązywać wyłącznie metodami numerycznymi.

Z równań (4.44), (4.45) wynika, że harmoniczne prądu optymalnego, stanowiącego punkt stacjonarny funkcjonału (4.35), określa wzór:

$${}_a I_{\alpha h} = \lambda_* \sum_{\beta=1}^n \left[{}_1 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) - j {}_3 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) \right] {}_1 E_{\beta h} + \left[{}_2 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) - j {}_4 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) \right] {}_2 E_{\beta h} , \quad (4.47)$$

a zatem prąd optymalny określa wzór:

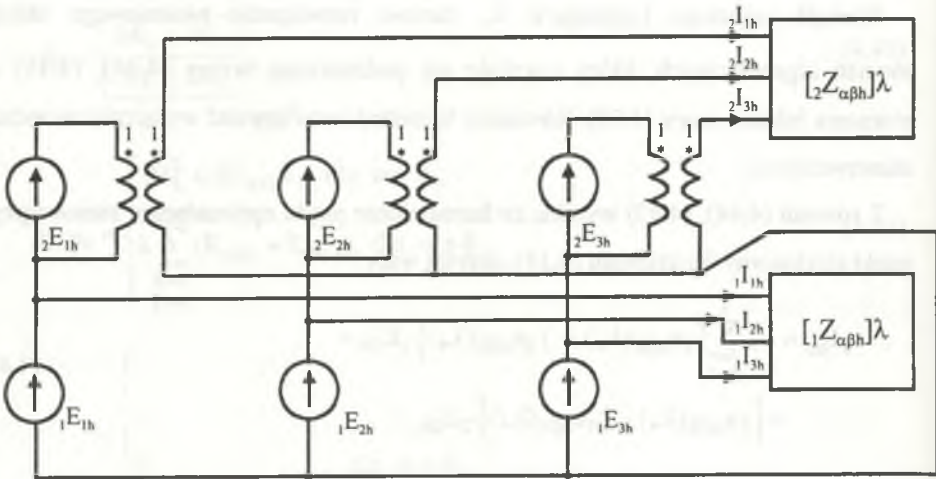
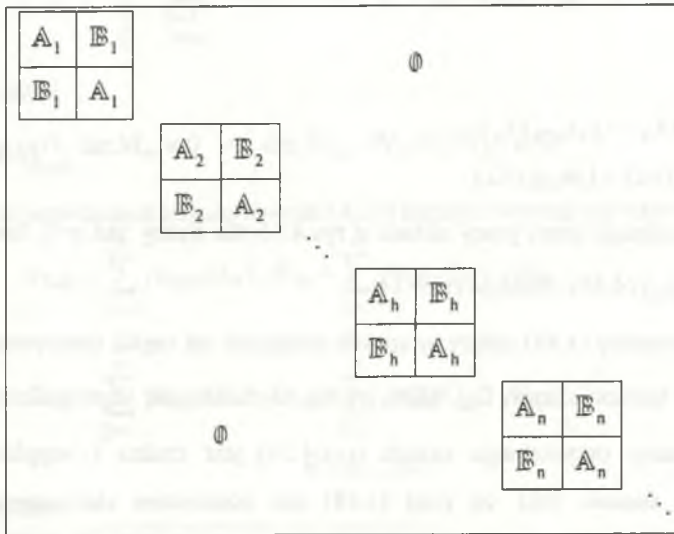
$${}_a i_{\alpha h}(t) = \lambda_* \sum_{\beta=1}^n {}_1 Z_{\alpha\beta} {}_0 E_{\beta 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^n ({}_1 Z_{\alpha\beta h}(\lambda_*) {}_1 E_{\beta h} + {}_2 Z_{\alpha\beta h}(\lambda_*) {}_2 E_{\beta h}) \exp(jh\omega_0 t), \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad (4.48)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}_1 Z_{\alpha\beta h} &= {}_1 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) - j {}_3 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*), \\ {}_2 Z_{\alpha\beta h} &= {}_2 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*) - j {}_4 a_{\alpha\beta h}(\lambda_*). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Interpretację optymalnego stanu pracy układu z rys.4.13 dla liczby faz $n=3$, który opisany jest prądem $({}_a i_{\alpha})$ (4.48), ilustruje rys.4.14.

Ponieważ prąd optymalny (4.48) zależy w sposób rozłączny od części rzeczywistej ${}_1 E_{\alpha h}$ i urojonej ${}_2 E_{\alpha h}$ harmonicznych $E_{\alpha h}$ SEM źródła, to możliwość jego realizacji, a zatem realizacji stanu optymalnego układu (rys.4.14), jest trudna i wątpliwa. Dodatkową trudność stanowi fakt, że prąd (4.48) jest elementem stacjonarnym funkcjonału Lagrange'a (4.35), natomiast o tym, czy jest on elementem minimalizacyjnym decyduje ściśle dodatnia okresowość poniższej macierzy blokowej [80]:

Rys.4.14. Optymalny stan pracy układu z rys.4.13 dla $n=3$ Fig.4.14. Optimal operating state of system shown in Fig.4.13 for $n=3$ 

gdzie:

$$A_h = [A_{\alpha\beta h}] = \begin{cases} 2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha = \beta \\ \lambda_*(R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\mathbb{B}_h = [B_{\alpha\beta h}] = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha = \beta \\ X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\dim \mathbb{A}_h = \dim \mathbb{B}_h = n \times n.$$

Korzystnie jest więc badać warunki wystarczające ekstremum omawianego do tej pory problemu metodami numerycznymi, stosując do tego celu np. metodę wariacji lokalnych Hooke'a-Jeevesa.

Z powyższych uwag wynika, że konieczne jest przyjęcie bardziej ostrych założeń odnośnie do operatora impedancyjnego układu $\zeta^{\alpha\beta}$, co pozwoli na istotne uproszczenie analizy problemów optymalizacji.

Dalsza analiza problemu optymalizacji funkcjonału (4.3) przy ograniczeniu (4.4) dla układu z rys. 4.13 zostanie przeprowadzona dla dwóch wariantów założeń odnośnie do operatora impedancyjnego $\zeta^{\alpha\beta}$.

A.

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}} Z_{\alpha\beta h} = Z_{\beta\alpha h}, \quad (4.53)$$

B.

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}} (Z_{\alpha\beta h} = jX_{\beta\alpha h}) \wedge (X_{\alpha\beta h} = X_{\beta\alpha h}), \quad \text{dla } \alpha \neq \beta. \quad (4.54)$$

Rozpatrzmy najpierw wariant A (wzór (4.53)).

W tym przypadku macierze \mathbb{N}_h stanowiące bloki macierzy \mathbb{A}_h (4.40) są macierzami zerowymi dla każdego $h \in \mathbb{N}$. Z wzorów (4.44), (4.45) wynika natychmiast, że harmoniczne prądu optymalnego są określone następująco:

$${}_a I_{\alpha h} = \lambda_* \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta h} E_{\beta h}, \quad (4.55)$$

gdzie:

$a_{\alpha\beta h}$ - elementy macierzy M_h^{-1} (por. (4.40), (4.41)). Prąd optymalny, stanowiący odpowiednik prądu (4.48) określa więc wzór:

$${}_a i(t) = \sum_{\beta=1}^n e G_{\alpha\beta 0}^{(n)} E_{\beta 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^n e G_{\alpha\beta h}^{(n)} E_{\beta h} \exp(jh\omega_0 t) \quad (4.56)$$

gdzie:

$$e G_{\alpha\beta h}^{(n)} = \lambda_* a_{\alpha\beta h}. \quad (4.57)$$

Wartość mnożnika Lagrange'a λ_* występującą we wzorze (4.57) oblicza się przez rozwiązanie silnie nieliniowego równania algebraicznego wynikłego z podstawienia wzoru (4.55) do równania mocy (4.38). Rozwiązanie tego równania jest możliwe wyłącznie metodami numerycznymi.

Można wykazać prawdziwość oszacowań [84]:

$$|e G_{\alpha\beta h}| \leq \begin{cases} C_h h^{-2l} & , \text{ dla } \alpha = \beta \\ C_h h^{-2(l+k)} & , k, l \geq 1, \text{ dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (4.58)$$

$$C_h \in \mathbb{R}^+, h \in \mathbb{N}, \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, n\},$$

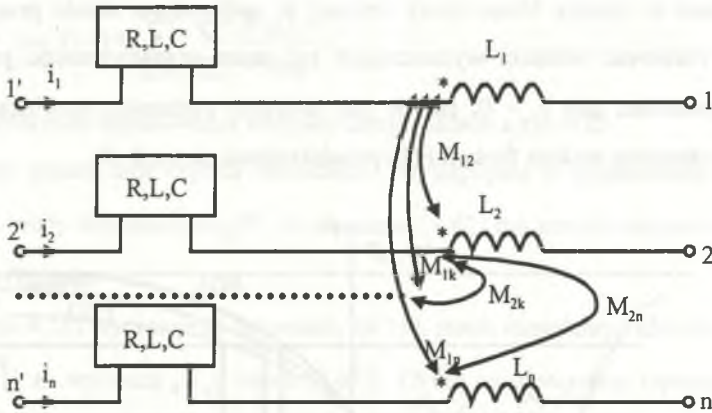
skąd wynika, że harmoniczne prądu optymalnego (4.56) są silnie tłumione w stosunku do harmonicznych SEM źródła (rys.4.13). Prąd ten, podobnie jak poprzednio, realizuje kompromis pomiędzy prądem źródła o minimalnych zniekształceniach (w sensie zawartości wyższych harmonicznych w przebiegu prądu) a prądem o minimalnej wartości skutecznej. Prąd (4.56) realizuje minimum funkcjonału (4.3), gdy forma kwadratowa określona na macierzy nieskończonej [81, 84] (por. wzory (4.50) do (4.52)) $R_{\alpha\beta h}$:

$$R_{\alpha\beta h} = \begin{cases} \frac{2\nabla_h^2}{\lambda_*} + 2R_{\alpha\alpha h} & , \text{ dla } \alpha = \beta \\ R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h} & , \text{ dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad h \in \mathbb{N}, \quad (4.59)$$

jest ściśle dodatnio określona. Jeżeli operator impedancyjny źródła jest pasywny, $\lambda_* > 0$, a macierz $R_{\alpha\beta h}$ jest macierzą dominacyjną, to warunki te są zawsze spełnione.

Źródło z rys.4.13 wydaje prąd optymalny (4.56), gdy wielobiegunnik zastępczy o zaciskach 1'..n' (rys.4.13) opisany jest ciągiem macierzy konduktancji $e G_{\alpha\beta h}^{(n)}$, określonych wzorem (4.57).

Dla wariantu B (wzory (4.54)) założeń odnośnie do operatora impedancyjnego źródła analiza rozpatrywanego problemu optymalizacji ulega dalszemu uproszczeniu. Należy zauważyć, że w tym przypadku wielobiegownik (rys.4.13) modelujący impedancję wewnętrzną źródła jest układem SLS złożonym z elementów R,L,M,C o budowie przedstawionej na rys.4.15.



Rys.4.15. Model impedancji źródła dla wariantu B

Fig.4.15. Model of source impedance for variant B

Spełnienie warunku (4.54) jest równoznaczne z diagonalizacją macierzy M_h (wzory (4.40), (4.41)), skąd po prostych przekształceniach wzorów (4.36), (4.37) uzyskuje się rozwiązanie rozpatrywanego problemu optymalizacji, określone wzorem:

$${}_a i_\alpha(t) = e G_{\alpha 0}^{(n)} E_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} e G_{\alpha h}^{(n)} E_{\alpha h} \exp(jh\omega_0 t) \quad (4.60)$$

gdzie:

$e G_{\alpha h}^{(n)}$ - konduktancje zastępcze układu z rys.4.13, dla h-tej harmonicznej i fazy α ,
określone wzorem:

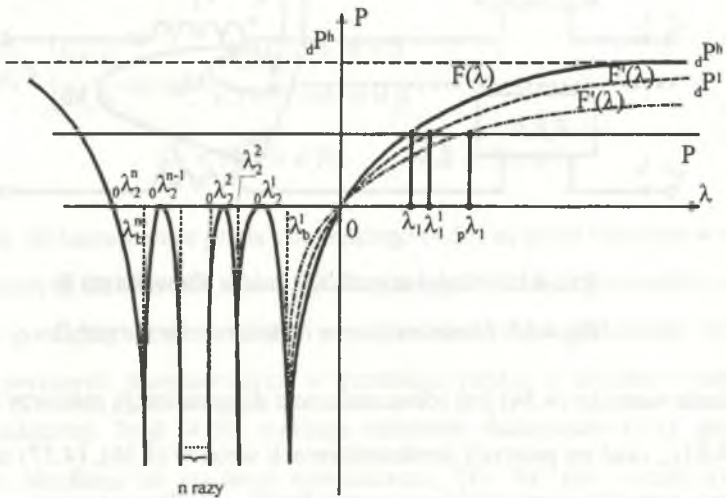
$$e G_{\alpha h}^{(n)} = \frac{\lambda_*}{2\nabla_h^2 + 2\lambda_* R_{\alpha\alpha h}}, \quad (4.61)$$

$R_{\alpha\alpha h}$ - elementy przekątnej głównej macierzy $Z_{\alpha\beta h}$ (4.54).

Można wykazać, że wartość mnożnika Lagrange'a λ_* określa się przez rozwiązanie równania [81, 84] (podobnego do równania (3.38) dla układów jednofazowych):

$$P = F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \left[\frac{\lambda}{2\nabla_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h}} - \frac{R_{\alpha\alpha h} \lambda^2}{(2\nabla_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h})^2} \right] |E_{\alpha h}|^2. \quad (4.62)$$

Równanie to opisuje bilans mocy czynnej w optymalnym stanie pracy układu z rys.4.13. Ponieważ warunki wystarczające minimum rozpatrywanego problemu są zawsze spełnione, gdy $\lambda > 0$, istotne jest istnienie dodatnich rozwiązań równania (4.62). Ilustracyjny wykres funkcji $F(\lambda)$ przedstawiono na rys.4.16.



Rys.4.16. Ilustracyjny przebieg n -skończenie wymiarowego przybliżenia funkcji $F(\lambda)$ (4.62)

Fig.4.16. Illustrative plot of n -dimensional, finite approximation of function $F(\lambda)$ (4.62)

Na rysunku tym przedstawiono funkcję $F^1(\lambda)$ stanowiącą pierwszy składnik wzoru (4.62) dla $h=1$ (pierwszej harmonicznej przebiegów) oraz funkcję $F(\lambda)$. Z analizy właściwości tej funkcji wynika [83, 84], że:

- w obszarze $\lambda \in (0, \infty)$ funkcja $F(\lambda)$ jest ściśle rosnąca,
- istnieje granica:

$${}_d P^n = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^n \frac{|E_{\alpha h}|^2}{4R_{\alpha\alpha h}}, \quad (4.63)$$

która określa moc dopasowania energetycznego układu z rys.4.13.

Jeżeli więc zadana moc czynna odbiornika P występująca w ograniczeniu (4.4) jest mniejsza od mocy dopasowania ${}_d P^n$, to równanie (4.62) ma zawsze dodatnie i jednoznaczne rozwiązanie.

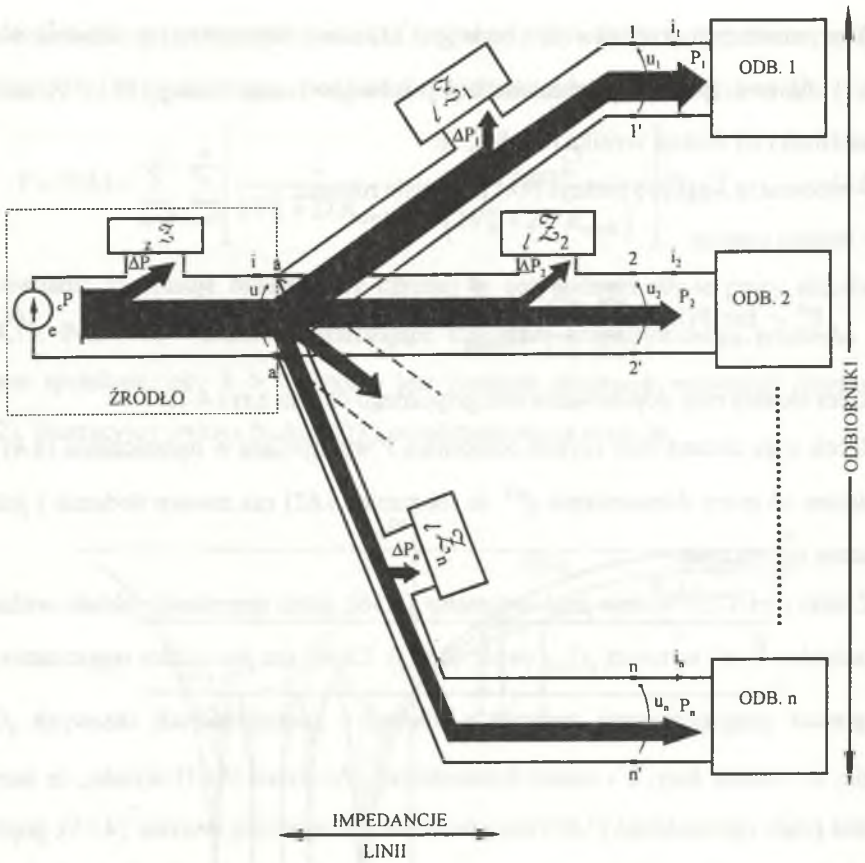
Źródło (rys.4.13) wydaje prąd optymalny (4.56), jeżeli impedancje układu widziane z zacisków 1'.n' wynoszą $eG_{\alpha h}$ (wzór (4.61)). Układ ten jest zatem reprezentowany w postaci niesymetrycznej gwiazdy n-fazowej o konduktancjach fazowych $eG_{\alpha h}$, gdzie: α - numer fazy, h - numer harmonicznej. Ze wzoru (4.61) wynika, że harmoniczne prądu optymalnego (4.60) mają oszacowanie określone wzorem (4.13), prąd ten ma więc wszystkie właściwości opisanych wcześniej prądów optymalnych uzyskanych dla układów wielofazowych.

4.3. Optymalizacja pewnych klas obwodów złożonych

Rozpatrywane do tej pory obwody składały się z pojedynczego, jedno- lub wielofazowego, źródła i odbiornika, do którego doprowadzana była zadana moc czynna.

Przykładem obwodu jednofazowego o bardziej złożonej strukturze jest układ przedstawiony na rys.4.17.

Układ ten złożony jest ze źródła o impedancji wewnętrznej opisanej operatorem z^z i układu n odbiorników połączonych równolegle. Impedancje torów transmisyjnych łączących źródło z odbiornikami zamodelowano w postaci dwójników (rys.4.17)



Rys.4.17. Model sieci jednofazowej

Fig.4.17. Model of one-phase network

opisanych operatorami $|Z_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Operatory impedancyjne źródła $|Z$ i linii $|Z_k$ są liniowe i czasowo-niezmiennicze, zatem w dziedzinie częstotliwości mają one reprezentacje $\{z_h\}$, $\{|Z_{kh}\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $h \in \mathbb{N}$, w postaci ciągów impedancji. Dla układu z rys.4.17 rozpatruje się [82] problem minimalizacji energetyczno-jakościowego funkcjonału (3.19) prądu źródła:

$$\min_{(i)} \|i\|_w^2 \quad (4.64)$$

przy ograniczeniach na moce czynne odbiorników:

$$(u_k, i_k)_L = (e - z^{\tilde{z}} i - L^{\tilde{z}_k} i_k, i_k)_L = P_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.65)$$

gdzie:

P_k - zadane moce czynne odbiorników,

oraz ograniczeniu na prąd źródła, wynikłym z I prawa Kirchhoffa dla węzła „a” (rys.4.17):

$$\sum_{k=1}^n i_k = i. \quad (4.66)$$

Odpowiadający powyższemu problemowi funkcjonal Lagrange'a ma postać określoną wzorem [82]:

$$\begin{aligned} L((A_{kh}), (B_{kh}), (\lambda_k)) = & \sum_{h=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n A_{kh} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n B_{kh} \right)^2 \right) \nabla_h^2 + \\ & + \sum_{k=1}^n \lambda_k \left[P_k - \sum_{h=0}^{\infty} ({}_1E_{\alpha h} A_{\alpha h} + {}_2E_{\alpha h} B_{\alpha h}) \right] + \\ & + \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ R_h \sum_{l=1}^n (A_{lh} A_{kh} + B_{lh} B_{kh}) + \right. \\ & \left. + X_h \sum_{l=1}^n (A_{lh} B_{kh} + A_{kh} B_{lh}) + R_{kh} (A_{kh}^2 + B_{kh}^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

gdzie:

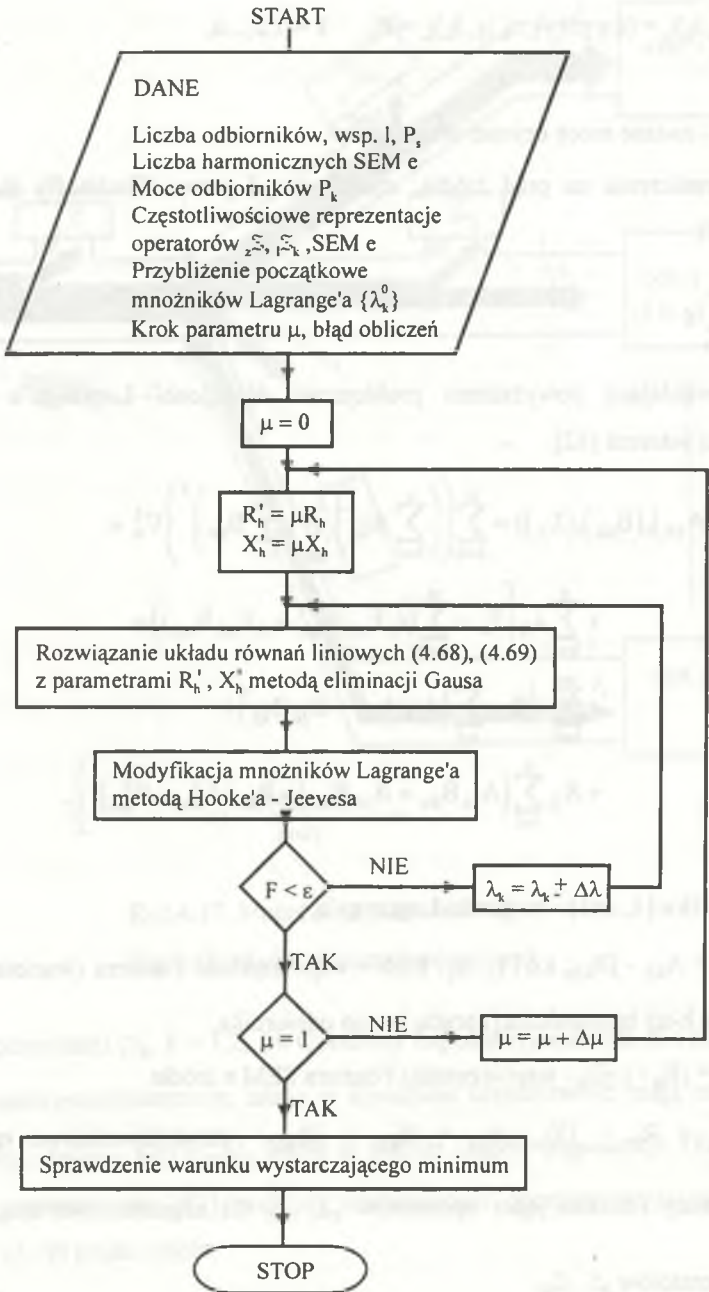
λ_k - ($k \in \{1, \dots, n\}$) - mnożniki Lagrange'a,

$I_{kh} = A_{kh} - jB_{kh}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, $h \in \mathbb{N}$ - współczynniki Fouriera (wartości zespolone skuteczne h-tej harmonicznej) prądu k-tego odbiornika,

$E_h = {}_1E_h - j {}_2E_h$ - współczynniki Fouriera SEM e źródła

$zZ_h = R_h + jX_h$, $lZ_{kh} = R_{kh} + jX_{kh}$ - częstotliwościowe reprezentacje (transformaty Fouriera jąder operatorów zZ , lZ_k dla częstotliwości $h\omega_0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$,

$n \in \mathbb{N}$) operatorów $z\tilde{z}$, $l\tilde{z}_k$.



Rys.4.18. Algorytm rozwiązania równań (4.68), (4.69), (4.70)

Fig.4.18. Algorithm of solving of equations (4.68), (4.69), (4.70)

Z warunków koniecznych minimum tego funkcjonau wynika układ równań:

$$2\nabla_h^2 \sum_{k=1}^n A_{kh} - \lambda_{s1} E_h + R_h \sum_{k=1}^n \lambda_k A_{kh} + R_h \lambda_s A_{sh} + X_h \sum_{k=1}^n \lambda_k B_{kh} - \\ - \lambda_s X_h \sum_{k=1}^n B_{kh} + 2\lambda_s R_{sh} A_{sh} = 0, \quad s \in \{1, \dots, h\}, \quad h \in N, \quad (4.68)$$

$$2\nabla_h^2 \sum_{k=1}^n B_{kh} - \lambda_{s1} E_h + R_h \sum_{k=1}^n \lambda_k B_{kh} + R_h \lambda_s B_{sh} + X_h \lambda_s \sum_{k=1}^n A_{kh} - \\ - X_h \sum_{k=1}^n \lambda_k A_{kh} + 2\lambda_s R_{sh} B_{sh} = 0, \quad s \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in N, \quad (4.69)$$

$$P - \sum_{h=0}^{\infty} ({}_1 E_h A_{sh} + {}_1 E_h A_{sh}) + \sum_{h=0}^{\infty} R_h \sum_{k=1}^n (A_{kh} A_{sh} + B_{kh} B_{sh}) + \\ + \sum_{k=1}^n (A_{kh} B_{sh} + A_{sh} B_{kh}) + R_{sh} (A_{sh}^2 + B_{sh}^2) = 0 \quad (4.70)$$

$$s \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in N,$$

względem zmiennych $(A_{kh}, B_{kh}, \lambda_k)$, którego rozwiązanie umożliwia wyznaczenie punktów stacjonarnych funkcjonau. Należy zauważyć, że równania (4.68), (4.69) stanowią układ równań liniowych o wymiarze $2 \times n \cdot h_{\max}$, gdzie n - liczba odbiorników, h_{\max} - maksymalny numer harmonicznej przebiegu SEM e źródła. Wymieniony układ równań należy rozwiązać wspólnie z układem n równań nieliniowych (4.70), co jest możliwe wyłącznie metodami numerycznymi. Schemat blokowy algorytmu zaproponowanego [82] do rozwiązania tego układu równań przedstawia rys.4.18.

Po wprowadzeniu danych, przybliżenie początkowe mnożników Lagrange'a $\{\lambda_k^{(0)}\}$ zadaje się w obszarze R_+^n . Następnie dla wartości parametru $\mu \in [0, 1]$ rozwiązuje się układ liniowy (4.68), (4.69) względem zmiennych λ_{kh}, B_{kh} modyfikując mnożniki

Lagrange'a metodą wariacji lokalnych (Hooke'a-Jeevesa) [42] tak, by prawa strona układu równań (4.70) (oznaczona na rys.4.18 symbolem F) przyjmowała wartość dowolnie małą. Modyfikację tę przeprowadza się dla zmiennego w kolejnych krokach modelu impedancji źródła ($zZ' = \mu zZ$) rozpoczynając od przypadku źródła idealnego ($\mu = 0 \rightarrow zZ' = 0$) zasilającego układ równolegle połączonych odbiorników (rys.4.17). Dla wyznaczonych w ten sposób współrzędnych punktu stacjonarnego funkcjonału (4.67) zostaje sprawdzony następnie warunek jego minimum.

Przyjęcie rozwiązania początkowego mnożnika Lagrange'a $\{\lambda_k^{(0)}\}$ w obszarze R_+^n : $\{\lambda_k: \lambda_k > 0, k \in \{1, \dots, n\}$ gwarantuje istnienie rozwiązania problemu, gdy:

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} P_k < P_{dk} \quad (4.71)$$

gdzie:

P_k - moc czynna pobierana przez k-ty odbiornik,

P_{dk} - moc dopasowania energetycznego k-tego odbiornika.

W tym przypadku rozwiązanie problemu sprowadza się do rozwiązania n niezależnych problemów optymalizacji dotyczących obwodów z pojedynczym odbiornikiem (por. rozdz. 4.1)

Jeżeli dla $\mu \in (0, 1]$ w obszarze R_+^n :

- wyznacznik układu równań (4.68), (4.69) przyjmuje wartości różne od zera,
- lewe strony równań (4.70) są wypukłymi funkcjami zmiennych λ_k ,

to algorytm Hooke'a-Jeevesa jest zbieżny, zatem możliwe jest określenie współrzędnych $(A_{kh}), (B_{kh}), \lambda_k^*$ punktu stacjonarnego funkcjonału Lagrange'a (4.67).

Analiza warunków wystarczających minimum funkcjonału (4.67) sprowadza się do zbadania warunków dodatniej określoności pewnej macierzy zbudowanej z drugich pochodnych Frecheta funkcjonału. Można wykazać, że warunki te są spełnione, gdy:

$$\bigwedge_{h \in N} \bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \left(1 + \frac{R_h + R_{kh}}{\nabla_h^2} \lambda_k^* \right) > \frac{1}{2} n(n+1) \quad (4.72)$$

gdzie:

n - liczba odbiorników,

$\{\lambda_k^*\}$ - mnożniki Lagrange'a w punkcie stacjonarnym.

Dla źródła z rys.(4.17) zasilającego pojedynczy odbiornik ograniczenie to jest zawsze spełnione (por. rozdz. 4.1).

Rozwiązanie problemu optymalizacji określa zbiór prądów optymalnych:

$${}_a i_k(t) = {}_a A_{k0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{h_{\max}} (A_{kh} - jB_{kh}) \exp(jh\omega_0 t), \quad (4.73)$$

$$k \in \{1, \dots, n\},$$

$${}_a i(t) = {}_a I_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{h_{\max}} (A_h - jB_h) \exp(jh\omega_0 t) \quad (4.74)$$

gdzie:

$$\sum_{k=0}^n A_{kh} = A_h, \quad \sum_{k=0}^n B_{kh} = B_h, \quad h \in \{0, \dots, h_{\max}\}, \quad (4.75)$$

w których harmoniczne A_{kh} , B_{kh} określa się metodami numerycznymi, zgodnie z opisanym algorytmem (rys.4.18).

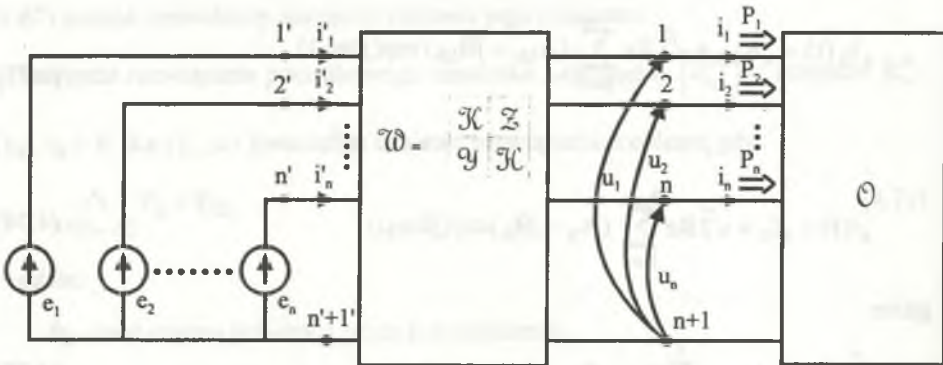
Prąd optymalny (4.75) realizuje kompromis pomiędzy prądem źródła o minimalnej wartości skutecznej a prądem źródła o minimalnych zniekształceniach. Prąd ten umożliwia ponadto doprowadzenie do odbiorników zadanych mocy czynnych P_k . Niestety, analiza jakościowa właściwości prądów (4.74), (4.75) jest niemożliwa, liczne eksperymenty numeryczne [82] potwierdzają opisanie cechy tych prądów dla wielu konkretnych struktur obwodów.

Drugi z rozpatrywanych w tym rozdziale problemów dotyczy układu wielofazowego z rzeczywistym źródłem napięcia (rys.4.12, rozdz.4.2), przy znacznie osłabionych założeniach odnośnie do modelu impedancji źródła układu [87, 88, 89].

Przyjmując, że:

- układ z rys.4.12 ma jeden wspólny przewód odniesienia (rys.4.19),
 - operator impedancyjny \mathcal{W} tego układu jest operatorem SLS,
 - do odbiornika doprowadzane są zadane fazowe moce czynne P_α ($\alpha \in \{1, \dots, n\}$),
- $n \in \mathbb{N}$,

schemat rozpatrywanego układu przedstawiono na rys.4.19.



Rys.4.19. Model sieci złożonej

Fig.4.19. Model of complex network

Należy zauważyć, że układ przedstawiony na rys.4.19 może reprezentować:

- obwód złożony ze źródła napięcia fazowego (symetrycznego lub niesymetrycznego) o impedancji wewnętrznej opisanej operatorem \mathcal{W} i odbiornika opisanego operatorem \mathcal{O} ,
- sieć elektryczną złożoną z zadanej liczby idealnych źródeł napięć jedno- i wielofazowych (e_α), zasilających za pośrednictwem układu transmisyjnego opisanego operatorem \mathcal{W} sieć odbiorczą złożoną z pewnej liczby odbiorników jedno- i wielofazowych (o łącznej liczbie faz równej n), która opisana jest operatorem \mathcal{O} .

Operator impedancyjny \mathcal{W} układu opisany jest czwórką macierzowych operatorów immitancyjnych (\mathcal{Z} , \mathcal{Y} , \mathcal{X} , \mathcal{Z}), o wymiarach $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, typu splotu. Prądy (i_α) i napięcia (u_α) na zaciskach odbiornika (rys.4.19) określają wzory:

$$\begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline u_2 \\ \hline \vdots \\ \hline u_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathfrak{K}^{\alpha\beta} & \mathfrak{Z}^{\alpha\beta} \\ \hline \mathfrak{Y}^{\alpha\beta} & \mathfrak{X}^{\alpha\beta} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline e_1 \\ \hline e_2 \\ \hline \vdots \\ \hline e_n \\ \hline \end{array} \quad (4.76)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline \vdots \\ \hline i_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline i'_1 \\ \hline i'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline i'_n \\ \hline \end{array}$$

wyrażone w następujący sposób w notacji wskaźnikowej:

$$u_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^n [\mathfrak{K}^{\alpha\beta} e_\beta](t) + \sum_{\beta=1}^n [\mathfrak{Z}^{\alpha\beta} i'_\beta](t), \quad (4.77)$$

$$i_\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^n [\mathfrak{Y}^{\alpha\beta} e_\beta](t) + \sum_{\beta=1}^n [\mathfrak{X}^{\alpha\beta} i'_\beta](t), \quad (4.78)$$

$$\alpha=1,2,\dots,n,$$

gdzie:

$$\mathfrak{I} = (i_\alpha) = (i_1, \dots, i_n), \quad \mathfrak{I}' = (i'_\alpha) = (i'_1, \dots, i'_n),$$

$$\mathfrak{U} = (u_\alpha) = (u_1, \dots, u_n), \quad \mathfrak{E} = (e_\alpha) = (e_1, \dots, e_n). \quad (4.79)$$

Operator \mathfrak{O} opisany jest ciągiem operatorów skalarnych $(\mathfrak{O}) = (\mathfrak{O}_1, \dots, \mathfrak{O}_n)$, a jego szczegółowa postać do dalszych rozważań nie jest wymagana.

W dziedzinie częstotliwości opis (4.77), (4.78), (4.79) sieci stanowią:

- ciągi $\{E_{\alpha h}\}$, $\{U_{\alpha h}\}$, $\{I_{\alpha h}\}$, $\{I'_{\alpha h}\}$, $\alpha \in \{1, \dots, h\}$, $h \in \mathbb{N}$, złożone z zespolonych współczynników Fouriera napięć (e_α) , (u_α) i prądów (i_α) , (i'_α) w fazach $\alpha=1, \dots, n$,
- ciągi macierzy blokowych $\{\mathfrak{K}_h, \mathfrak{Z}_h, \mathfrak{Y}_h, \mathfrak{X}_h\}$, $h \in \mathbb{N}$ o wymiarach $n \times n$, stanowiące reprezentacje widmowe operatora \mathfrak{O} ,
- odpowiedniki równań (4.77), (4.78) w dziedzinie częstotliwości:

$$U_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^n K_{\alpha\beta h} E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^n Z_{\alpha\beta h} I'_{\beta h}, \quad (4.80)$$

$$I_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^n Y_{\alpha\beta h} E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^n H_{\alpha\beta h} I'_{\beta h}, \quad (4.81)$$

$$\alpha=1,2,\dots,h, \quad h \in N,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_h &= [K_{\alpha\beta h}], & \mathbb{Y}_h &= [Y_{\alpha\beta h}], \\ \mathbb{Z}_h &= [Z_{\alpha\beta h}], & \mathbb{H}_h &= [H_{\alpha\beta h}]. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Dla układu z rys.4.31 formułuje się problem minimalizacji energetyczno-jakościowego funkcjonału (4.3) określonego na prądzie $\hat{i} = (i_\alpha)$, (rys.4.19):

$$\min_{(i)} \|i\|_W^2, \quad (4.83)$$

przy ograniczeniach na zadane fazowe moce czynne P_α ($\alpha \in \{1, \dots, p\}$, $p \leq n$, $n \in N$ układu odbiorczego:

$$P_\alpha = (u_\alpha, i_\alpha)_L, \quad \alpha \in \{1, \dots, p\}. \quad (4.84)$$

Zakładając odwracalność operatora \mathfrak{K} oraz wykorzystując wzory (4.77), (4.78) zbiór ograniczeń (4.84) można zapisać w następującej postaci:

$$P_\alpha = (\mathfrak{K}_{\alpha\beta} e_\beta, i_\alpha)_L - (\sum_{\gamma} \alpha_\gamma \circ \mathfrak{K}_{\gamma\delta}^{-1} \circ \mathfrak{Y}_{\delta\beta} e_\beta, i_\alpha)_L + (\sum_{\gamma} \alpha_\gamma \circ \mathfrak{K}_{\gamma\delta}^{-1} i_\beta, i_\alpha), \quad (4.85)$$

$$\alpha \in \{1, \dots, p\}, \quad p \leq n,$$

gdzie:

o - symbol operacji złożenia,

\mathfrak{K}^{-1} - operator odwrotny względem operatora \mathfrak{K} .

Uwaga

Inną możliwość optymalizacji warunków pracy układu z rys.4.17 opisano w pracy [89]. Polega ona na minimalizacji następującego wskaźnika jakości układu:

$$\mathcal{J} = (e, i')_{W,n} - (u, i)_{W,n}, \quad (4.86)$$

gdzie:

$(\cdot, \cdot)_{W,n}$ - iloczynny skalarny określone wzorami (2.22), (2.25),

przy ograniczeniach (4.85). Minimalizacja takiego funkcjonału prowadzi do wyróżnienia prądów optymalnych (a^i_α) , $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ zapewniających:

- kompromis pomiędzy prądami sieci powodującymi minimalne straty mocy czynnej wydzielanej w wielobiegunkniku \tilde{U} a prądami sieci o minimalnych zniekształceniach, tzn. niewielkiej zawartości wyższych harmonicznych w prądach sieci,
- zadany (w szczególności symetryczny) rozptył mocy fazowych P_α po stronie zacisków $1, \dots, n$ układu z rys.4.19.

Metoda i wyniki analizy tego problemu są podobne do analizowanego w pracy zagadnienia optymalizacji (4.83), (4.84) i nie będą rozpatrywane.

Analizę problemu (4.83), (4.84) sprowadza się (podobnie jak w całej pracy) do dziedziny częstotliwości. Można wykazać [88, 89], że funkcjonał Lagrange'a tego problemu określa wzór:

$$L(A_{kh}, B_{kh}, \lambda_k) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 + \sum_{h=0}^{\infty} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \sum_{\alpha=1}^p \lambda_\alpha \left[P_\alpha - \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \left[\sum_{\beta=1}^n F_{\alpha\beta h} E_{\beta h} I_{\alpha h}^* + \sum_{\beta=1}^n N_{\alpha\beta h} I_{\beta h} I_{\alpha h}^* \right] \right], \quad (4.87)$$

gdzie:

λ_α - mnożniki Lagrange'a,

$I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h}$, $h \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \{1, \dots, n\}$,

$F_{\alpha\beta h} = {}_1F_{\alpha\beta h} + j {}_2F_{\alpha\beta h} = K_{\alpha\beta h} - M_{\alpha\beta h} = {}_1K_{\alpha\beta h} + j {}_2K_{\alpha\beta h} - ({}_1M_{\alpha\beta h} + j {}_2M_{\alpha\beta h})$,

$N_{\alpha\beta h} = {}_1N_{\alpha\beta h} + j {}_2N_{\alpha\beta h}$, (4.88)

$M_{\alpha\beta h} = \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\delta=1}^n Z_{\alpha\gamma h} H_{\gamma\delta h}^{-1} Y_{\delta\beta h}$, (4.90)

$$N_{\alpha\beta h} = \sum_{\delta=1}^n Z_{\alpha\gamma h} H_{\gamma\beta h}^{-1}, \quad (4.91)$$

$K_{\alpha\beta h}$, $Y_{\alpha\beta h}$, $Z_{\alpha\beta h}$, $H_{\alpha\beta h}$ - reprezentacje widmowe operatora \tilde{D} (4.82).

Z warunków koniecznych minimum funkcjonau (4.87) uzyskuje się układ $2n \times h_{\max}$ (gdzie h_{\max} maksymalna liczba rozpatrywanych harmoniczych) równań liniowych:

$$\begin{aligned} & 2\nabla_h^2 A_{\alpha h} - \lambda_{\alpha} \sum_{\beta=1}^n ({}_1F_{\alpha\beta h} {}_1E_{\beta h} + {}_2F_{\alpha\beta h} {}_2E_{\beta h} - \\ & - \lambda_{\alpha} \left[\left(\sum_{\beta=1}^n {}_1N_{\alpha\beta h} A_{\beta h} \right) + {}_1N_{\alpha\alpha h} A_{\beta h} + \left(\sum_{\beta=1}^n {}_2N_{\alpha\beta h} B_{\beta h} \right) - {}_2N_{\alpha\alpha h} B_{\beta h} \right] - \\ & - \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^n \lambda_{\gamma} ({}_1N_{\gamma\alpha h} A_{\gamma h} - {}_2N_{\gamma\alpha h} B_{\gamma h}) = 0, \end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in \{0, \dots, h_{\max}\},$$

$$\begin{aligned} & 2\nabla_h^2 B_{\alpha h} - \lambda_{\alpha} \sum_{\beta=1}^n ({}_1F_{\alpha\beta h} {}_2E_{\beta h} + {}_2F_{\alpha\beta h} {}_1E_{\beta h}) - \\ & - \lambda_{\alpha} \left[\left(\sum_{\beta=1}^n {}_1N_{\alpha\beta h} B_{\beta h} \right) + {}_1N_{\alpha\alpha h} B_{\beta h} + {}_2N_{\alpha\alpha h} A_{\beta h} - \left(\sum_{\beta=1}^n {}_2N_{\alpha\beta h} A_{\beta h} \right) \right] - \\ & - \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^n \lambda_{\gamma} ({}_1N_{\gamma\alpha h} B_{\gamma h} - {}_2N_{\gamma\alpha h} A_{\gamma h}) = 0, \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\alpha \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in \{0, \dots, h_{\max}\},$$

oraz układ $p \leq n$ równań nieliniowych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_\alpha} = P_\alpha \sum_{\alpha=1}^n & \left[\left(\sum_{\beta=1}^n {}_1 F_{\alpha\beta h} {}_1 E_{\beta h} + {}_2 F_{\alpha\beta h} {}_2 E_{\beta h} \right) A_{\alpha h} + \right. \\ & + \left(\sum_{\beta=1}^n {}_1 F_{\alpha\beta h} {}_2 E_{\beta h} - {}_2 F_{\alpha\beta h} {}_1 E_{\beta h} \right) B_{\beta h} + \\ & \left. + \sum_{\beta=1}^n \left({}_1 N_{\alpha\beta h} (A_{\alpha h} A_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h}) \right) + \left({}_2 N_{\alpha\beta h} (A_{\alpha h} B_{\beta h} - A_{\beta h} B_{\alpha h}) \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\alpha \in \{1, \dots, p\}, p \leq n.$$

Rozwiązanie tego układu równań względem zmiennych $A_{\alpha h}$, $B_{\alpha h}$, λ_α przeprowadza się zgodnie z algorytmem przedstawionym na rys.4.20.

Wyróżnione w ten sposób prądy optymalne sieci określa wzór:

$${}_a i_\alpha(t) = {}_a A_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{h_{\max}} (A_{\alpha h} - jB_{\alpha h}) \exp(jh\omega_0 t), \quad \alpha \in \{1, \dots, n\}.$$

Poprzez odwrócenie operacji (4.78), (4.81) na podstawie tych prądów określić można prądy optymalne (i_α) wydawane przez źródła (rys.4.19).

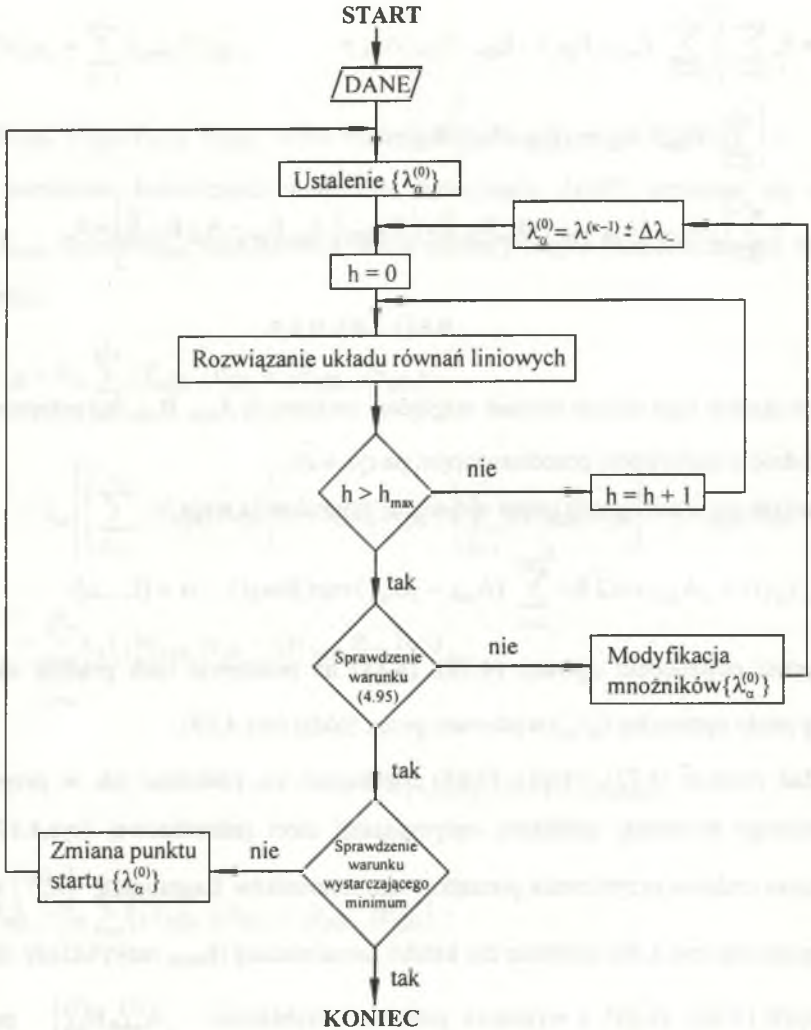
Układ równań (4.92), (4.93), (4.94) rozwiązuje się podobnie jak w przypadku omawianego wcześniej problemu optymalizacji sieci jednofazowej (rys.4.17). Po wstępnym zadaniu przybliżenia początkowego mnożników Lagrange'a $\{\lambda_\alpha^{(0)}\} \in \mathbb{R}^{p+}$ rozwiązuje się (rys.4.20) odrębnie dla każdej harmonicznej (h_{\max} razy) układy równań liniowych (4.92), (4.93) i wyznacza pierwsze przybliżenie $\{A_{\alpha h}^{(1)}, B_{\alpha h}^{(1)}\}$ prądów optymalnych sieci. Następnie sprawdza się warunek wynikły z równania (4.94):

$$\sum_{\alpha=1}^p \left[\frac{\partial L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda_\alpha)}{\partial \lambda_\alpha} \Big|_{(A_{\alpha h}^{(k)}, B_{\alpha h}^{(k)}, \lambda_h^{(k)})} \right]^2 < \varepsilon, \quad (4.95)$$

gdzie:

ε - zadany błąd obliczeń,

k - numer iteracji,



Rys.4.20. Schemat blokowy algorytmu

Fig.4.20. Block diagram of algorithm

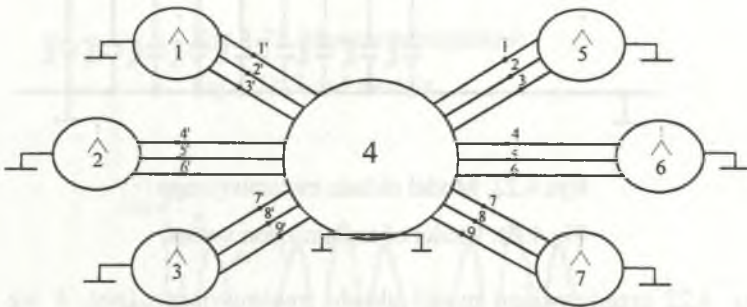
a następnie modyfikuje się zbiór mnożników Lagrange'a $\{\lambda_{\alpha}^{(0)}\}$ metodą wariacji lokalnych Hooke'a-Jeevesa [42]. W dalszym ciągu rozwiązuje się układy równań liniowych (4.92), (4.93) ze zmodyfikowanym zbiorem parametrów $\{\lambda_{\alpha}^{(k)}\}$ aż do momentu, gdy warunek (4.95) zostanie spełniony lub liczba iteracji przekroczy ustaloną wartość.

Dla wyznaczonych w ten sposób współrzędnych punktu stacjonarnego zostaje sprawdzony warunek wystarczający minimum, również metodą wariacji lokalnych. Warunki wystarczające minimum można określać również w inny sposób, np. wykorzystując twierdzenia Lusternika. Metoda taka prowadzi do analizy istnienia dodatnich wartości własnych macierzy o bardzo dużych wymiarach o złożonej budowie. Z wymienionego powodu warunek wystarczający minimum wygodnie jest sprawdzać metodą bezpośrednią.

Prądy optymalne sieci realizują opisany wcześniej kompromis i umożliwiają doprowadzenie zadanych mocy czynnych do układu odbiorczego. W szczególnym przypadku, gdy:

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}} P_{\alpha} = P_{\beta} \quad (4.96)$$

prądy $\{a_{i\alpha}\}$ (4.95) umożliwiają symetryzację dopływu mocy czynnych do wielobiegownika Θ .



Rys.4.21. Przykładowy model sieci

Fig.4.21. Exemplary model of network

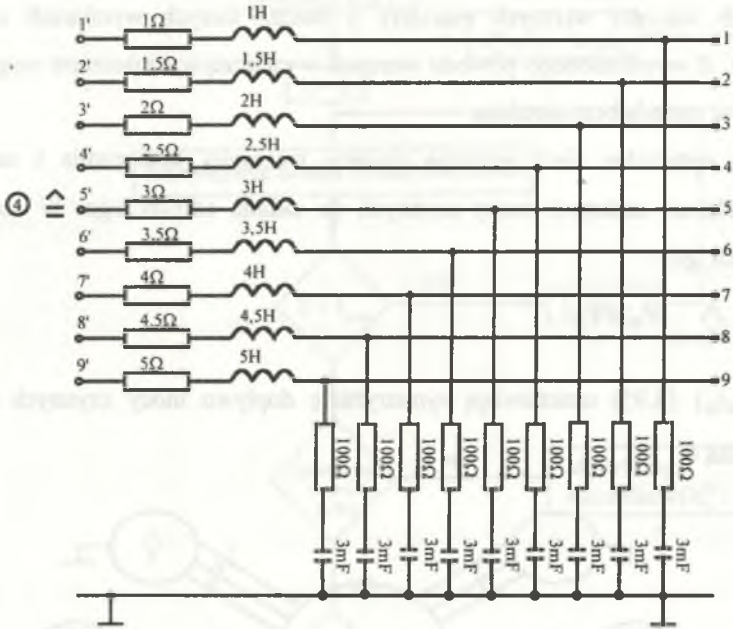
Przykład 4.3

Dla układu z rys.4.21 rozwiązano problem minimalizacji funkcjonau (4.83) dla współczynników wagowych $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = 1$, przy ograniczeniach na fazowe moce czynne odbiorników

$$P_{\alpha} = 4 \text{ kW}, \quad \alpha=1, \dots, 9.$$

Symetryczne generatory 1,2,3 (rys.4.21) o uzwojeniach połączonych w gwiazdę opisane są napięciami $e_1(t)$, $e_4(t)$, $e_7(t)$ w fazach podstawowych 1,4,7, zgodnie z wzorem

$$e_{1,4,7}(t) = 300\cos\omega_0 t + 100\cos 3\omega_0 t \quad \text{V}, \quad \omega_0 = 1 \text{ rad/s.}$$



Rys.4.22. Model układu transmisyjnego

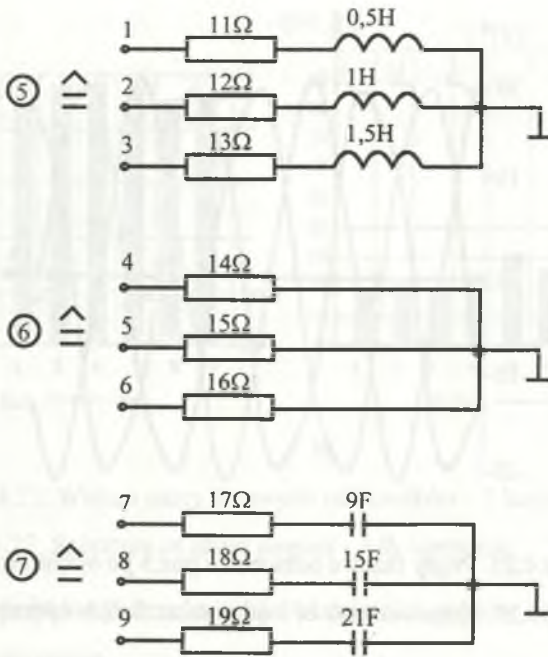
Fig.4.22. Model of transmission system

Na rys. 4.22 przedstawiono model układu transmisyjnego (poz. 4 wg rys.4.21), natomiast na rys.4.23 przedstawiono modele odbiorników (poz. 5,6,7; rys.4.21).

Czasowe przebiegi napięcia generatora poz.1 - przedstawiono na rys.4.24. Natomiast czasowe przebiegi prądów fazowych odbiornika poz.5 po optymalizacji pokazano na rys.4.25

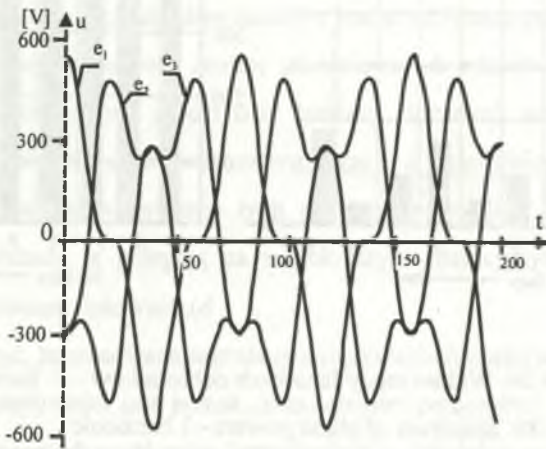
Widmo mocy fazowych odbiorników przed optymalizacją przedstawiono na rys.4.26a dla pierwszej harmonicznej przebiegów i na rys.4.26b dla trzeciej harmonicznej przebiegów

Widmo mocy fazowych odbiorników po optymalizacji przedstawiono na rys.4.27.



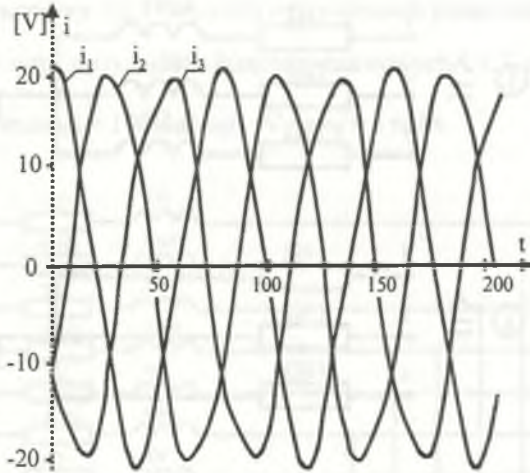
Rys.4.23. Modele odbiorników

Fig.4.23. Load models



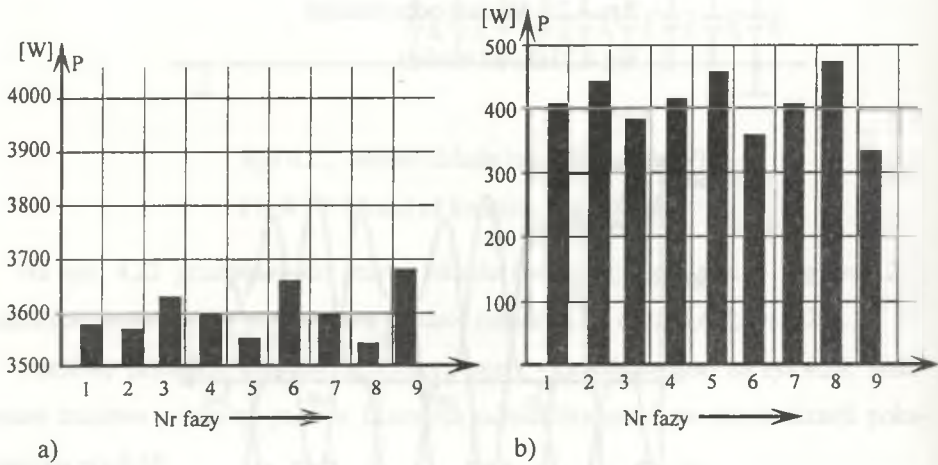
Rys.4.24. Przebiegi napięć fazowych generatora poz.1

Fig.4.24. Waveforms of phase voltages of generator number 1



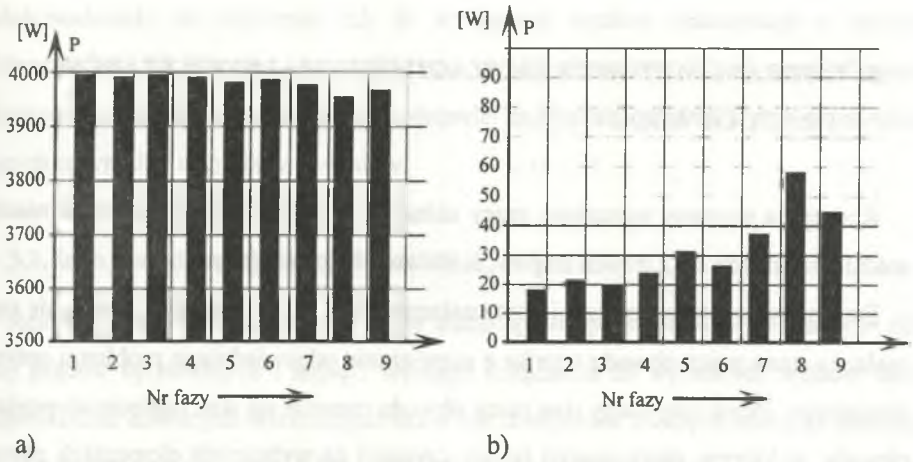
Rys.4.25. Prądy fazowe odbiornika poz.5 po optymalizacji

Fig.4.25. Phase currents of load number 5 after optimization



Rys.4.26. Widmo mocy fazowych odbiorników - 1- harmoniczna

Fig.4.26. Spectrum of phase powers - 1 harmonic



Rys.4.27. Widmo mocy fazowych odbiorników - 3 harmoniczna

Fig.4.27. Spectrum of phase powers - 3-th harmonic

Przedstawiony przykład dobrze ilustruje właściwości prądów optymalnych (4.59) wyznaczanych numerycznie.

Z przedstawionej analizy wynika, że nawet w przypadku prostych modeli układów wielofazowych (rys.4.13) rozwiązywanie i analiza problemów optymalizacji warunków pracy źródeł stanowi złożony problem. Tylko dla najprostszych modeli operatorów impedancyjnych takich układów możliwe jest uzyskiwanie prądów optymalnych w postaci zamkniętej, co ułatwia analizę jakościową ich właściwości. Dla bardziej złożonych modeli impedancji źródeł oraz bardziej złożonych sieci wielofazowych możliwa jest formalizacja problemów optymalizacji w dziedzinie czasu i częstotliwości, tym niemniej rozwiązywanie tych problemów wymaga stosowania metod numerycznych. Metody te polegają na wielokrotnym (iteracyjnym) rozwiązywaniu dużych układów równań liniowych.

Należy zauważyć, że stosowana metoda rozwiązywania rozpatrywanych problemów w dziedzinie częstotliwości jest jednak (przynajmniej pojęciowo) względnie prosta. Rozwiązanie omawianych problemów bezpośrednio w dziedzinie czasu nie zostało do chwili obecnej przeprowadzone z uwagi na nieporównywalnie większy stopień trudności uzyskania takich rozwiązań.

5. WYBRANE METODY REALIZACJI OPTYMALNYCH STANÓW PRACY OBWODÓW

Koncepcja poprawy warunków pracy układów z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi składa się z dwóch etapów, ściśle ze sobą powiązanych.

Etap pierwszy, to wyznaczanie optymalnego stanu pracy obwodu. Określenie optymalnego stanu pracy obwodu wynika z rozwiązania odpowiedniego problemu optymalizacyjnego. Przez optymalny stan pracy obwodu rozumie się stan napięciowo-prądowy obwodu, w którym straty energii (mocy czynnej) na wybranych elementach obwodu oraz zawartość wyższych harmonicznych w wybranych przebiegach prądów i napięć w obwodzie są minimalne. Etap ten polega zatem na opisie rozpatrywanego obwodu pracującego w warunkach deformacji prądów i napięć, a następnie wyznaczeniu optymalnego stanu pracy ze względu na postawioną funkcję celu. Do opisu właściwości energetyczno-jakościowych obwodów (jak to już wspomniano w punkcie 1.3) wykorzystuje się wyłącznie te wielkości, które są powszechnie akceptowane w teorii obwodów z przebiegami odkształconymi okresowymi. Wykorzystuje się tutaj pojęcia prądów, napięć występujących w obwodach, ich wartości skutecznych oraz mocy czynnej P . Zdefiniowana optymalizacyjna funkcja celu dla obwodu (wskaźnik jakości) powinna umożliwiać ocenę:

- właściwości energetycznych przebiegów na podstawie ich wartości skutecznych i strat mocy czynnej,
- zniekształceń przebiegów w zadanym sensie.

Etap drugi polega na modyfikacji właściwości energetyczno-jakościowych układów z przebiegami odkształconymi okresowymi poprzez dołączenie układów modyfikujących (kompensatorów), które pozwolą na uzyskanie optymalnego stanu pracy układu ze względu na przyjęty wskaźnik jakości. Ogólna definicja układów modyfikujących (kompensatorów) nie jest jednoznaczna, gdyż wymaga określenia celu, któremu te kompensatory powinny służyć. W pracy przez kompensatory (układy modyfikujące) rozumie się układy liniowe SLS dwu- i wielozaciskowe o takich

właściwościach, że załączenie ich do wybranych węzłów determinuje w sposób jednoznaczny wyznaczony optymalny stan pracy obwodów. Układy modyfikujące (kompensatory) wyznaczone są na podstawie znajomości prądów i napięć określających optymalny stan pracy obwodów.

5.1. Idea metody modyfikacji obwodów

Realizacja optymalnego punktu pracy sieci, opisanego zbiorem wyznaczonych dla niej prądów optymalnych i napięć, wymaga dołączenia do wybranych węzłów sieci odpowiednio dobranych wielobiegunków lub dwójników zwanych kompensatorami. W przypadku najprostszego układu złożonego z idealnego źródła napięcia i odbiornika (por. rys.1.4a) problem modyfikacji polega na dołączeniu do zacisków odbiornika dwójnika, który zmodyfikuje tak impedancję obwodu wiodzonego z zacisków idealnego źródła, aby źródło wydawało tylko prąd optymalny. Dla układu z rzeczywistym źródłem napięcia (por. rys.1.4b) oraz układów wielofazowych problem modyfikacji może być rozpatrywany zarówno przez dołączenie dwójników, jak i wielobiegunków. Dla rozpatrywanych w monografii modeli obwodów liniowych, aby uzyskać zamierzony cel, stosuje jako układy modyfikujące dwójniki bądź wielobiegunki SLS. Należy tutaj nadmienić, że jest to ograniczenie klasy układów, która w ogólnym przypadku może być zbyt uboga. Należy ją wtedy wzbogacić o układy parametryczne i nieliniowe [62]. Ponieważ w pracy ograniczono się tylko do modeli liniowych i stacjonarnych, więc zarówno układy parametryczne, jak i nieliniowe nie są rozpatrywane. Przyjęcie do rozważań modeli liniowych i analizy częstotliwościowej pozwoliło na uzyskanie wyników w postaci analitycznej stosunkowo łatwej do interpretacji. Sposób dołączenia dwójników (wielobiegunków) modyfikujących w ogólnym przypadku nie jest jednoznaczny. Generalną zasadą powinno być jednak dołączenie układów modyfikujących na zaciski dostępne pomiarowo. Natomiast miejsce ich dołączenia oraz konfiguracja kompensatora powinna być określona również za pomocą innych kryteriów, np. kosztów. Ten aspekt w monografii w ogóle nie jest poruszany, gdyż nadrzędnym celem pracy jest pokazanie ogólnych zasad

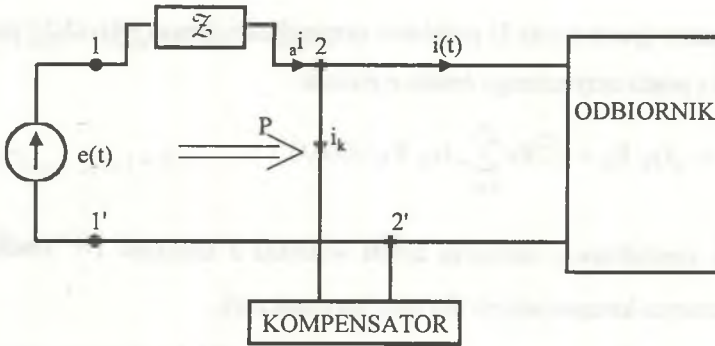
modyfikacji. W każdym z rozpatrywanych w pracy problemów konfigurację kompensatorów można było sprowadzić do dwójników.

Przeprowadzona analiza możliwości modyfikacji dla rozpatrywanych w pracy prostych obwodów z wykorzystaniem:

- dwójników i wielobiegunników LC,
- dwójników i wielobiegunników aktywnych realizowanych między innymi poprzez wykorzystanie przekształtników energoelektronicznych,

jest zawsze możliwa [64, 65].

Dla złożonych modeli sieci problem modyfikacji staje się o wiele bardziej skomplikowany. Metody jakościowe nie pozwalają w sposób ogólny na wybór węzłów sieci, w których należy dołączyć układy modyfikujące właściwości sieci. Zagadnienie to można rozwiązać w zasadzie metodami symulacyjnymi (numerycznymi) analizując różne warianty przyłączenia kompensatorów. Odrębny problem stanowi wybór klasy układów wykorzystywanych w takich przypadkach do modyfikacji złożonych struktur sieci. Dla prostych jednofazowych i wielofazowych struktur obwodów opisanych w rozdziałach (2, 3, 4) przedstawione problemy z punktu widzenia modyfikacji zostaną rozwiązane z wykorzystaniem kompensatorów liniowych. Analiza tych problemów sprowadza się do szeroko rozumianej metody syntezy obwodów [65] przeprowadzonej metodami interpolacyjnymi i optymalizacyjnymi. Omówieniu tych metod poświęcone zostaną następne punkty tego rozdziału. Wprowadzenie do metod modyfikacji zostanie rozpatrzone na przykładzie prostego obwodu jednofazowego (rys.5.1). Należy od razu stwierdzić, że opisane metody pozostają słuszne dla wszystkich rozpatrywanych w pracy problemów i układów.



Rys.5.1. Schemat układu jednofazowego: źródło rzeczywiste, kompensator równoległy, odbiornik

Fig.5.1. The scheme of one-phase system: non-ideal voltage source, parallel compensator and load

Dla układu jednofazowego przedstawionego na rys.5.1 (por. rozdz.3) określonego za pomocą danych:

- napięcie źródła dane w postaci szeregu Fouriera

$$e(t) = E_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} E_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (5.1)$$

- impedancja wewnętrzna źródła o reprezentacji częstotliwościowej

$$Z_h = R_h + jX_h, \quad R_h > 0, \quad h \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (5.2)$$

- admitancją odbiornika klasy SLS

$${}_oY_h = {}_oG_h + j {}_oB_h, \quad {}_oG_h > 0, \quad h \in \{0, 1, \dots\} \quad (5.3)$$

wyznaczono prąd optymalny dla następującego zadania optymalizacyjnego

$$\min_{(i)} \|i\|_W^2 \quad (\text{por. wzór 3.33}), \quad (5.4)$$

przy warunku ubocznym

$$(u, i)_L = (e - \xi i, i)_L = P \quad (\text{por. wzór 3.34}) \quad (5.5)$$

gdzie: P - zadana moc czynna odbiornika,

$$u = e - \xi i - \text{napięcie na zaciskach odbiornika.}$$

Rozwiązanie (patrz rozdz.3) problemu optymalizacyjnego (5.4), (5.5) prowadzi do wyróżnienia prądu optymalnego źródła o postaci:

$$i_a(t) = eG_0 E_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} eG_h E_h(jh\omega_0 t) \quad (5.6)$$

gdzie:

eG_h - konduktancja zastępcza źródła widziana z zacisków 1-1' źródła (rys.5.1) przy odłączonym kompensatorze dla h-tej harmonicznej.

$$eG_h = \frac{\lambda_*}{2\sqrt{V}_h^2 + 2R \lambda_*}, \quad h \in \mathbb{N} \quad (\text{por. wzór 3.37}). \quad (5.7)$$

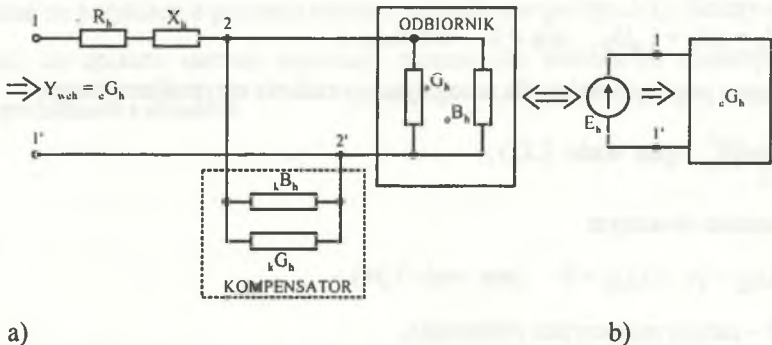
Prąd źródła określony wzorem (5.6) można uzyskać poprzez włączenie, na dostępne zaciski 2-2', kompensatora o admitancji

$$kY_h = kG_h + j kB_h, \quad h \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (5.8)$$

Dobór (wyznaczenie) admitancji kompensatora określonego wzorem (5.8) przeprowadzić można w dwojaki sposób.

A. Wyznaczenie admitancji kompensatora na podstawie znajomości konduktancji równoważnych (zastępczych) eG_h

Spełnienie warunku, aby prąd źródła był określony zależnością (5.6) po włączeniu kompensatora o admitancji (5.8) jest możliwe, gdy admitancja wejściowa układu widziana z zacisków 1-1' dla każdej rozpatrywanej harmonicznej spełnia zależność (rys.5.2)



Rys.5.2. Schemat dla pojedynczej harmonicznej

Fig.5.2. The scheme for single harmonic

$$\bigwedge_{h \in N} (Y_{weh} = G_{weh} + jB_{weh} = eG_h) \quad (5.9)$$

czyli

$$\bigwedge_{h \in N} (G_{weh} - eG_h) = 0, \quad (5.10)$$

$$i \quad \bigwedge_{h \in N} B_{weh} = 0. \quad (5.11)$$

Z rys.5.2a oraz z wzorów (5.10) i (5.11) wynika, że:

$$G_{weh} = \frac{({}_oG_{h+k}G_h)[1 + R_h({}_oG_{h+k}G_h)] + R_h({}_oB_{h+k}B_h)^2}{[1 + R_h({}_oG_{h+k}G_h) - X_h({}_oB_{h+k}B_h)]^2 + [X_h({}_oG_{h+k}G_h) + R_h({}_oB_{h+k}B_h)]^2}, \quad (5.12)$$

$$B_{weh} = \frac{({}_oG_{h+k}G_h)[1 + R_h({}_oG_{h+k}G_h)] + R_h({}_oB_{h+k}B_h)^2}{[1 + R_h({}_oG_{h+k}G_h) - X_h({}_oB_{h+k}B_h)]^2 + [X_h({}_oG_{h+k}G_h) + R_h({}_oB_{h+k}B_h)]^2} = 0. \quad (5.13)$$

Wyznaczenie ${}_k B_h$ i ${}_k G_h \in \mathbb{R}$ dla każdej rozpatrywanej harmonicznej z wzorów (5.12) i (5.13) jest zagadnieniem trudnym, wiąże się bowiem z wykazaniem istnienia rozwiązań układów równań nieliniowych względem ${}_k B_h$ i ${}_k G_h$ spełniających warunki realizowalności fizycznej w zadanej klasie układów. Wyznaczenie wartości ${}_k B_h$ i ${}_k G_h$ jest możliwe w ogólnym przypadku tylko za pomocą metod iteracyjnych, co sprawia, że problem syntezy kompensatorów jest w tym przypadku złożony. Można ponadto wykazać [58], że rozwiązania układów równań (5.12), (5.13) są realizowane w dwóch różnych strukturach kompensatorów. Jedna z nich zapewnia realizację prądu optymalnego (5.6), druga natomiast prowadzi do prądu, który maksymalizuje wskaźnik jakości (5.4). Realizacja (zastosowanie) tej struktury kompensatora jest niedopuszczalna. Problem ten ulega jeszcze bardziej istotnej komplikacji w przypadku układu z wieloma źródłami napięcia.

Ponadto podejście to jest słuszne wyłącznie dla układów SLS w przeciwieństwie do metody opisaną według sposobu B.

B. Wyznaczanie admitancji kompensatora na podstawie znajomości optymalnego napięciowo-prądowego punktu pracy sieci

W tym celu należy:

- 1) rozwiązać dla rozpatrywanej sieci odpowiedni problem optymalizacyjny (por. rozdz.3),
- 2) założyć zbiór dostępnych pomiarowo zacisków sieci, do których dołączone zostaną kompensatory,
- 3) określić optymalne stany prądowo-napięciowe przyporządkowane tym zaciskom,
- 4) na podstawie znajomości napięć i prądów optymalnych na wybranych zaciskach sieci określić parametry kompensatorów.

Podejście to dla rozpatrywanego układu jednofazowego (rys.5.1) oraz problemu optymalizacyjnego (5.4), (5.5) sprowadza się do postępowania według następującego algorytmu:

1. Wyznaczenie prądu optymalnego dla każdej rozpatrywanej harmonicznej (por. rozdz. 3 wzory 3.36 i 3.37)

$$I_h^{\text{opt}} = \frac{\lambda_*}{2(\nabla_h^2 + \lambda_* R_h)} E_h, \quad h \in \{0,1,2,\dots\}. \quad (5.14)$$

2. Wyznaczony prąd optymalny (5.14) pozwala na wyznaczenie napięcia panującego na zaciskach odbiornika (rys.5.1), jak również kompensatora

$$U_h^{\text{opt}} = E_h - Z_h I_h^{\text{opt}} = \frac{2\nabla_h^2 + \lambda_* Z_h^*}{2(\nabla_h^2 + \lambda_* R_h)} E_h. \quad (5.15)$$

3. Na podstawie wzorów (5.14), (5.15) oraz znajomości widma admitancji odbiornika ${}_o Y_h$ wyznacza się admitancję potrzebnego kompensatora dla poszczególnych harmonicznych

$$\frac{I_h^{\text{opt}}}{U_h^{\text{opt}}} = {}_k Y_h + {}_o Y_h,$$

stąd ostateczna postać admitancji szukanego kompensatora

$${}_k Y_h = \frac{\lambda_*}{2\nabla_h^2 + \lambda_* Z_h^*} - {}_o Y_h, \quad h \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (5.16)$$

gdzie: $\lambda_* > 0$ - czynnik nieoznaczony Lagrange'a wyznaczony w sposób opisany w rozdziale 3 z warunku mocowego (3.38).

Wyznaczone admitancje kompensatora dla poszczególnych harmonicznych z zależności (5.12), (5.13) czy też z zależności (5.16) mają ściśle określoną wartość części rzeczywistej, jak i urojonej dla każdej rozpatrywanej harmonicznej. Synteza kompensatora polega zatem na znalezieniu układu fizycznego realizującego dane wartości dla tych harmonicznych. Do syntezy zarówno części rzeczywistej, jak i urojonej admitancji kompensatora stosuje się metody interpolacyjne. W ogólnym przypadku wartość części rzeczywistej i admitancji szukanego kompensatora może przybierać zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Z teorii obwodów wiadomo, że nie istnieje taki dwójnik pasywny, którego konduktancja $G(\omega)$ przyjmowałaby zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Zatem realizacja kompensatora zapewniająca optymalny stan pracy obwodu nie jest możliwa przy użyciu tylko elementów pasywnych. Dla spełnienia warunku, aby ${}_k G_h > 0$ lub ${}_k G_h < 0$, zastosowano w niniejszej pracy układy klasy (RLC, $-R^{(1)}$). Realizacja fizyczna takiego dwójnika ma żadaną część rzeczywistą oraz dodatkową część urojoną. Dodatkowa część urojona jest realizowana łącznie z częścią urojoną kompensatora. Z dotychczasowych rozważań wynika, że w ogólnym przypadku synteze kompensatora należy rozpocząć od fizycznej realizacji jego części rzeczywistej przy użyciu kompensatora aktywnego.

Realizacje kompensatora aktywnego w wielu przypadkach mogą być nieuzasadnione (zbyt duże poniesione nakłady w stosunku do uzyskanych efektów), kłopotliwe ze względu na stabilność, dlatego w pracy zaproponowano również rozwiązanie suboptymalne tylko za pomocą kompensatorów LC.

5.2. Synteza dwójników aktywnych

Proces syntezy układów liniowych przeprowadza się np. [41, 44, 78], z reguły w dwóch kolejno po sobie następujących etapach:

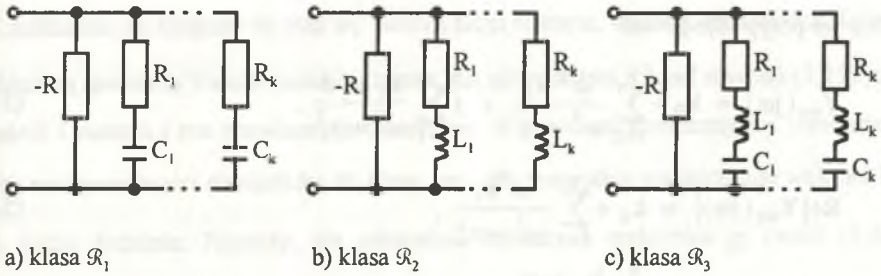
- etapie aproksymacji, polegającej na określeniu immitancji dwójnika (wielobiegunnika) spełniającego warunki realizowalności w zadanej klasie elementów,
- etapie przyporządkowania danej immitancji konkretnego układu realizowalnego fizycznie.

W tej pracy zagadnienia syntezy sprowadza się do rozwiązania pierwszego z wymienionych etapów metodami interpolacyjnymi. Na podstawie prowadzonych rozważań w pracy [65] oraz w punkcie 5.1 admitancja dwójników kompensujących nie jest funkcją rzeczywistą dodatnią, lecz tylko funkcją rzeczywistą, a więc nierealizowalną w klasie układów pasywnych.

Syntezę dwójnika realizującego część rzeczywistą admitancji kompensatora można sformułować następująco. Na zaciski 2-2' układu przedstawionego na rys.5.1 należy dołączyć dwójnik o admitancji $Y(s)$ spełniający zależność:

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \operatorname{Re}\{ {}_k Y(j\omega) \} \Big|_{\omega = \omega_h = h \cdot \omega_0} = {}_k G_h . \quad (5.17)$$

Problem syntezy sprowadza się więc do interpolacji części rzeczywistej admitancji dwójników, zgodnie z wzorem (5.17). W przeciwieństwie do znanych metod syntezy dwójników klasy $(\pm RLC)$, np. [9, 15, 40], admitancja $Y(s)$ dwójnika wynika z rozwiązania postawionego w pracy problemu syntezy, a nie jest wielkością zadaną. Z uwagi na wymaganą stabilność zwarciovą dwójników i możliwie małą liczbę elementów aktywnych użytych do ich realizacji, problem syntezy rozpatrzono w podzbiorach $\mathfrak{R}_1 \subset (RC, -R^{(1)})$, $\mathfrak{R}_2 \subset (RL, -R^{(1)})$, $\mathfrak{R}_3 \subset (RLC, -R^{(1)})$ klas $(\pm RC)$, $(\pm RL)$, $(\pm RLC)$ dwójników o strukturach kanonicznych Fostera przedstawionych na rys.5.3.

Rys.5.3. Klasy realizacji dwójników (RLC, $-R^{(1)}$)Fig.5.3. The realization classes of (RLC, $-R^{(1)}$)

Każda z zaproponowanych struktur zawiera jedną rezystancję ujemną. Rozpatrywany problem syntezy (PS) formuluje się następująco: Należy wyznaczyć admitancję $Y(s)$ dwójnika klasy \mathcal{R}_j , $j \in \{1,2,3\}$ spełniającego warunki określone wzorem (5.17), gdy zadane są:

- konduktancje odbiornika ${}_oG_h$ dla $h \in \{1,2,3\}$ oraz równoważna konduktancja ${}_eG_h$ dla rozpatrywanego problemu optymalizacyjnego,
- zbiór n biegunów $\{s_i = \rho_i + j\beta_i\}_{i \in N_0}$ dwójnika przyjętej klasy \mathcal{R}_j . ■

Przy wykorzystaniu wzorów określających postacie kanoniczne $Y(j\omega)$ dwójników klasy \mathcal{R}_j , rozwiązanie problemu syntezy sprowadza się do rozwiązania następujących układów równań liniowych względem współrzędnych wektora \mathbb{k}_j o postaci

$$\mathbb{V}_j \mathbb{k}_j = \mathbb{g}_j. \quad (5.18)$$

Macierz \mathbb{V}_j oraz wektor \mathbb{g}_j przyjmują różne postacie w zależności od klasy dwójnika $j \in \{1,2,3\}$.

A. Synteza dwójnika w klasie (RL, $-R^{(1)}$)

Rozpatrzmy dwójnik przedstawiony na rys.5.3a, którego admitancja wejściowa

$$Y_{we}(s) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i s}{s + \sigma_i} \quad (5.19)$$

dla $s=j\omega$ przyjmuje postać

$$Y_{we}(j\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^2 k_i}{\omega^2 + \sigma_i^2} + j \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (5.20)$$

$$\operatorname{Re}\{Y_{we}(j\omega)\} = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^2 k_i}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (5.21)$$

$$\operatorname{Im}\{Y_{we}(j\omega)\} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (5.22)$$

gdzie

$$k_0 = -\frac{1}{R} < 0, \quad k_i = \frac{1}{R_i}, \quad C_i = \frac{k_i}{\sigma_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.23)$$

σ_i - biegun realizowanej admitancji $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Układ kompensujący powinien spełniać zależności dla skończonej liczby harmonicznych h

$$\bigwedge_{h \in N_0} \frac{\omega_h^2 k_i}{\omega_h^2 + \sigma_i^2} = k G_h. \quad (5.24)$$

Rozwiązanie problemu sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych względem wektora \mathbb{k}_1 o postaci

$$\mathbb{V}_1 \mathbb{k}_1 = \mathbb{g}_1. \quad (5.25)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_1 &= [k_1, k_2, \dots, k_n]^T, \\ \mathbb{g}_1 &= [g_1, g_2, \dots, g_n]^T, \\ g_i &= k G_h - k_0, \quad i = h \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\mathbb{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Z założenia, że bieguny σ_i oraz ω_i tworzą ciągi rosnące, wynika, że macierz \mathbb{V}_1 jest uogólnioną macierzą Vandermonde'a, zatem jest nieosobliwa. Układ równań (5.25) jest układem Cramera i ma rozwiązania niezerowe. Warunkiem koniecznym i wystarczającym realizowalności dwójników tej klasy jest, aby wszystkie współrzędne wektora \mathbb{k}_1 były ściśle dodatnie. Niestety, dla arbitralnie dobranych wektorów \mathbb{g}_1 (wzór (5.26) i zbioru $\{\sigma_i\}$, $i = N \in \{1, 2, \dots, n\}$ nie zawsze istnieje ściśle dodatnie rozwiązanie układu równań (5.28)

$$\mathbb{k}_1 = \mathbb{V}_1^{-1} \mathbb{g}_1. \quad (5.28)$$

Propozycje wyznaczenia ściśle dodatniego wektora \mathbb{k}_1 jak i pozostałych \mathbb{k}_2 i \mathbb{k}_3 zostanie przedstawiona po omówieniu syntezy dwójników w dwóch następujących podklasach (RL, $-R^{(1)}$) oraz (RLC, $-R^{(1)}$).

B. Synteza dwójników w klasie (RL, $-R^{(1)}$)

Dwójnik przedstawiony na rys.5.3b ma admitancję wejściową

$$Y_{we}(s) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + \sigma_i} \quad (5.29)$$

i dla $s=j\omega$ przyjmuje postać

$$Y_{we}(j\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i}{\omega^2 + \sigma_i^2} + j \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (5.30)$$

$$\operatorname{Re}\{Y_{we}(j\omega)\} = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (5.31)$$

$$\operatorname{Im}\{Y_{we}(j\omega)\} = - \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (5.32)$$

gdzie:

$$k_0 = -\frac{1}{R} < 0, \quad L_i = \frac{1}{k_i}, \quad R_i = \frac{\sigma_i}{L_i}, \quad (5.33)$$

$\{\sigma_i\}$ - zbiór biegunów realizowanej funkcji i $\in \{1, 2, \dots, n\}$.

Jeżeli sformułuje się problem syntezy tak jak poprzednio, układ kompensujący powinien spełniać zależności dla skończonej liczby harmoniczných:

$$\bigwedge_{h \in N_0} \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i k_i}{\omega_h^2 + \sigma_i^2} = k G_h. \quad (5.34)$$

Dla rozpatrywanej klasy układów realizacji macierz \mathbb{V}_2 równania (5.25) przyjmuje postać

$$\mathbb{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \frac{\sigma_2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_1}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Procedura wyznaczania wektora \mathbb{k}_2 jest taka sama jak w poprzednim punkcie, a mianowicie

$$\mathbb{k}_2 = \mathbb{V}_2^{-1} \mathbb{g}_2. \quad (5.36)$$

C. Synteza dwójników w klasie (RLC, -R⁽¹⁾)

Rozpatrywany dwójnik złożony jest z równoległego połączenia rezystancji ujemnej (-R) i dwójnika RLC. Struktura Fostera przedstawiona jest na rys.5.3c. Admitancja przedstawionego dwójnika wyraża się wzorem:

$$Y_{we}(j\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{-(s_i + s_i^*)\omega^2 k_i}{(s_i s_i^* - \omega^2)^2 + \omega^2(s_i + s_i^*)^2} + j \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega(s_i s_i^* - \omega^2)}{(s_i s_i^* - \omega^2)^2 + \omega^2(s_i + s_i^*)^2} \quad (5.37)$$

gdzie:

$$\operatorname{Re}\{Y_{we}(j\omega)\} = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{-(s_i + s_i^*)\omega^2 k_i}{(s_i s_i^* - \omega^2)^2 + \omega^2(s_i + s_i^*)^2}, \quad (5.38)$$

$$\operatorname{Im}\{Y_{we}(j\omega)\} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega(s_i s_i^* - \omega^2)}{(s_i s_i^* - \omega^2)^2 + \omega^2(s_i + s_i^*)^2}, \quad (5.39)$$

$$k_0 = -\frac{1}{R}, \quad R_i = \frac{-(s_i + s_i^*)}{k_i}, \quad L_i = \frac{1}{k_i}, \quad C_i = \frac{1}{L_i s_i s_i^*},$$

$s_i = -\sigma_i + j\beta_i$, $s_i^* = -\sigma_i - j\beta_i$ - założone bieguny funkcji.

Wyznaczenie elementów dwójnika sprowadza się do rozwiązania równania macierzewego o postaci:

$$\mathbb{V}_3 \mathbb{k}_3 = \mathbb{g}_3, \quad (5.40)$$

gdzie:

$$\mathbb{V}_3 = \begin{bmatrix} \frac{-(s_1 + s_1^*)\omega_1^2}{(s_1 s_1^* - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 (s_1 + s_1^*)^2} & \frac{-(s_2 + s_2^*)\omega_1^2}{(s_2 s_2^* - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 (s_2 + s_2^*)^2} & \dots & \frac{-(s_n + s_n^*)\omega_1^2}{(s_n s_n^* - \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 (s_n + s_n^*)^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-(s_1 + s_1^*)\omega_n^2}{(s_1 s_1^* - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2 (s_1 + s_1^*)^2} & \frac{-(s_2 + s_2^*)\omega_n^2}{(s_2 s_2^* - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2 (s_2 + s_2^*)^2} & \dots & \frac{-(s_n + s_n^*)\omega_n^2}{(s_n s_n^* - \omega_n^2)^2 + \omega_n^2 (s_n + s_n^*)^2} \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$\mathbb{k}_3 = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T - \text{macierz szukanych współczynników } k_i, \quad (5.42)$$

$$\mathbb{g}_3 = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T, \quad g_i = k G_i - k_0. \quad (5.43)$$

Wobec założenia biegunów s_i i s_i^* tak, aby macierz \mathbb{V}_3 była nieosobliwa, układ (5.40) jest układem Cramera i ma rozwiązania niezerowe o postaci:

$$\mathbb{k}_3 = \mathbb{V}_3^{-1} \mathbb{g}_3. \quad (5.44)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym fizycznej realizowalności dwójnika pokazanego na rys.5.3c jest dodatniość współczynników k_i wektora \mathbb{k}_3 .

Ustalenie warunków, przy których wektor $\mathbb{k}_j \in \{1,2,3\}$ będzie ściśle dodatni, jest trudne [6]. Rozwiązanie tego problemu można przedstawić w następującej formie: Zakładając, że bieguny $|\sigma_i| |s_i|$ i pulsacje ω_h tworzą ciągi rosnące, można wykazać, że macierze $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3$ są uogólnionymi macierzami Vandermonde'a, co gwarantuje istnienie rozwiązań

$$\mathbb{k}_j = \mathbb{V}_j^{-1} \mathbb{g}_j, \quad j \in \{1,2,3\}. \quad (5.45)$$

Skończenie wymiarowe operatory $\mathbb{V}_j \in \{1,2,3\}$ opisane macierzami $\mathbb{V}_j, j \in \{1,2,3\}$ odwzorowują więc iniektywnie stożki $K^+(\mathbb{R}^n)$ w przestrzeni \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{V}_j : K^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{V}_j K^+(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n \quad (5.46)$$

gdzie:

V_j - operator opisany macierzą (5.27) dla $j = 1$, opisany macierzą (5.35) dla $j = 2$ oraz macierzą (5.41) dla $j=3$.

$$K^+(\mathbb{R}^n) = \{k \in \mathbb{R}^n : k_1 > 0, k_2 > 0, \dots, k_n > 0\}. \quad (5.47)$$

Dobierając wartość współczynnika k_0 zgodnie ze wzorem

$$\bigwedge_{h \in \{1, \dots, n\}} (k G_h - k_0) > 0, \quad (5.48)$$

można zauważyć, że operatory V_j odwzorowują stożek $K^+(\mathbb{R}^n)$ w siebie, tzn.:

$$V_j : K^+(\mathbb{R}^n) \rightarrow V_j K^+(\mathbb{R}^n) \subset K^+(\mathbb{R}^n) \quad (5.49)$$

Zbiór $V_j K^+$ nazywamy klinem [47]

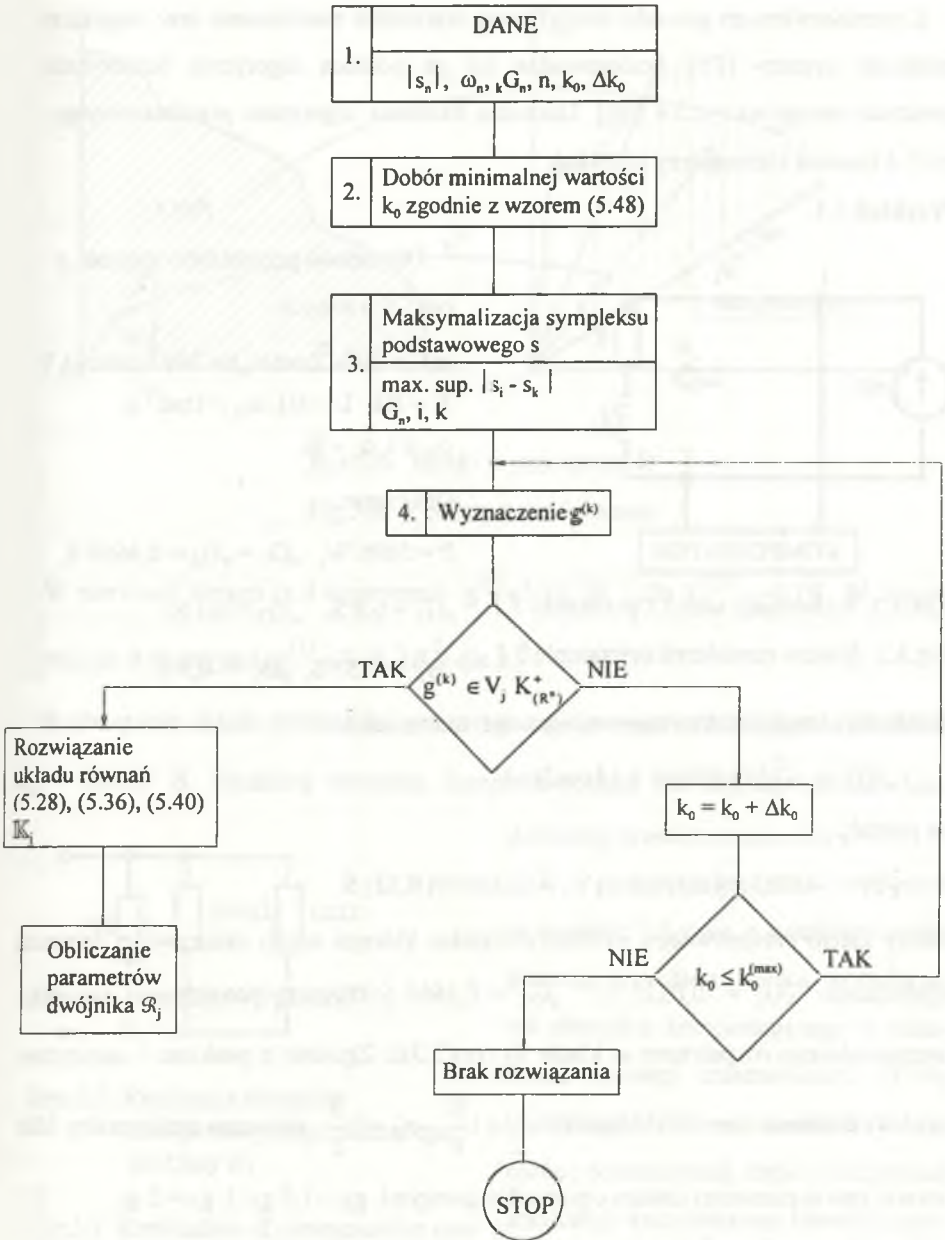
Z rozważań tych wynika, że jeżeli:

1) założone w problemie syntezy (PS) ciągi $(\sigma_h)_{h \in \mathbb{N}_0}$, $(|s_n|)$, $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ są ciągami rosnącymi,

$$2) \bigvee_{k_0 \in \mathbb{R}^-} \bigwedge_{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}} g \in V_j K^+(\mathbb{R}^n), \quad (5.50)$$

to problem syntezy ma rozwiązanie pozytywne.

Niestety, opisany warunek (5.40) nie pozwala w sposób jednoznaczny stwierdzić, czy dla danego zbioru biegunów dwójnika (dla danej klasy \mathfrak{R}_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, pulsacji $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oraz zbioru parametrów kompensatora $\{k G_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ istnieje rozwiązanie problemu syntezy (PS). Wynika to z faktu, że macierze V_j , $j \in \{1, 2, 3\}$ nie są macierzami typu \mathfrak{M} [6] posiadającymi dodatnie odwrotności, a uogólniona teoria dodatniej odwracalności operatorów V_j [4, 5] nie pozwala określić w postaci jawnej warunków istnienia dodatnich operatorów V_j^{-1} , $j \in \{1, 2, 3\}$.

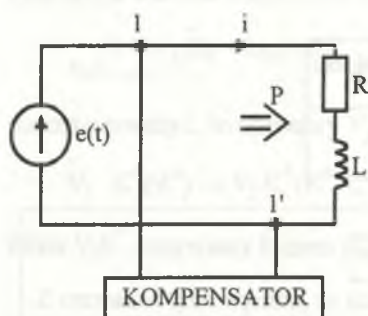


Rys.5.4. Algorytm numeryczny

Fig.5.4. Numerical algorithm

Z przedstawionego powodu identyfikację warunków rozwiązania oraz rozwiązanie problemu syntezy (PS) przeprowadza się za pomocą algorytmu numerycznego przedstawionego na rys.5.4 [80]. Ilustracją działania algorytmu przedstawionego na rys.5.4 stanowi elementarny przykład.

Przykład 5.1



Rys.5.5. Rozważany układ z przykładu 5.1

Fig.5.5. System considered in example 5.1

Dla układu przedstawionego na

rys.5.5 o danych:

$$e(t) = 100\sqrt{2} \cos\omega_0 t + 30\sqrt{2} \cos\omega_0 t \text{ V,}$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, \omega_0 = 1\text{rad/s,}$$

$$\rho_0 = 1, \rho_1 = 0.$$

Obliczono:

$$P = 5090 \text{ W, } eG_1 = eG_3 = 0,4669 \text{ S,}$$

$$oG_1 = 0,5 \text{ S, } oG_3 = 0,1 \text{ S,}$$

$$oB_1 = -0,55 \text{ S, } oB_3 = -0,3 \text{ S.}$$

Admitancja kompensatora zapewniająca optymalny prąd

$${}_a i(t) = \sqrt{2}(46,69 \cos t + 14 \cos 3t) \text{ A}$$

ma postać:

$${}_k Y_1 = (-0,0331 + j 0,55) \text{ S; } {}_k Y_3 = (0,3669 + j 0,33) \text{ S.}$$

Należy zatem przeprowadzić syntezę dwójnika, którego części rzeczywiste wynoszą odpowiednio ${}_k G_1 = -0,0331 \text{ S}$, ${}_k G_3 = 0,3669 \text{ S}$. Syntezę potrzebnego dwójnika kompensującego rozpatrzono w klasie \mathcal{R}_1 (rys.5.3a). Zgodnie z punktem 1 algorytmu

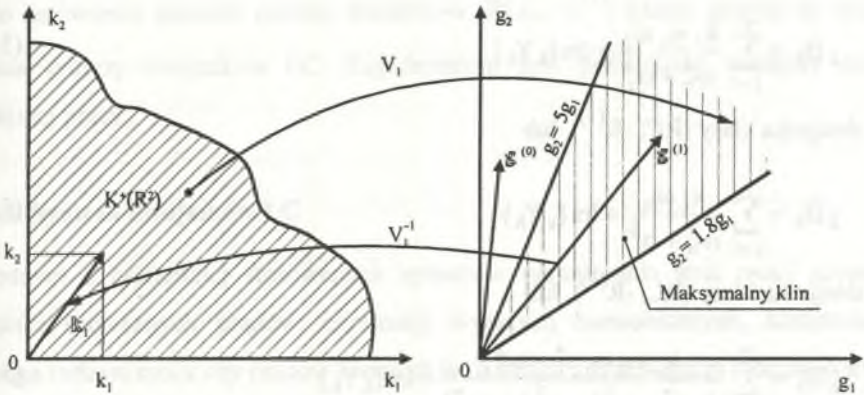
(rys.5.4) założono: wartości biegunów $\sigma_1 = 1 \frac{\text{S}}{\text{F}}$, $\sigma_2 = 3 \frac{\text{S}}{\text{F}}$, wówczas maksymalny klin

zawarty jest w pierwszej ćwiartce pomiędzy prostymi $g_2 = 1,8 g_1$ i $g_2 = 5 g_1$.

Zgodnie z punktem 2 algorytmu obliczono:

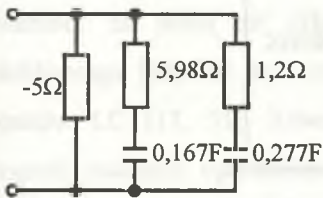
$$k_0 = -0,1 \text{ S.}$$

Maksymalny klin (punkt 3 algorytmu) przedstawiono na rys.5.6.

Rys.5.6. Stożki w przestrzeni R^2 Fig.5.6. A cones in the R^2 space

W pierwszej iteracji (p.4 algorytmu) $g^{(0)} \notin V_1 K^+(R^2)$ dla $k_0^{(0)} = -0,1$ S. W drugiej iteracji (p. 4 algorytmu) $g^{(1)} \in V_1 K^+(R^2)$ dla $k_0^{(1)} = -0,2$ S.

Rozwiązanie układu równań liniowych zgodnie z wzorem (5.25) daje $k_1=0,167$ S, $k_2 = 0,8327$ S. Strukturę dwójnika kompensacyjnego realizującego zadane kon-



Rys.5.7. Realizacja dwójnika kompensacyjnego należącego do klasy R_1

Fig.5.7. Realization of compensation one-port belonging to R_1 class

duktancje przedstawiono na rys.5.7.

Z przeprowadzonych rozważań w punkcie 5.2 oraz z przedstawionego prostego przykładu wynika, że dołączenie dwójnika kompensującego o admittancji opisanej zależnościami (5.19), (5.30) bądź (5.37) wprowadza do układu oprócz poszukiwanej części rzeczywistej admittancji kompensatora również część urojoną admittancji. Część urojona admittancji

opisana jest odpowiednio zależnościami (5.22), (5.33) bądź (5.38). Na skutek wprowadzonej części urojonej określonej wzorami (5.22), (5.32) oraz (5.39) syntetyzowana część urojona admittancji kompensatora przyjmuje postać

$${}_k B'_h = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i \omega_h}{\omega_h^2 + \sigma_i^2} + \text{Im}\{{}_k Y_h\} \quad (5.51)$$

dla dwójnika klasy (RC, $-R^{(1)}$), lub

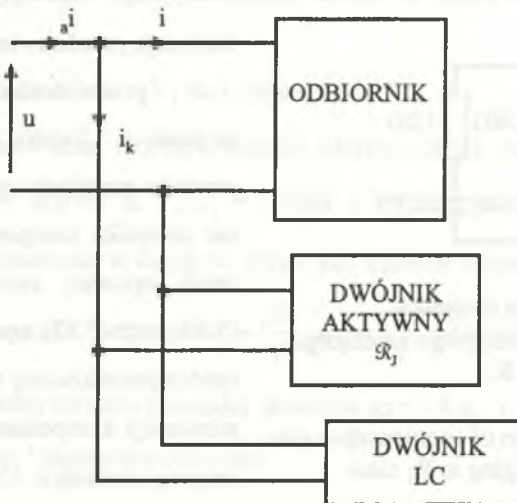
$${}_k B'_h = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega_h}{\omega_h^2 + \sigma_i^2} + \text{Im}\{{}_k Y_h\} \quad (5.52)$$

dla dwójnika klasy (RL, $-R^{(1)}$), lub

$${}_k B'_h = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega_h (s_i s_i^* - \omega_h^2)}{(s_i s_i^* - \omega_h^2) + \omega_h^2 (s_i + s_i^*)} + \text{Im}\{{}_k Y_h\} \quad (5.53)$$

dla dwójnika klasy (RLC, $-R^{(1)}$).

Z przeprowadzonych dotychczas rozważań oraz z zależności (5.51), (5.52), (5.53) wynika, że przystępując do całkowitej kompensacji należy najpierw przeprowadzić syntezę dwójnika odpowiadającego części rzeczywistej admitancji kompensatora, a następnie dopiero syntezę kompensatora realizującego wspólną część urojoną admitancji określoną wzorami (5.51), (5.52), (5.53). Pełny układ do całkowitej kompensacji przedstawiono na rys.5.8.



Rys.5.8. Układ do całkowitej kompensacji

Fig.5.8. The system to total compensation

Po omówieniu sposobu syntezy dwójników (RLC, $-R^{(1)}$) należy przejść do rozpatrzenia syntezy dwójników LC. Zagadnieniom tym poświęcono następny punkt niniejszej pracy.

5.3. Synteza dwójników LC

Jednym z najczęściej stosowanych sposobów ograniczania strat mocy czynnej, wartości skutecznych prądów, eliminacji wyższych harmonicznych, kompensacji różnego rodzaju mocy czy prądów biernych w układach z przebiegami odkształconymi okresowymi jest instalowanie na zaciskach odbiornika układów bezstratnych LC. Układy te mają zatem na celu zwiększenie efektywności wykorzystania źródeł pracujących w warunkach deformacji prądu i napięcia poprzez kompensowanie szkodliwych efektów ubocznych, które pojawiają się podczas transportu mocy czynnej P ze źródła do odbiornika. Elementy LC są częścią składową układów dopasowujących źródła do odbiornika. Stosowanie tych elementów dla niektórych z wymienionych celów jest od dawna proponowane i częściowo opisane w literaturze, np. [8, 46, 49, 51, 93]. Problem syntezy dwójników LC do opisanych celów pojawił się również wraz z proponowaną teorią mocy opartą na rozkładach ortogonalnych prądu źródła. Zauważono, że jedną ze składowych prądu wprowadzoną przez Shepherda i Zakikhaniego [69, 70], tzw. składową bierną, można kompensować za pomocą dwójników LC [17, 31]. Również opisane w poprzednich punktach niniejszej monografii podejście optymalizacyjne prowadzi do wyróżnienia układu kompensacyjnego w postaci dwójnika (wielobiegownika) o narzuconej admitancji dla rozpatrywanych harmonicznych. Dwójnik realizujący część urojoną admitancji kompensatora również musi być wyznaczony na podstawie syntezy. Istniały przykłady syntezy dwójników LC [17, 20, 22] dla niewielkiej liczby harmonicznych. Brak było natomiast analizy warunków istnienia rozwiązań syntezy takich dwójników dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych. Zagadnienia syntezy dwójników LC dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych pojawiły się wraz z rozwojem proponowanych metod optymalizacyjnych, przedstawiono je w pracach [56, 59, 65]. W pracach tych

podano warunki konieczne oraz podjęto próbę udowodnienia warunków wystarczających dla rozwiązania tego problemu w całej klasie dwójników LC, dla dowolnego widma susceptancji kompensatora ${}_k B_h$. Susceptancja ${}_k B_h$ stanowi część urojoną admitancji kompensatora optymalizującego wybrane warunki pracy układu. Przedstawmy pokrótce problematykę syntezy dwójników LC metodą interpolacyjną dla dowolnej skończonej liczby harmoniczych.

5.3.1. Interpolacyjna metoda syntezy

Na podstawie przeprowadzonych rozważań w punkcie 5.2 można stwierdzić, że w ogólnym przypadku część urojona admitancji kompensatora określona jest wzorami (5.51), (5.52), (5.53) w zależności od realizowanej klasy \mathcal{R}_j , $j=1,2,3$ części rzeczywistej admitancji kompensatora. Wobec tego problem sprowadza się do syntezy dwójników reaktancyjnych o susceptancjach $B_r(\omega)$ spełniających warunki

$$\bigwedge_{h \in N_0} B_r(\omega_h) = {}_k B'_h = \text{Im}\{ {}_k Y'_h \} \quad (5.54)$$

gdzie: ${}_k B'_h$ - określone jest odpowiednio jednym z wzorów (5.51 ÷ 5.53).

Problem syntezy dwójników spełniających warunek (5.54) można sformułować na wiele sposobów. Dwa z nich opisano poniżej.

Problem syntezy PS.1

Wyznaczyć funkcję reaktancyjną $B_r(\omega)$ określoną wzorem [41, 55]

$$B_r(\omega) = \frac{H \prod_{i=1}^n (\omega^2 - \omega_{2i+1}^{*2})}{\omega \prod_{i=1}^n (\omega^2 - \omega_{2i}^{*2})}, \quad (5.55)$$

i równocześnie spełniającą warunek przeplatania zer i biegunów

$$0 \leq \omega_1^* < \omega_2^* < \omega_3^* < \dots < \omega_{2n}^*, \quad (5.56)$$

przy założeniu, że dane są wartości susceptancji kompensatora w skończonej liczbie punktów $\omega_h \in \mathbb{R}^+$ i spełniają warunki określone wzorem:

$$\bigwedge_{h \in N_0} B_r(\omega_h) = \text{Im}\{ {}_k Y'_h \} \quad (5.57)$$

przy czym:

$$\omega_i = \begin{cases} \text{dla } i = 2k \pm 1, & k \in \mathbb{N} - \text{zera funkcji reaktancyjnej,} \\ \text{dla } i = 2k, & k \in \mathbb{N} - \text{bieguny funkcji reaktancyjnej,} \end{cases}$$

$$\omega_h = h\omega_0 = h \cdot \frac{2\pi}{T}; \quad h \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}, \quad H \in \mathbb{R},$$

\mathbb{N}_0 - pewien skończony podzbiór zbioru liczb naturalnych.

Przed przystąpieniem do rozwiązania przedstawionego problemu syntezy PS.1, zbiór wszystkich dwójników reaktancyjnych LC opisany ogólnie wzorem (5.55) można podzielić na cztery następujące rozłączne klasy (D1 ÷ D4), charakteryzujące się różnymi własnościami funkcji $B_r(\omega)$ przy dążeniu ich argumentu ω do zera oraz nieskończoności:

$$\left. \begin{array}{l} \text{klasa D1: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = \infty, \\ \text{klasa D2: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = 0, \\ \text{klasa D3: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = \infty, \\ \text{klasa D4: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.58)$$

Przedstawiony problem syntezy PS.1 sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań algebraicznych nieliniowych:

$$-k B_h^* h \omega_1 \prod_{i=1}^n \left((h\omega_1)^2 - \omega_{2i}^{*2} \right) = H \prod_{i=1}^n \left((h\omega_1)^2 - \omega_{2i\pm 1}^{*2} \right) \quad (5.59)$$

względem niewiadomych: $H, \omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_{2n\pm 1}^*$ przy czym niewiadome (zera i bieguny

funkcji $B_r(\omega)$, ω_i^* ($i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$) powinny spełniać warunek przeplatania określony

wzorem (5.56). Przyjęcie $\omega_1^* > 0$, lub $\omega_1^* = 0$ oraz znaków "+" lub "-" w wskaźniku

$2n\pm 1$ występującym we wzorze (5.59) determinuje wybór przyjętej klasy dwójników

LC. Rozwiązanie układu równań (5.59) pozwala więc wyznaczyć zera i bieguny

funkcji wymiernej (5.55). Funkcja ta spełnia warunki konieczne i wystarczające

realizowalności w klasie dwójników [41], gdy:

- współczynnik H ma znak odpowiedni dla przyjętej do realizacji klasy (D1 - D4) dwójników,
- zera i bieguny funkcji wymiernej spełniają warunek przeplatania (por. wzór (5.56)).

Rozwiązanie problemu PS.1 wymaga:

- wykazania istnienia rozwiązań silnie nieliniowych układów równań (5.59) wraz z podaniem konstrukcji efektywnej procedury rozwiązania tego układu równań i zawierającej sposób doboru przybliżenia początkowego,
- wykazania, że przy odpowiednio dobranym przybliżeniu początkowym istnieje rozwiązanie wymienionego układu równań spełniającego warunki realizowalności w klasie dwójników LC.

Wykazanie wymienionych faktów jest rzeczą bardzo trudną. Dlatego też problem syntezy PS.1 należy sprowadzić do postaci umożliwiającej wykorzystanie teorii układów liniowych.

W tym celu funkcje $B_r(\omega)$, wzór (5.55), należy przedstawić dla poszczególnych klas dwójników w następującej postaci:

- dla dwójników klasy D1:

$$B_r(\omega) = \frac{H}{\omega} \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)}, \quad H = 1 \quad (5.60)$$

gdzie:

$$L(\omega^2) = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{2i} \omega^{2i}, \quad (5.61)$$

$$M(\omega^2) = (-1)^n \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{2i+1} \omega^{2i}, \quad (5.62)$$

- dla dwójników klasy D2:

funkcję $B_r(\omega)$ określa wzór (5.60) dla $H = -1$, przy czym:

$$L(\omega^2) = (-1)^n \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{2i} \omega^{2i}, \quad (5.63)$$

$M(\omega^2)$ - zgodne z wzorem (5.62),

- dla klasy dwójników klasy D3:

$$B_r(\omega) = H\omega \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)}, \quad H = 1, \quad (5.64)$$

$L(\omega^2)$ - określa wzór (5.63),

$M(\omega^2)$ - zgodne z wzorem (5.62),

- dla klasy dwójników D4:

funkcję $B_r(\omega)$ określa wzór (5.64) dla $H = -1$, przy czym

$$L(\omega^2) = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{2i} \omega^{2i}, \quad (5.65)$$

$$M(\omega^2) = (-1)^n \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{2i+1} \omega^{2i}. \quad (5.66)$$

Współczynniki wielomianów występujących we wzorach (5.61-5.66) muszą być dodatnie. Poszukiwaną funkcję $B_r(\omega)$ określoną wzorem (5.55) oraz spełniającą warunek (5.56) można przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów Hurwitza [41], np. dla klasy D2

$$B_r(\omega) = \frac{H(a_{2n}\omega^{2n} - a_{2n-2}\omega^{2n-2} + a_{2n-4}\omega^{2n-4} - \dots - a_2\omega^2 + a_0)}{\omega(a_{2n+1}\omega^{2n} - a_{2n-1}\omega^{2n-2} + \dots - a_3\omega^2 + a_1)} = \frac{H}{\omega} \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)}, \quad (5.67)$$

gdzie:

$$\omega, a_k \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 2n+1\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad H = -1.$$

Wyznaczenie funkcji $B_r(\omega)$ sprowadza się do wyznaczenia wszystkich współczynników a_k $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ wielomianów licznika $L(\omega^2)$ oraz mianownika $M(\omega^2)$, a zatem wyznaczenia wszystkich zer i biegunów funkcji $B_r(\omega)$. Tak postawiony problem prowadzi do równań liniowych jednorodnych, zazwyczaj o rozwiązaniach zerowych [56, 60] o postaci:

$$\begin{bmatrix} {}_k B'_1 \omega_1^{2n+1}, & -H \omega_1^{2n}, & -{}_k B'_1 \omega_1^{2n-1}, & H \omega_1^{2n-2}, & \dots & {}_k B'_1 \omega_1 & -H \\ {}_k B'_2 \omega_2^{2n+1}, & -H \omega_2^{2n}, & -{}_k B'_2 \omega_2^{2n-1}, & H \omega_2^{2n-2}, & \dots & {}_k B'_2 \omega_2 & -H \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ {}_k B'_h \omega_h^{2n+1}, & -H \omega_h^{2n}, & -{}_k B'_h \omega_h^{2n-1}, & H \omega_h^{2n-2}, & \dots & {}_k B'_h \omega_h & -H \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ {}_k B'_m \omega_m^{2n+1}, & -H \omega_m^{2n}, & -{}_k B'_m \omega_m^{2n-1}, & H \omega_m^{2n-2}, & \dots & {}_k B'_m \omega_m & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.68)$$

gdzie:

$$a_k > 0, \quad {}_k B'_h \in \mathbb{R}, \quad H = -1, \quad \omega_h = h\omega_1, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad h \in \{1, 2, \dots, m\},$$

z wyjątkiem zbioru takich konfiguracji susceptancji kompensatora $({}_k B'_1, {}_k B'_2, \dots, {}_k B'_n)$ leżących na hiperpowierzchniach opisujących zerowanie wyznaczników równania macierzowego (5.68).

Z przedstawionych powodów korzystne jest założenie znajomości wszystkich biegunów lub (zer) funkcji $B_r(\omega)$ i wyznaczenie wszystkich współczynników wielomianu $L(\omega^2)$ lub $M(\omega^2)$ drogą rozwiązania pewnego układu równań liniowych. Tak więc sformalizujmy następujący problem syntezy **PS2**:

Dla przyjętej klasy dwójników LC ($D1 \div D4$) należy wyznaczyć współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ mając dane:

- n zer mianownika ω_{2k}^* ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) odpowiedniego wielomianu $M(\omega^2)$, tzn. wszystkie bieguny funkcji $B_r(\omega)$, spełniające warunki:

$$\bigwedge_{k \in \{1, \dots, n\}} \omega_{2k}^* > \omega_{2k-2}^*, \dots, \omega_{2k}^* > 0,$$

- m wartości funkcji $B_r(\omega)$ dla częstotliwości ω_h , spełniających warunek

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}_0} B_r(\omega_h) = {}_k B_h^* \quad (5.69)$$

gdzie:

$B_r(\omega_h)$ - zadane wartości funkcji B_r dla zadanych pulsacji ω_h .

Zera wielomianów $L(\omega^2)$ oraz $M(\omega^2)$ powinny spełniać warunek przeplatania.

Rozwiązanie przedstawionego problemu syntezy wiąże się z problemem istnienia pewnych rozwiązań układu równań liniowych, których postaci dla różnych klas dwójników LC (D1 ÷ D4) niewiele się różnią. Zapiszmy wymieniony układ równań dla dwójnika należącego do klasy D2, co w niczym nie umniejsza ogólności rozważań. Układ równań dla dwójnika n-tego rzędu ma postać

$$\forall \mathbb{A} = \mathbb{B} \quad (5.70)$$

gdzie:

$$\mathbb{A} = [a_0, a_2, a_4, \dots, -a_{2n-2}, a_{2n}]^T, \quad \bigwedge_{k \in \{0,1,\dots,n\}} a_{2k} > 0, \quad \dim \mathbb{A} = n+1, \quad (5.71)$$

$$\mathbb{B} = [{}_k B'_1 \omega_1 M(\omega_1^2), \dots, {}_k B'_h \omega_h M(\omega_h^2), \dots, {}_k B'_q \omega_q M(\omega_q^2)]^T, \quad (5.72)$$

$h \in \mathbb{N}, B_h \in \mathbb{R}, q = \max h, \dim \mathbb{B} = n+1,$

$M(\omega_h^2)$ - oznacza wielomian mianownika funkcji,

$\omega_1, \dots, \omega_h$ - oznaczają zbiór pulsacji przyporządkowanych susceptancjom kompensatora ${}_k B'_h,$

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \dots \omega_1^{2n-4} & \omega_1^{2n-2} & \omega_1^{2n} \\ 1 & \omega_h^2 \dots \omega_h^{2n-4} & \omega_h^{2n-2} & \omega_h^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega_q^2 \dots \omega_q^{2n-4} & \omega_q^{2n-2} & \omega_q^{2n} \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Z założenia $\omega_i \neq \omega_j$ (dla $i \neq j, i, j, \in \mathbb{N}_0$), a więc macierz jest macierzą Vandermonde'a o wymiarze $n+1$ i jest ona nieosobliwa [52]. Układ równań (5.70) jest układem Cramera i ma zawsze rozwiązania niezerowe [52]. Twierdzenie Cramera nie podaje warunków istnienia rozwiązań układu równań (5.68), przy których zachodzi zgodność znaków wektorów \mathbb{A}, \mathbb{B} .

Przejdźmy obecnie do określenia tych warunków [56]. Warunki te dotyczą:

- sposobu doboru częstotliwości przyporządkowanych zadanym biegunom funkcji B_r i usytuowania względem nich częstotliwości ω_h przyporządkowanych zadanym wartościom funkcji $B_r(\omega)$, oznaczonym przez ${}_k B'_h,$
- charakteru jakościowego zmian wartości ${}_k B'_h,$ w funkcji częstotliwości.

Korzystając z wcześniej podanych zapisów funkcji $B_r(\omega)$ dla poszczególnych klas dwójników (por. wzory (5.60 ÷ 5.66) oraz wykorzystując wzór (5.59) i posługując się metodą indukcji można wykazać, że warunki konieczne i wystarczające zgodności znaków składowych wektorów \mathbb{A} i \mathbb{B} są następujące:

- dla dwójników klasy D1:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_{2k}^* \quad k \in \{2, 3, \dots, n\}, \quad (5.74)$$

$$\bigwedge_{h \in N_0, h > 2} \omega_{2k-2}^* < \omega_h < \omega_{2k}^*, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\},$$

$${}_k B'_1 < 0, \text{ dla } \omega = \omega_1, \quad {}_k B'_2 > 0, \text{ dla } \omega = \omega_2, \quad (5.75)$$

$$\bigwedge_{h \in N_0, h > 2} {}_k B'_h > 0, \quad (5.76)$$

- dla dwójników klasy D2 (dwa warianty a oraz b):

wariant a)

$$\bigwedge_{h \in N_0} \omega_{2k-2}^* < \omega_h < \omega_{2k}^*, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.77)$$

$$\bigwedge_{h \in N_0} {}_k B'_h < 0, \quad (5.78)$$

wariant b)

$$\bigwedge_{h \in N_0} \omega_{2k-2}^* < \omega_h < \omega_{2k}^*, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.79)$$

$${}_k B'_h < 0 \text{ dla } \omega = \omega_1,$$

$$\bigwedge_{h \in N_0, h > 2} {}_k B'_h > 0, \quad (5.80)$$

- dla dwójników klasy D3:

$$\bigwedge_{h \in N_0} \omega_{2k-2}^* < \omega_h < \omega_{2k}^*, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.81)$$

$$\bigwedge_{h \in N_0} {}_k B'_h > 0, \quad (5.82)$$

- dla dwójników klasy D4:

$$\bigwedge_{h \in N_0} \omega_{2k-2}^* < \omega_h < \omega_{2k}^*, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (5.83)$$

$$\bigwedge_{h \in N_0} {}_k B'_h > 0. \quad (5.84)$$

We wzorach (5.74 ÷ 5.84) wielkości ω_{2k}^* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ oznaczają częstotliwości przyporządkowane biegunom poszukiwanej funkcji reaktancyjnej dla danej klasy dwójników, a wielkości ω_h oznaczają częstotliwości przyporządkowane stałym ${}_k B'_h$.

Wyznaczone funkcje reaktancyjne dwójników kompensujących ${}_k B_r(\omega)$ w zależności od klasy różnią się nie tylko postacią, lecz także i możliwościami kompensacyjnymi. Funkcje ${}_k B_r(\omega)$ dla poszczególnych klas spełniające warunki (5.74 ÷ 5.84) zestawiono w tabelicy 5.1 na przykładzie dwójnika posiadającego trzy skończone bieguny. Natomiast w tabelicy 5.2 przedstawiono odpowiadające struktury Fostera dla poszczególnych dwójników.

Jeżeli wektor susceptancji kompensatora nie spełnia żadnego z wymienionych warunków (5.74 ÷ 5.84), to istnieje możliwość wyznaczenia struktur dwójników kompensujących przy zastosowaniu rozkładu susceptancji kompensatora na dwa składniki. W pracy rozkład ten nazywamy rozkładem „delta”. Według zaproponowanego rozkładu wektor susceptancji kompensatora należy rozłożyć na dwa wektory ${}_k B_{h1}$ i ${}_k B_{h2}$ według następującej zasady:

$${}_k B_{h1} = \left\{ \begin{array}{ll} {}_k B'_h + \Delta_h, & \text{jeżeli } {}_k B'_h > 0 \\ \Delta_h, & \text{jeżeli } {}_k B'_h < 0 \end{array} \right\} \quad (5.85)$$

$${}_k B_{h2} = \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_h, & \text{jeżeli } {}_k B'_h > 0 \\ {}_k B'_h - \Delta_h, & \text{jeżeli } {}_k B'_h < 0 \end{array} \right\} \quad (5.86)$$

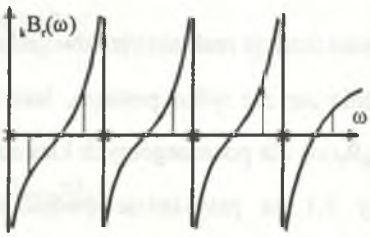
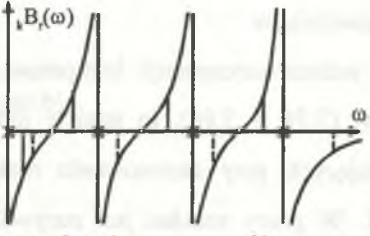
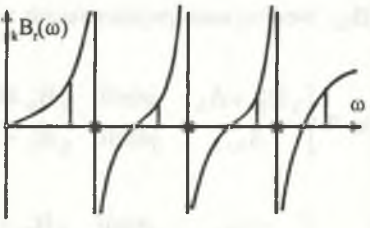
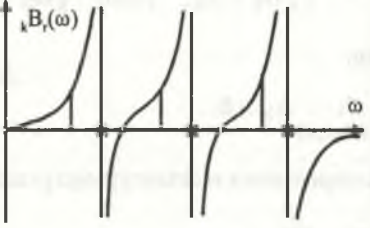
przy czym:

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta_h > 0.$$

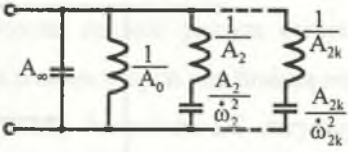
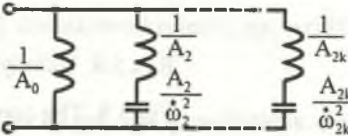
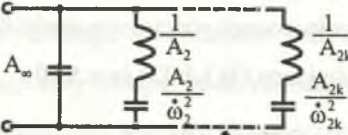
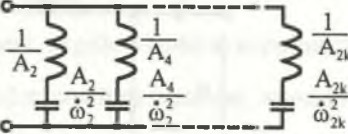
Prąd kompensatora reaktancyjnego przedstawimy wówczas w postaci wzoru:

$${}_k i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^n j {}_k B_{h1} E_h \exp(jh\omega_0 t) + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^n j {}_k B_{h2} E_h \exp(jh\omega_0 t) = {}_k i_1 + {}_k i_2. \quad (5.87)$$

Tablica 5.1

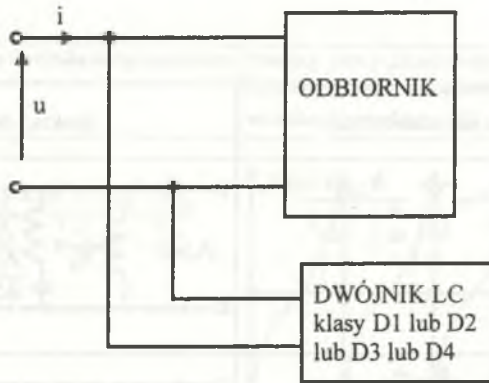
Klasa dwójnika	Postać analityczna dwójnika kompensującego ${}_k B_r(\omega)$	Przebieg funkcji ${}_k B_r(\omega)$ dwójnika kompensującego z zaznaczonymi warunkami na wektor ${}_k B'_h$	Liczba komp. harm.
D1	${}_k B_r(\omega) = \frac{a_0 \omega^8 - a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^*) (\omega^2 - \omega_4^*) (\omega^2 - \omega_6^*)}$		5
D2	${}_k B_r(\omega) = \frac{-a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^*) (\omega^2 - \omega_4^*) (\omega^2 - \omega_6^*)}$	 <p style="text-align: center;">wariant a) ————— b) —————</p>	4
D3.	${}_k B_r(\omega) = \frac{\omega(a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^*) (\omega^2 - \omega_4^*) (\omega^2 - \omega_6^*)}$		4
D4	${}_k B_r(\omega) = \frac{\omega(-a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^*) (\omega^2 - \omega_4^*) (\omega^2 - \omega_6^*)}$		3

Tablica 5.2

Klasa	Postać kanoniczna $k_i B_i(\omega)$	Struktura dwójnika
D1	$A_\infty \omega - \frac{A_0}{\omega} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	
D2.	$-\frac{A_0}{\omega} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	
D3	$A_\infty \omega + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	
D4	$\sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$	

Zauważamy, że prąd k_{i1} (odpowiadający dodatnim susceptancjom kompensatora) jest zawsze realizowany w klasie dwójników klasy D2, natomiast prąd $k_{i2}(t)$ (odpowiadający ujemnym susceptancjom kompensatora) jest zawsze realizowany w klasach D3 lub D4. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że układ kompensacyjny składa się z:

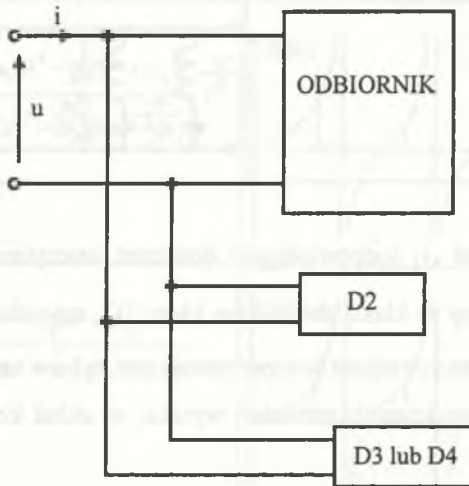
- jednego dwójnika reaktancyjnego należącego do klasy D1 ÷ D4, gdy susceptancje kompensatora spełniają warunki określone wzorami 5.74 ÷ 5.84 (rys.5.9),



Rys.5.9. Układy kompensacyjne

Fig.5.9. The compensation systems

- dwóch połączonych równoległe dwójników LC, z których jeden należy do klasy D2 a drugi do klasy D3 lub D4 (rys.5.10).



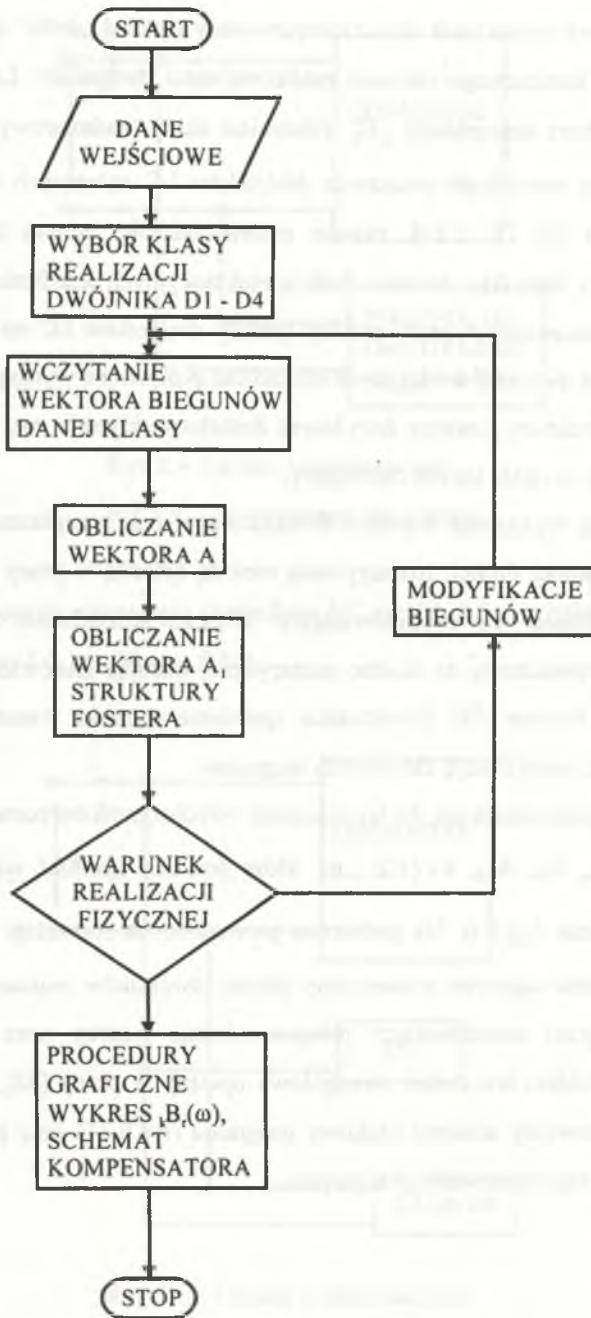
Rys.5.10. Układy kompensacyjne

Fig.5.10. The compensation systems

Dotychczasowe rozważania oraz zaproponowany rozkład „delta” umożliwił wykazanie warunku koniecznego istnienia realizowalności dwójników LC na podstawie dowolnego wektora susceptancji ${}_k B'_h$. Natomiast układ (nadmiarowy) przedstawiony na rys.5.10 jako równoległe połączenie dwójników LC należących odpowiednio do klasy D2 i D3 lub D2 i D4, zawsze można zastąpić jednym dwójnikiem LC. Wykorzystujemy tutaj fakt, że suma funkcji reaktancyjnych jest funkcją reaktancyjną. Według zaproponowanej w pracy metody syntezy dwójników LC otrzymuje się zbiór mocy continuum dwójników mogących realizować postawione wymagania. O wyborze odpowiedniej struktury powinny decydować dodatkowe kryteria, np. wrażliwościowe, którymi w pracy w ogóle się nie zajmujemy.

Podjęte próby wykazania warunku dostatecznego, tzn. przeplatania się zer i biegunów syntezowanej funkcji rozpatrywaną metodą opisaną w pracy [57] (na drodze analitycznej) okazały się niezadowolające. Dlatego sprawdzenie warunku dostatecznego przeprowadzamy na drodze numerycznej badając znak elementów uzyskanego dwójnika Fostera [58]. Ewentualnie spełnienie warunku dostatecznego można uzyskać poprzez modyfikację założonych biegunów.

Obliczenia sprowadzają się do wyznaczania współczynników rozwinięcia II struktury Fostera A_∞ , A_0 , A_{2k} , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, które powinny spełniać warunki $A_\infty \geq 0$, $A_0 \geq 0$, natomiast $A_{2k} > 0$. Na podstawie prowadzonych rozważań został skonstruowany odpowiedni algorytm numeryczny doboru dwójników reaktancyjnych i skonstruowano program umożliwiający przeprowadzenie syntezy wraz z procedurami graficznymi. Problem ten został szczegółowo opisany w pracy [58], natomiast tutaj zostanie przedstawiony schemat blokowy programu (rys.5.11) oraz przykłady zrealizowane według zaproponowanego algorytmu.



Rys.5.11. Schemat blokowy do wyznaczania kompensatora reaktancyjnego
 Fig.5.11. Block diagram for determination of reactance compensator

Przykład 5.2

Przeprowadzić syntezę dwójnika LC (jako kompensatora) mając dane jego susceptancje dla poszczególnych harmonicznych $\kappa B_r(1) = -0,5S$, $\kappa B_r(3) = -0,5S$, $\kappa B_r(7) = -1S$, $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$

Warunki, jakie narzucone są na susceptancje dwójnika kompensującego, spełnione są przez dwójniki klasy D2 (wariant b tablica 5.1). Susceptancja szukanego dwójnika ma postać

$$\kappa B_r(\omega) = \frac{-a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^{*2})(\omega^2 - \omega_4^{*2})}$$

Przyjęto, że bieguny wynoszą $\omega_2^* = 4 \text{ rad/s}$, $\omega_4^* = 8 \text{ rad/s}$. Wówczas równanie (5.70) przybiera postać:

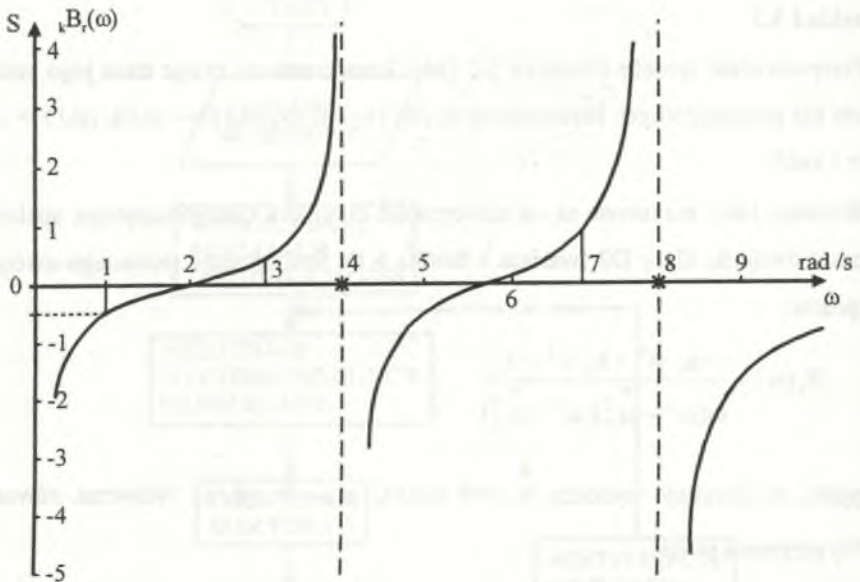
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 91 \\ 1 & 49 & 2401 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_0 \\ a_2 \\ -a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -472,5 \\ 577,5 \\ -3465 \end{bmatrix}$$

Szukane współczynniki funkcji $\kappa B_r(\omega)$ wynoszą odpowiednio $a_0 = 647,31$; $a_2 = 179,65$; $a_4 = 4,84$.

Przebieg funkcji $\kappa B_r(\omega)$ o postaci analitycznej określonej wzorem

$$\kappa B_r(\omega) = \frac{-4,84\omega^4 + 179,65\omega^2 - 647,31}{\omega(\omega^2 - 16)(\omega^2 - 64)}$$

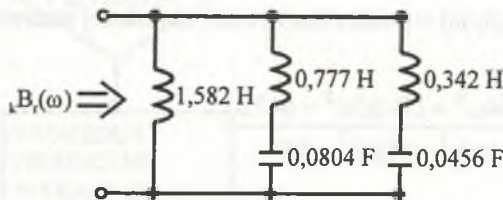
przedstawiono na rys.5.12



Rys.5.12. Przebieg suscepcyjności $k_B r(\omega)$ dwójnika kompensującego LC

Fig.5.12. Plot of susceptance $k_B r(\omega)$ of compensative LC one-port

Natomiast dwójnik reaktancyjny realizujący tę funkcję, jako admitancję dwójnika kompensacyjnego, przedstawiony jest na rys.5.13.



Rys.5.13. Przykładowy dwójnik reaktancyjny realizujący funkcję z przykładu 5.2

Fig.5.13. Exemplary reactance one-port realizing function described in example 5.2

Przykład 5.3

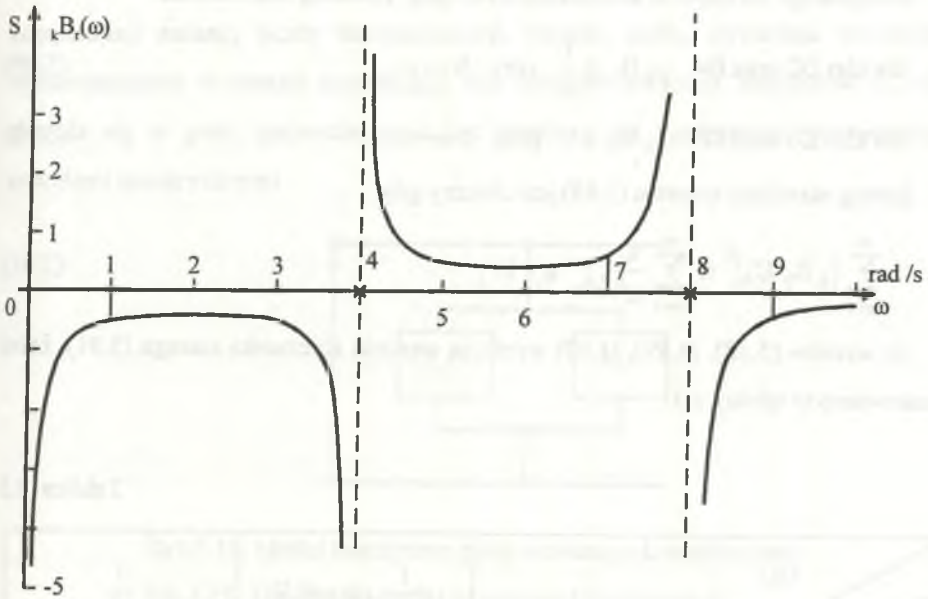
Dobór suscepcyjności dwójnika kompensującego niezgodnie z warunkami podanymi dla danej klasy (D1 ÷ D4) może prowadzić do tego, że otrzymana funkcja w wyniku syntezy nie jest funkcją reaktancyjną i temu celowi służy poniższy przykład. Niech

$$k_{B_r}(1) = -0,5S; \quad k_{B_r}(7) = -0,6S; \quad k_{B_r}(9) = -0,5S, \quad \omega_1 = 1 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 4 \text{ rad/s},$$

$\omega_4 = 8 \text{ rad/s}$, otrzymana funkcja o postaci

$$k_{B_r} = \frac{-0,71\omega^4 + 2,17\omega^2 - 473}{\omega(\omega^2 - 16)(\omega^2 - 64)}$$

nie jest funkcją reaktacyjną. Jej przebieg podano na rys.5.14.



Rys.5.14. Przebieg funkcji $k_{B_r}(\omega)$ z przykładu 5.3

Fig.5.14. Plot of function $k_{B_r}(\omega)$ for example 5.3

Wprowadzenie kompensatora reaktacyjnego do układu, w sposób przedstawiony na rys.5.9 lub rys.5.10, może wprowadzić błędy wynikające z:

- asymptotycznych właściwości widma napięcia na zaciskach kompensatora,
- klasy D1 ÷ D4 zaprojektowanych dwójników LC jako kompensatorów.

Błędy te określa się na podstawie oszacowania prądu kompensatora

$$\sum_{h=1}^{\infty} |k I_h|^2 = \sum_{h=1}^{\infty} |k B_h U_h|^2 = \sum_{h=1}^{\infty} |k B_h|^2 |U_h|^2 \quad (5.88)$$

gdzie:

$k I_h$ - prąd kompensatora reaktancyjnego dla rozważanej harmonicznej,

$k B_h$ - susceptancja kompensatora reaktancyjnego dla rozważanej harmonicznej,

U_h - napięcie na zaciskach kompensatora dla rozważanej harmonicznej.

Susceptancje dwójników kompensujących $k B_h$ spełniają nierówności:

- dla klas D2 oraz D4 $k B_h \leq \frac{1}{h}$ przy $h \rightarrow \infty$, (5.89)

- dla klas D1 oraz D3 $k B_h \leq h$ przy $h \rightarrow \infty$. (5.90)

Szereg określony wzorem (5.88) jest zbieżny gdy:

$$\sum_{h=1}^{\infty} |k B_h U_h|^2 \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{C}{h^\rho}, \quad \rho > 1. \quad (5.91)$$

Ze wzorów (5.88), (5.89), (5.90) wynikają warunki zbieżności szeregu (5.91), które zestawiono w tabelicy 5.3.

Tabelica 5.3

Klasa dwójnika \ $ U_h $	$\frac{1}{h}$	$\frac{1}{h^{\alpha+1}}, \alpha \in (0,1)$	$\frac{1}{h^2}$
D1	-	- gdy: $\alpha \leq 0,5$ + gdy: $\alpha > 0,5$	+
D2	+	+	+
D3	-	- gdy: $\alpha \leq 0,5$ + gdy: $\alpha > 0,5$	+
D4	-	+	+

W tabelicy 5.3 znaki (-) i (+) oznaczają odpowiednio:

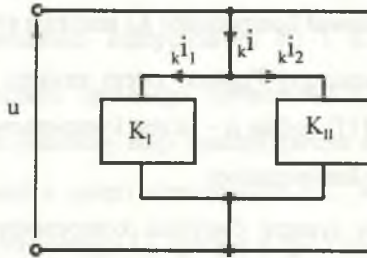
- (minus) niewłaściwy dobór kompensatorów,

+ (plus) właściwy dobór kompensatorów.

W przypadku niezbieżności szeregu (5.88), dobór kompensatora reaktancyjnego, z uwagi na kumulację błędów wynikłych z jego klasy i widma napięcia, należy uznać za niewłaściwy.

5.3.2. Metoda dekompozycji

Przedstawiona w punkcie 5.3.1 procedura doboru dwójników LC według wzoru (5.54) w wielu przypadkach może być bardzo złożona (zaproponowany tzw. rozkład delta, por. wzory (5.85 ÷ 5.86)), co wymaga dużej liczby elementów reaktancyjnych do kompensacji zadanej liczby harmoniczných. Ponadto próba wykazania warunków wystarczających w postaci analitycznej dla fizycznej realizacji dwójników LC nie okazała się w pełni zadowalająca i jest możliwa dla konkretnych przypadków, metodami numerycznymi.



Rys.5.15. Model teoretyczny proponowanego kompensatora

Fig.5.15. Theoretical model of proposed compensator

W niniejszym punkcie przedstawiono metodę, która realizuje dwójnik dobrany według wzoru (5.54) z pewną niedokładnością, ale prowadzi do struktury dwójników LC o mniejszej liczbie elementów.

Model teoretyczny proponowanego kompensatora przedstawiono na rys.5.15.

Kompensator taki składa się (teoretycznie) z dwóch dwójników K_I , K_{II} połączonych równolegle:

- dwójnik K_I opisany funkcją reaktancyjną, realizowany jest za pomocą dwójników LC,

– dwójnik K_{II} opisany na ogół tylko funkcją rzeczywistą, zatem jest nierealizowalny za pomocą dwójnika pasywnego.

Dwójnik K_{II} realizuje prąd $k_i i_2$, dla którego zachodzi związek

$$\|k_i i_2\| < \varepsilon, \quad (5.92)$$

gdzie: $\varepsilon > 0$ jest to dostatecznie mała liczba.

Z drugiej strony spełniona jest zależność

$$\|k_i i\|_{L^2} = \|k_i i_1 + k_i i_2\|_{L^2} \leq \|k_i i_1\|_{L^2} + \|k_i i_2\|_{L^2} \approx \|k_i i_1\|_{L^2} \quad (5.93)$$

widać więc, że skutki włączenia lub niewłączenia kompensatora K_{II} mogą być minimalizowane. Natomiast kompensator K_I eliminujący prąd $k_i i_1$ spełnia równanie z pewnym błędem ε . Ponieważ kompensator K_I realizuje się za pomocą dwójników LC według II struktury kanonicznej Fostera, zatem zawiera on maksymalnie $2n-1$ elementów reaktancyjnych [17] (gdzie n - liczba kompensowalnych harmonicznnych), co jest zaletą takiego doboru kompensatora.

Przedstawmy pokrótce syntezę dwójnika kompensującego K_I , według zaproponowanej metody.

Susceptancję częstotliwościową dwójnika reaktancyjnego LC o II postaci kanonicznej Fostera określa wzór

$${}_k B_r(\omega) = A_\infty \omega - \frac{A_0}{\omega} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2} \quad (5.94)$$

gdzie:

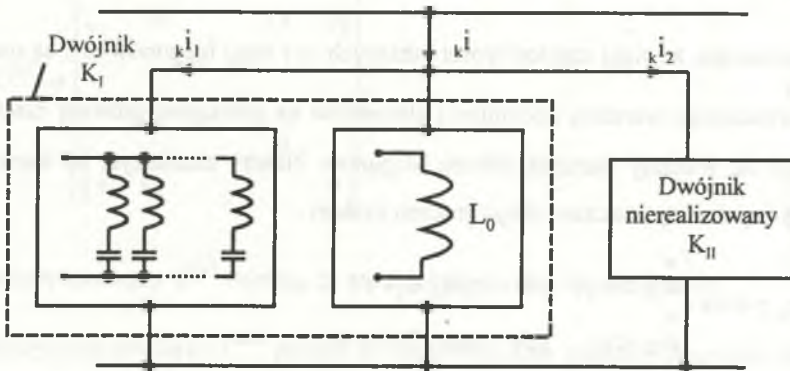
* ω_{2k} - pulsacje biegunów,

ω - pulsacje bieżące.

Na podstawie wzorów (5.54) oraz (5.94) uzyskuje się układ $n+2$ równań:

$$\begin{aligned}
 A_{\infty} \omega_1 - \frac{A_0}{\omega_1} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega_1}{\omega_{2k}^2 - \omega_1^2} &= k B_1, \\
 \vdots \\
 A_{\infty} \omega_h - \frac{A_0}{\omega_h} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega_h}{\omega_{2k}^2 - \omega_h^2} &= k B_h, \\
 \vdots \\
 A_{\infty} \omega_{n+2} - \frac{A_0}{\omega_{n+2}} + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega_{n+2}}{\omega_{2k}^2 - \omega_{n+2}^2} &= k B_{n+2}.
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

Rozwiązania układu równań A_{∞} , A_0 , A_2 , A_{2n} w ogólnym przypadku nie tworzą ciągu liczb dodatnich ($A_{\infty} \geq 0$, $A_0 \geq 0$, $A_{2k} > 0$), co jest warunkiem koniecznym i wystarczającym realizowalności kompensatora K_I i K_{II} w klasie dwójników reaktancyjnych. Analiza układu opisanego równaniami (5.95) jest zbyt złożona, dlatego też przyjmiemy, że pierwszy etap syntezy polega na doborze dwójnika LC o strukturze Fostera złożonej z gałęzi szeregowych LC. W drugim etapie syntezy zostanie dobudowana gałąź równoległa L_0 zgodnie z rys.5.16.



Rys.5.16. Struktura modelu kompensatora reaktancyjnego

Fig.5.16. The structure of reactance compensator model

W pierwszym etapie syntezy układ równań odpowiadający równaniom (5.95) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(k B_1) \frac{\omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} & \operatorname{sgn}(k B_1) \frac{\omega_1}{\omega_4^2 - \omega_1^2} & \dots & \operatorname{sgn}(k B_1) \frac{\omega_1}{\omega_{2n}^2 - \omega_1^2} \\ \operatorname{sgn}(k B_2) \frac{\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_2^2} & \operatorname{sgn}(k B_2) \frac{\omega_2}{\omega_4^2 - \omega_2^2} & \dots & \operatorname{sgn}(k B_2) \frac{\omega_2}{\omega_{2n}^2 - \omega_2^2} \\ \operatorname{sgn}(k B_3) \frac{\omega_3}{\omega_2^2 - \omega_3^2} & \operatorname{sgn}(k B_3) \frac{\omega_3}{\omega_4^2 - \omega_3^2} & \dots & \operatorname{sgn}(k B_3) \frac{\omega_3}{\omega_{2n}^2 - \omega_3^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{sgn}(k B_n) \frac{\omega_n}{\omega_2^2 - \omega_n^2} & \operatorname{sgn}(k B_n) \frac{\omega_n}{\omega_4^2 - \omega_n^2} & \dots & \operatorname{sgn}(k B_n) \frac{\omega_n}{\omega_{2n}^2 - \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ A_4 \\ A_6 \\ \dots \\ A_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |k B_1| \\ |k B_2| \\ |k B_4| \\ \dots \\ |k B_n| \end{bmatrix}$$

Zapiszmy powyższy układ równań w postaci macierzowej

$$\mathbb{C}\mathbf{A} = \mathbb{B}. \quad (5.96)$$

Przedstawimy obecnie procedurę syntezy:

1. Przyjmujemy zawsze, że są spełnione następujące warunki

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n, \quad (5.97)$$

$$\overset{*}{\omega_2} < \overset{*}{\omega_4} < \overset{*}{\omega_6} < \overset{*}{\omega_8} < \dots < \overset{*}{\omega_{2n}}, \quad (5.98)$$

które oznaczają, że ciągi częstotliwości bieżących ω_i i ciągi biegunów $\overset{*}{\omega_{2i}}$ są rosnące.

2. Z narzuconego warunku dodatniości elementów na przekątnej głównej macierzy \mathbf{A} uzyskuje się wstępny warunek doboru biegunów. Należy zaznaczyć, że warunek ten musi być spełniony podczas całego procesu syntezy.

$$c_{ii} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overset{*}{\omega_{2i}} > \omega_i, & \text{gdy } \operatorname{sgn}(k B_i) = 1 \\ \overset{*}{\omega_{2i}} < \omega_i, & \text{gdy } \operatorname{sgn}(k B_i) = -1. \end{cases} \quad (5.99)$$

3. Dekompozycja macierzy \mathbb{C} . Równanie (5.96) przedstawiamy w następującej postaci

$$\mathbb{C}\mathbf{A} = (\mathbb{C}^{(1)} + \mathbb{C}^{(2)})\mathbf{A} = \mathbb{B}. \quad (5.100)$$

Elementy macierzy $\mathbb{C}^{(1)}$ są określone w następujący sposób:

$$c_{kl}^{(1)} = \begin{cases} c_{kl}^{(1)} = c_{kl} - \text{zgodnie z wzorem (5.99) dla } k = l \\ c_{kl}^{(1)} = c_{kl} \text{ (} k \neq l \text{)} = \begin{cases} c_{kl}^{(1)} = c_{kl}, \text{ gdy } \operatorname{sgn}(c_{kl}) \frac{\omega_k}{\omega_{2l}^2 - \omega_k^2} < 0 \\ c_{kl}^{(1)} = -c_{kl} = -\operatorname{sgn}(c_{kl}) \frac{\omega_k}{\omega_{2l}^2 - \omega_k^2}, \text{ gdy } \operatorname{sgn}(c_{kl}) \frac{\omega_k}{\omega_{2l}^2 - \omega_k^2} > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (5.101)$$

natomiast elementy macierzy $\mathbb{C}^{(2)}$ są określone następująco:

$$c_{kl}^{(2)} = \begin{cases} 0 \text{ dla } k = l \\ 0 \text{ gdy } \operatorname{sgn}(c_{kl}) < 0; k \neq l \\ 2 \operatorname{sgn}(c_{kl}) \frac{\omega_k}{\omega_{2l}^2 - \omega_k^2}, \text{ gdy } \operatorname{sgn}(c_{kl}) > 0 \text{ dla } k \neq l, \end{cases} \quad (5.102)$$

Macierze $\mathbb{C}^{(1)}$ i $\mathbb{C}^{(2)}$ mają następującą budowę:

$$\mathbb{C}^{(1)} \rightarrow \begin{bmatrix} + & & & \\ & + & & < 0 \\ & & + & & \\ & & & + & \\ < 0 & & & & + \\ & & & & & + \end{bmatrix}, \quad (5.103)$$

$$\mathbb{C}^{(2)} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & (+, 0) & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ (+, 0) & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.104)$$

Z budowy macierzy $\mathbb{C}^{(2)}$ wynika, że jej elementy są zawsze nieujemne.

4. Regularyzacja macierzy $\mathbb{C}^{(1)}$ polega na ciągłej zmianie położenia biegunów tak, aby została spełniona zależność

$$c_{kk}^{(1)} > \sum_{k=1}^n |c_{kl}^{(1)}|, \text{ dla } k \neq l, \quad (5.105)$$

zatem aby macierz $\mathbb{C}^{(1)}$ była macierzą dominacyjną.

Zmiana położenia biegunów musi odbywać się w taki sposób aby były spełnione ograniczenia (5.97), (5.98), (5.99). Zmiana ta jest zawsze możliwa do przeprowadzenia ze względu na ciągłą oraz monotoniczną zależność wartości $c_{kk}^{(1)}$ od położenia biegunów. Spełnienie warunku (5.105), tzn. jego realizacja, możliwa jest wyłącznie za pomocą metod numerycznych, np. za pomocą metody wariacji lokalnych Hooke'a - Jeevesa.

5. Ostateczne rozwiązanie I etapu syntezy sprowadza się do rozwiązania równania macierzowego o postaci (por. wzór (5.100))

$$\mathbb{C}^{(1)} \mathbb{A} = \mathbb{B}. \quad (5.106)$$

Ponieważ tak skonstruowana macierz $\mathbb{C}^{(1)}$ jest macierzą typu \mathfrak{H} , czyli posiadającą dodatnie odwrotności, wektor \mathbb{A} jest zawsze dodatni, z jego znajomości oraz znajomości biegunów ω_{2i} można określić realizację dwójnika LC, (dwójnik K_I).

Rozwiązanie równania (5.106) zakończyłoby pierwszy etap syntezy, gdyby (por. wzór (5.100)).

$$\bigwedge_{\mathbb{A}} \mathbb{C}^{(2)} \mathbb{A} = \mathbb{D}, \quad (5.107)$$

co zachodzi w przybliżeniu, gdy:

$$\|\mathbb{C}^{(2)}\| < \varepsilon. \quad (5.108)$$

Drugi etap syntezy polega na minimalizacji normy macierzy $\|\mathbb{C}^{(2)}\|$. Cel ten osiąga się za pomocą równoległe dołączonej cewki, (rys.5.16), co zostanie wykazane poniżej.

Po przeprowadzonej dekompozycji macierzy \mathbb{C} na składowe $\mathbb{C}^{(1)}$ oraz $\mathbb{C}^{(2)}$ można stwierdzić, że macierze te charakteryzują się następującymi własnościami:

- macierz $\mathbb{C}^{(1)}$ (5.103) ma na przekątnej głównej elementy zawsze dodatnie, a poza przekątną elementy ujemne, ponadto spełnia warunek (5.105) i jest macierzą typu \mathfrak{H} ,

- macierz $\mathbb{C}^{(2)}$ (5.104) jest macierzą rzadką o elementach dodatnich leżących wyłącznie poza przekątną główną, jest więc macierzą dodatnią, czyli macierzą, która spełnia warunki: $c_{kl}^{(2)} \geq 0$, dla $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq l$.

Z tego wynika, że susceptancje dwójnika (rys.5.15) K_{II} są określone wzorem

$$\mathbb{C}^{(2)}_{\mathbb{A}} = \mathbb{B}^{(2)} \quad (5.109)$$

gdzie: $\mathbb{B}^{(2)}$ - wektor susceptancji dwójnika K_{II} .

Susceptancje te są dodatnie dla każdej rozpatrywanej harmonicznej, lecz dwójnik K_{II} nie jest realizowalny na ogół w klasie dwójników LC. Minimalizacja $\|\mathbb{C}^{(2)}\|$ sprowadza się do minimalizacji prądu dwójnika o susceptancjach określonych równaniem (5.109). Ponieważ susceptancje te są zawsze dodatnie, to minimalizację tego prądu można przeprowadzić za pomocą pojedynczego induktora. Chodzi zatem o to, by uzyskać minimalizację wyrażenia (5.110) ze względu na L_0 .

$$\min_{L_0} \sum_{h=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^n c_{hk}^{(2)} A_{2k} \right) - \frac{1}{\omega_h L_0} \right)^2 |U_h|^2 = \min_{L_0} \xi. \quad (5.110)$$

Po rozwiązaniu otrzymuje się wartość L_0

$$L_0 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_h} |U_h|^2}{\sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n c_{hk}^{(2)} A_{2k}} > 0. \quad (5.111)$$

Wyznaczona w ten sposób wartość L_0 jest zawsze dodatnia, co wynika z poprzednich rozważań. Jeżeli otrzymana wartość ξ spełnia zależność

$$\xi > \varepsilon, \quad (5.112)$$

gdzie: ε - zadany błąd syntezy dwójnika, to proces syntezy nie jest zakończony i należy przejść do trzeciego etapu syntezy.

Wyznaczona struktura kompensatora na podstawie dotychczasowych rozważań jest jedną z możliwych i składa się z n gałęzi równoległych LC oraz dodatkowej gałęzi L_0 (postać kanoniczna dwójnika Fostera należącego do klasy D3 (por. tablica 5.2 punkt

(5.1)). Struktura ta determinuje wartość prądu i_{k2} , którego kwadrat normy określony jest zależnością:

$$\|i_{k2}\|^2 = \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{hk}^{(2)} A_{2k} \right)^2 |U_h|^2. \quad (5.113)$$

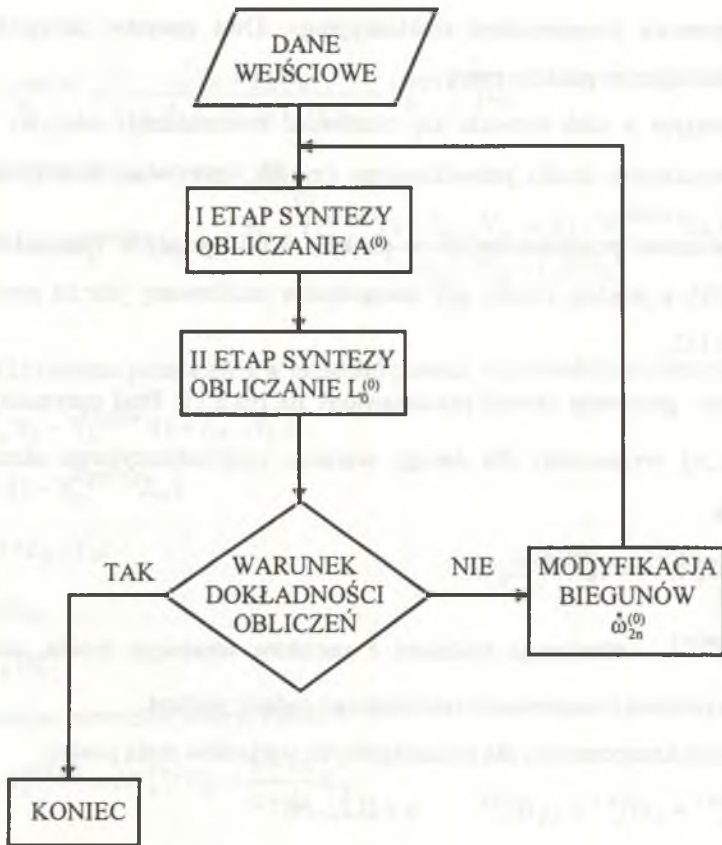
Jeżeli obniżenie wartości wyrażenia (5.13) jest celowe, to całą procedurę syntezy należy przeprowadzić w pętli iteracyjnej modyfikując położenie biegunów dwójnika kompensującego K_1 , aż do momentu gdy:

$$\|i_{k2}\| < \varepsilon. \quad (5.114)$$

Współczynniki macierzy $c_{kl}^{(2)}$ (5.102) są ściśle uzależnione od położenia biegunów ω_{2k}^* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. W tym etapie syntezy rozwiązuje się następujący problem:

$$\min_{\{\omega_{2k}^*\}} \sum_{h=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{hk}^{(2)}(\omega_{2k}^*) A_{2k} \right)^2. \quad (5.115)$$

Rozwiązanie tego silnie nieliniowego problemu najlepiej przeprowadzić metodą wariacji lokalnych Hooke'a - Jeevesa. Należy zaznaczyć, że muszą być przy tym spełnione wszystkie ograniczenia występujące w I etapie syntezy. Uzyskuje się nowy ciąg biegunów $\{\omega_{2,}^*, \omega_{4,}^*, \dots, \omega_{2n,}^*\}$ i wraca do etapu pierwszego syntezy. Proces iteracyjny przerywa się po osiągnięciu zadanej dokładności, tzn. gdy norma $\|C^{(2)}\|$ jest wystarczająco mała. Algorytm proponowanej metody syntezy kompensatora przedstawiono na rys.5.17.



Rys.5.17. Schemat blokowy do wyznaczania kompensatora

Fig.5.17. The block diagram for determination of compensator

5.4. Suboptymalna synteza dwójników LC

Z rozważań zawartych w punkcie 3.2 wynika, że do uzyskania optymalnego stanu pracy obwodu dla różnych wariantów narzuconych na warunek mocy czynnej P konieczne staje się użycie kompensatora aktywnego. Realizacja układowa (części rzeczywistej) takiego kompensatora opisana w punkcie 5.2 może nie zawsze być uzasadniona (kompensator aktywny). Dlatego poniżej opisano podejście suboptymalne. Podejście to charakteryzuje się tym, że stan optymalnej pracy układu realizuje się (w przybliżeniu)

tylko za pomocą kompensatora reaktancyjnego. Dwa sposoby takiego podejścia opisano w niniejszym punkcie pracy.

W pierwszym z nich rozważa się możliwość minimalizacji odchyłki pomiędzy prądem optymalnym źródła jednofazowego ($\min\|i\|_W$ por. wzór (3.33)) dla rozważanych wariantów przedstawionych w punkcie 3.2 i opisanych równaniami (3.34), (3.51), (3.52), a prądem źródła, gdy kompensator realizowany jest za pomocą tylko dwójników LC.

Rozważmy ponownie obwód przedstawiony na rys.3.11. Prąd optymalny $I_h^{\text{opt}(w)}$, $h \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ wyznaczony dla danego wariantu optymalizacyjnego określony jest zależnością

$$\bigwedge_{h \in N_0} I_h^{\text{opt}(w)} = Y_h^{\text{opt}(w)} E_h \quad (5.116)$$

gdzie: $Y_h^{\text{opt}(w)}$ - admitancja widziana z zacisków idealnego źródła, jaką można uzyskać za pomocą kompensatora realizującego żądany wariant.

Admitancje kompensatora dla poszczególnych wariantów mają postać:

$${}_k Y_h^{(w)} = {}_k G_h^{(w)} + j {}_k B_h^{(w)}, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.117)$$

Jeżeli natomiast kompensator stanowią tylko dwójniki LC, to prąd źródła dla każdej rozważanej harmonicznej spełnia nierówność $I_h' \neq I_h^{\text{opt}(w)}$, $h \in \{1, 2, \dots, n\}$, a naszym zadaniem jest dobór susceptancji kompensatora reaktancyjnego ${}_k B_h'$ dla $h \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ tak, aby

$$\bigwedge_{h \in N_0} \|I_h' - I_h^{\text{opt}(w)}\|^2 \rightarrow \min \quad (5.118)$$

przy czym:

$$I_h' = \frac{E_h}{Z_h + \frac{1}{j {}_k B_h' + {}_o Y_h}} = \frac{({}_o Y_h + j {}_k B_h') E_h}{1 + Z_h ({}_o Y_h + j {}_k B_h')} \quad (\text{rys.3.11}) \quad (5.119)$$

gdzie:

Z_h - impedancja wewnętrzna źródła dla h -tej harmonicznej,

${}_k B_h'$ - susceptancja kompensatora reaktancyjnego dla h -tej harmonicznej.

Natomiast

$$I'_h - I_h^{\text{opt}(w)} = \left(\frac{{}_o Y_h + j {}_k B'_h}{1 + Z_h ({}_o Y_h + j {}_k B'_h)} - Y_h^{\text{opt}(w)} \right) E_h . \quad (5.120)$$

Po przekształceniach, otrzymuje się:

$$I'_h - I_h^{\text{opt}(w)} = \Delta Y_h^{\text{opt}(w)} E_h = \frac{{}_o Y_h - Y_h^{\text{opt}(w)} (1 + Z_h {}_o Y_h) + j (1 - Y_h^{\text{opt}(w)} Z_h) {}_k B'_h}{1 + Z_h ({}_o Y_h + j {}_k B'_h)} E_h . \quad (5.121)$$

Wzór (5.121) można przedstawić w prostszej postaci, wprowadzając oznaczenia:

$$a = {}_o Y_h - Y_h^{\text{opt}(w)} (1 + Z_h {}_o Y_h) ,$$

$$b = j (1 - Y_h^{\text{opt}(w)} Z_h) ,$$

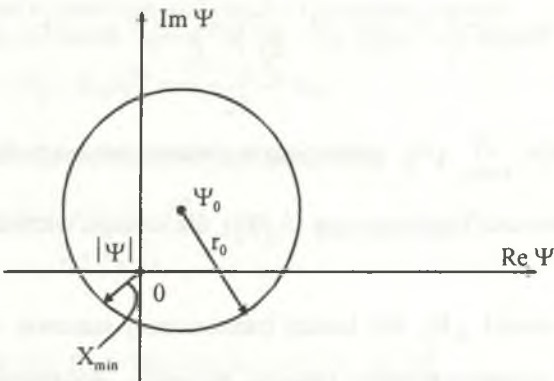
$$c = 1 + Z_h {}_o Y_h ,$$

$$d = j Z_h ,$$

$$x = {}_k B'_h .$$

Wykorzystując powyższe wzory, mamy:

$$I'_h - I_h^{\text{opt}(w)} = \Delta Y_h^{(w)} E_h = \frac{a + bx}{c + dx} E_h . \quad (5.122)$$



Rys.5.18. Miejsce geometryczne zmian ${}_k B_h$ - na płaszczyźnie zespolonej

Fig.5.18. The geometrical place of change ${}_k B_h$ on the complex plane

Wzór (5.122) opisuje znaną funkcję homograficzną, której obrazem na płaszczyźnie zespolonej przy zmianie $x \in (-\infty, \infty)$ w ogólnym przypadku jest okrąg (rys.5.18). Równanie tego okręgu określone jest równaniem

$$(\Psi - \Psi_0)(\Psi^* - \Psi_0^*) = r^2$$

gdzie:

$$\Psi_0 = \frac{ad^* - bc^*}{cd^* - c^*d} \text{ - środek okręgu,} \quad (5.123)$$

$$r = \left| \frac{ad - bc}{cd^* - c^*d} \right| \text{ - promień okręgu.} \quad (5.124)$$

Szukamy minimum funkcji $|\Psi|$ o postaci

$$|\Psi| = \left| \Delta Y_h^{(w)} \right|^2 = \frac{(a + bx)(a^* + b^*x)}{(c + dx)(c^* + d^*x)} = \frac{|b|^2 x^2 + 2x \operatorname{Re}(ab^*) + |a|^2}{|d|^2 x^2 + 2x \operatorname{Re}(cd^*) + |c|^2}. \quad (5.125)$$

Moduł funkcji $|\Psi|$ dla danego $x = {}_k B'_h$ stanowi długość wektora zaczepionego w początku układu współrzędnych i kończącego się na okręgu (rys.5.18).

Warunek konieczny ekstremum $\frac{d|\Psi|}{dx} = 0$ spełniony jest dla pierwiastków równania

kwadratowego o postaci

$$\left\{ |b|^2 \operatorname{Re}(cd^*) - |d|^2 \operatorname{Re}(ab^*) \right\} x^2 + \left(|b|^2 |c|^2 - |a|^2 |d|^2 \right) x + |c|^2 \operatorname{Re}(ab^*) - |a|^2 \operatorname{Re}(cd^*) = 0. \quad (5.126)$$

Szukaną wartością $\bigwedge_{h \in N_0} {}_k B'_h$ spełniającym warunek minimum funkcji (5.125) jest ten pierwiastek równania kwadratowego (5.126), dla którego wartość wyrażenia $|\Psi|$ jest mniejsza.

Wyznaczone wartości ${}_k B'_h$ dla każdej harmonicznej stanowią ciąg susceptancji niezbędnych do przeprowadzenia syntezy dwójnika reaktancyjnego metodami opisanymi w punkcie 5.2 lub 5.3.

Inne podejście suboptymalne do modyfikacji obwodów tylko za pomocą elementów LC można sformułować następująco:

- dla układu przedstawionego na rys.3.11 należy wyznaczyć optymalną wartość skuteczną prądu źródła dla każdej rozpatrywanej harmonicznej

$$\bigwedge_{h \in N_0} \min I_h I_h^* \quad (5.127)$$

przy warunku:

$$\bigwedge_{h \in N_0} \frac{1}{T} \int_0^T u_h(t) k i_h(t) dt = 0, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.128)$$

który zapewnia, że kompensator jest reaktancyjny

gdzie:

$u_h(t)$, $(k i_h(t))$ - napięcie (prąd) kompensatora dla h -tej harmonicznej.

- przeprowadzić syntezę kompensatora realizującego zadane warunki (5.127), (5.128).

Na podstawie rozwiązania powyższego problemu [65, 61] otrzymano prąd optymalny dla każdej rozważanej harmonicznej

$$\bigwedge_{h \in N_0} I_h^{\text{opt}} = \frac{\lambda_* (1 + 2 {}_oG_h Z_h^*) E_h}{2\theta} \quad (5.129)$$

gdzie:

$$\theta = 1 + \lambda_* (R_h + {}_oG_h |Z_h|^2).$$

Natomiast napięcie w przekroju a-a' (rys.3.11) przyjmuje postać

$$\bigwedge_{h \in N_0} U_h^{\text{opt}} = E_h - Z_h I_h^{\text{opt}} = \frac{2 + \lambda_* Z_h^*}{2\theta} E_h. \quad (5.130)$$

Admitancja kompensatora określona jest zależnością

$$\bigwedge_{h \in N_0} k Y_h = \frac{\lambda_* (1 + 2 {}_oG_h Z_h^*)}{2 + \lambda_* Z_h^*} - {}_oY_h, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (5.131)$$

stąd:

$$k G_h = \frac{\lambda_* (2 {}_oG_h R_h + 1)(2 + R_h \lambda_*) + 2 {}_oG_h X_h^2 \lambda_*^2}{(2 + R_h \lambda_*)^2 + (X_h \lambda_*)^2} - {}_oG_h, \quad (5.132)$$

$$k B_h = \frac{X_h \lambda_*^2 - 4 X_h {}_oG_h \lambda_*}{(2 + R_h \lambda_*)^2 + (X_h \lambda_*)^2} - {}_oB_h. \quad (5.133)$$

Sprawdzianem poprawnego rozwiązania postawionego problemu jest spełnienie równania $\bigwedge_h G_h = 0$, co wynika wprost z warunku (5.128).

W wyrażeniach (5.129) i (5.130) oraz dalszych λ_* stanowi dodatnie rozwiązanie bilansu mocy po wstawieniu za prąd $I_h(\lambda)$ wyznaczony z wzoru (5.129)

$$\bigwedge_{h \in N_0} \left\{ \operatorname{Re}(E_h I_h^* - Z_h I_h I_h^*) = \operatorname{Re} U_h {}_oY_h^* U_h^* \right\}. \quad (5.134)$$

Po przekształceniach równanie (5.134) sprowadza się do postaci:

$$ab \left(\frac{\lambda}{2\theta} \right)^2 - a \frac{\lambda}{2\theta} + {}_oG_h = 0 \quad (5.135)$$

gdzie:

$$a = 1 + 4 {}_oG_h R_h + 4 {}_oG_h^2 |Z_h|^2,$$

$$b = R_h + {}_oG_h^2 |Z_h|^2,$$

$$2\theta = 2 \left[1 + \lambda_* (R_h + {}_oG_h |Z_h|^2) \right].$$

Wprowadzając do równania (5.135) podstawienie:

$$g = \frac{\lambda}{2\theta}$$

i rozwiązując go, otrzymuje się po prostych przekształceniach dwa rozwiązania. Z wzoru na warunek wystarczający [65] wynika, że należy przyjąć tylko rozwiązanie dodatnie, stąd:

$$\lambda_* = \frac{\sqrt{a} - 1}{b} > 0, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.136)$$

6. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA METOD OPTIMALIZACJI I MODYFIKACJI

Celem niniejszego rozdziału jest pokazanie wybranych zastosowań i ilustracji metod opisanych w rozdziałach 3, 4, 5. Przedstawione zostaną konkretne przykłady rozwiązań problemów optymalizacji i modyfikacji obwodów jednofazowych i trójfazowych. Do rozwiązań przedstawionych zagadnień sporządzono odpowiedni pakiet programów komputerowych pozwalających przeprowadzić optymalizację, jak i modyfikację.

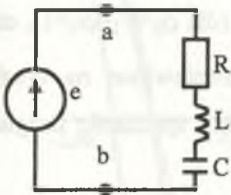
Przykład 6.1

Rozważmy elementarny obwód przedstawiony na rys.6.1 o danych:

$$e(t) = 100\sqrt{2} \cos\omega_0 t + 20\sqrt{2} \cos 5\omega_0 t \text{ V}, R = 1\Omega, L = 1\text{H}, C = 0,5\text{F}, \omega_0 = 1\text{rad/s}.$$

Dla obwodu tego należy przeprowadzić optymalizację według dwóch kryteriów optymalizacyjnych opisanych w rozdziale 3:

$$\text{a) } \min_{(i)} \|i\|_L^2 = \min_{(i)} \left(\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \right), \quad (\text{por.3.7})$$



Rys.6.1. Układ: źródło - odbiornik

przy warunku ubocznym

$$P = (u, i)_L = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt, \quad (\text{por.3.8}),$$

$$\text{b) } \min_{(i)} \|i\|_W^2 = \sum_{k=0}^m \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [D^k(i)]^2(t) dt, \quad (\text{por.3.19})$$

Fig.6.1. The system: source-load

przy takim samym warunku ubocznym jak dla a.

Po przeprowadzonej optymalizacji należy dobrać kompensatory dla obu kryteriów optymalizacyjnych.

Dla rozpatrywanego układu moc czynna odbiornika wynosi $P=5018 \text{ W}$, wartość skuteczna prądu źródła przed kompensacją $|I|=70,83 \text{ A}$. Obliczone wartości admitancji kompensatorów wynoszą:

- dla minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła (wzory 3.7 i 3.8)

$${}_k Y_1 = (-0,0172 - j0,5) \text{ S}, \quad {}_k Y_5 = (0,437 + j0,207) \text{ S},$$

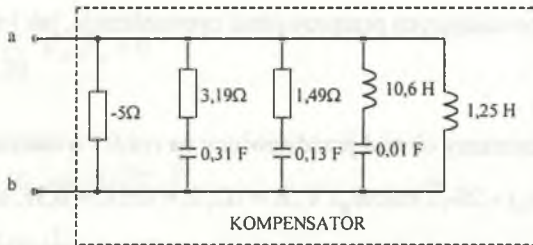
- dla zadanego kompromisu pomiędzy minimum wartości skutecznej prądu źródła a jego odkształceniem od przebiegu sinusoidalnego (wzory 3.19 oraz 3.8)

$$Y_{k1} = (0,0017 - j0,5) \text{ S}, \quad Y_{k5} = (-0,042 + j0,2075) \text{ S},$$

gdy:

$$\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1.$$

Kompensator realizujący kryterium (3.7) ma postać przedstawioną na rys. 6.2.

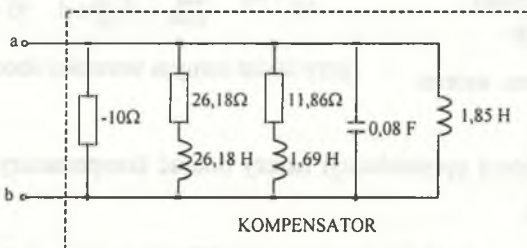


Rys.6.2. Kompensator realizujący kryterium (3.7)

Fig.6.2. The compensator realizing criterion of (3.7)

Wartość skuteczna prądu źródła po kompensacji wynosi $|{}_a I| = 49,2 \text{ A}$.

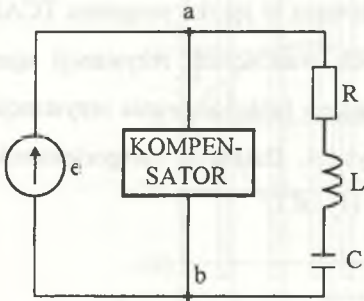
Kompensator realizujący kryterium optymalizacyjne (3.19) (dla $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1$), czyli przy uwzględnieniu pierwszej oraz drugiej pochodnej, przedstawiono na rys.6.3. Wartość skuteczna prądu źródła po kompensacji, warunkująca spełnienie drugiego kryterium optymalizacyjnego (3.19), wynosi $|{}_k I| = 50,71 \text{ A}$.



Rys.6.3. Kompensator realizujący kryterium (3.19)

Fig.6.3. The compensator realizing criteria (3.19)

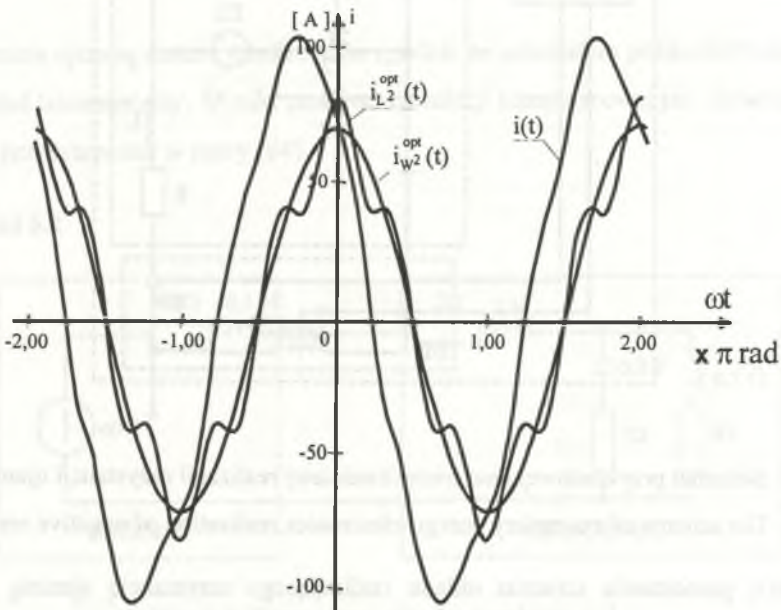
Kompensatory przedstawione na rys.6.2 oraz rys.6.3 należy włączyć na zaciski a-b odbiornika zgodnie z rys.6.4.



Rys.6.4. Układ: źródło, kompensator, odbiornik

Fig.6.4. The system: source, compensator and load

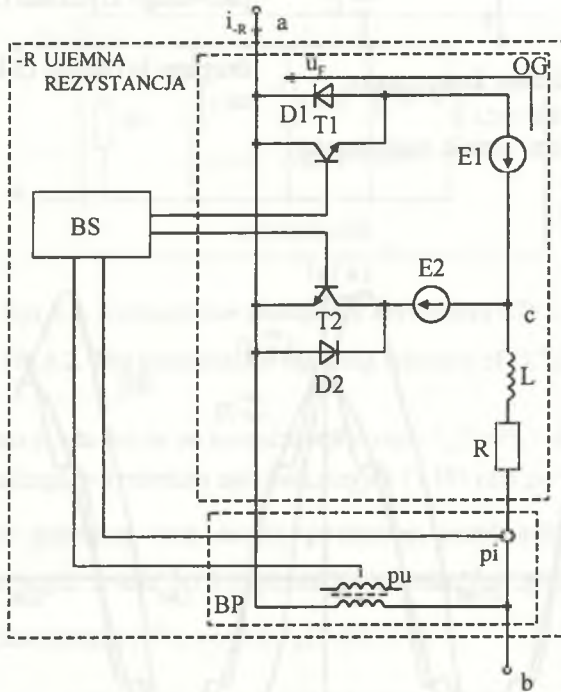
Na rys.6.5 przedstawiono przebiegi czasowe prądu źródła przed kompensacją $i(t)$, prądu źródła po kompensacji dla pierwszego kryterium (3.7), ($i_{L2}^{opt}(t)$) dla drugiego kryterium (3.19), ($i_{W2}^{opt}(t)$).



Rys.6.5. Przebiegi czasowe prądu źródła przed kompensacją i po kompensacji dla kryterium (3.7) i (3.19)

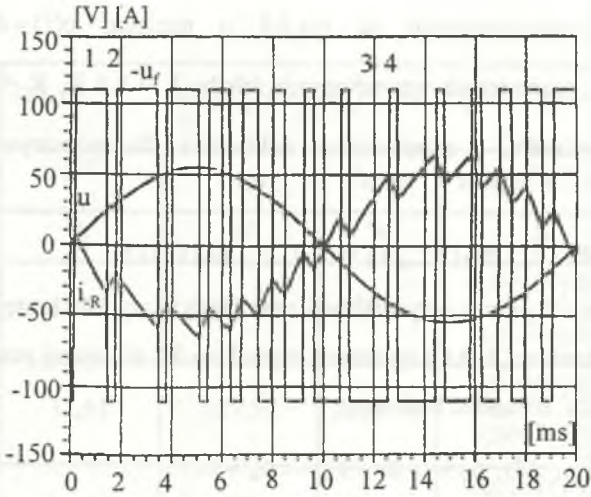
Fig.6.5. Waveforms of source current before and after compensation for criterion (3.7) and (3.19)

Przykładową realizację energoelektronicznej rezystancji ujemnej wchodzącej w skład zaproponowanego kompensatora dla obu kryteriów optymalizacyjnych przedstawiono na rys.6.6. Realizacja ta była zamodelowana w języku programu TCAD 4.2 [43]. Przeprowadzono symulację przy różnych wartościach rezystancji ujemnej, różnych dokładnościach realizacji prądu. Przebadano funkcjonowanie rezystancji ujemnej włączonej jako część kompensatora z rys.6.4. Działanie energoelektronicznej realizacji rezystancji ujemnej wyjaśniają rys.6.6 i rys.6.7.



Rys.6.6. Schemat przykładowej energoelektronicznej realizacji rezystancji ujemnej
 Fig.6.6. The scheme of exemplary energy-electronics realization of negative resistance

Rys.6.6 przedstawia schemat układu realizującego rezystancję ujemną, jest to przekształtnik energoelektroniczny. Rezystancja ta może być za pomocą zacisków a-b przyłączona tylko do źródła napięcia. Przebiegi napięć i prądu przedstawione na rys.6.7 są wynikiem symulacji komputerowej TCAD 4.2.

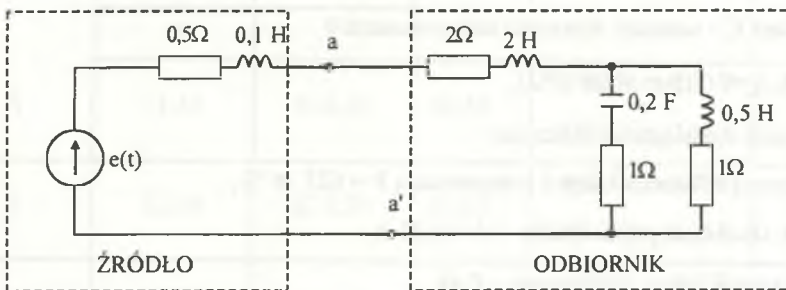


Rys.6.7. Przebiegi czasowe: napięć $e(t)$, $u_r(t)$ oraz prądu $i_r(t)$

Fig.6.7. Waveforms of voltages $e(t)$, $u_r(t)$ and current $i_r(t)$

Rezystancja ujemna została zrealizowana zgodnie ze schematem pokazanym na rys.6.6 jako układ laboratoryjny. Wyniki zarówno symulacji komputerowej jak i laboratoryjnej zostały przedstawione w pracy [64].

Przykład 6.2



Rys.6.8. Rozważany układ z przykładu 6.2

Fig.6.8. System considered in example 6.2

Dla układu przedstawionego na rys.6.8 o napięciu $e(t) = 60\sqrt{2} \cos \omega_0 t - 20\sqrt{2} \cos 3\omega_0 t$ V, parametrach wewnętrznych źródła: $L = 0,1$ H, $R = 0,5\Omega$, pulsacji podstawowej $\omega_0 = 1$ rad/s, i admitancjach odbiornika dla rozpatrywanych harmonicznych:

$${}_0Y_1 = (0,2089 - j0,1265) \text{ S}; \quad {}_0Y_3 = (0,0737 - j0,1194) \text{ S},$$

należy przeprowadzić proces optymalizacji oraz modyfikacji dla następujących zadań Z1., Z2. oraz wariantów (A,B,C) opisanych w punkcie 3.2 niniejszej pracy.

Przez zadanie Z1. rozumieć będziemy:

$$Z1. \rightarrow \min_{(i)} \|i\|_W^2, \quad \text{gdy } \rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = 0,$$

natomiast przez zadanie Z2.:

$$Z2. \rightarrow \min_{(i)} \|i\|_W^2, \quad \text{gdy } \rho_k \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Warianty (A,B,C) odpowiadają różnym warunkom ubocznym.

Wariant A - stałość mocy czynnej wydawanej przez źródło

$$(u, i)_L = (e - Z_i, i) = P \quad (\text{por. wzór 3.34}).$$

Wariant B - stałość mocy czynnej odbiornika

$$(u, i_o)_L = P \quad (\text{por. wzór 3.51}).$$

Wariant C - warunek bierności kompensatora

$$(u, i_k)_L = 0 \quad (\text{por. wzór 3.52}).$$

W trakcie rozwiązania obliczono:

- moc czynną odbiornika przed kompensacją $P = 627,36$ W,
- wartość skuteczną prądu źródła $|I| = 13,36$ A,
- współczynnik mocy źródła $\cos \varphi = 0,84$.

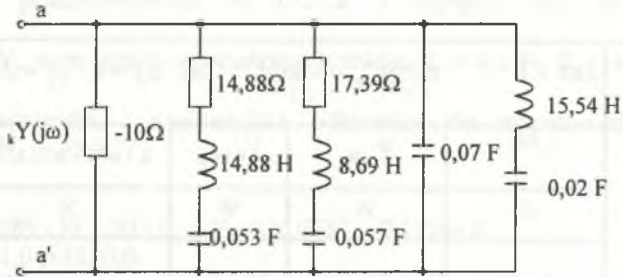
W tabelach 6.1 ÷ 6.2 zestawiono admitancje kompensatorów oraz następujące wielkości po kompensacji dla poszczególnych zadań i wariantów: prąd optymalny, moc czynną odbiornika, moc czynną kompensatora, $\cos \varphi$ źródła.

Tablica 6.1

Wariant	zad. Z1 $\min_{(i)} \ i\ _W^2 = \min_{(i)} \ i\ _L^2$, bo $\rho_0 = 1, \rho_1 = \rho_2 = \dots \rho_n = 0$				
	$ I^{opt} $	P_{odb}	P_{komp}	$kY_h = kG_h + j kB_h$	$\cos\varphi'$
	A	W	W	S	
A	10,85	653,49	-26,13	-0,0213+j 0,132 0,1133+j 0,129	1
B	12,61	627,36	58,43	-0,0194+j 0,081 0,0067+j 0,072	0,96
C	11,24	647,30	0	-0,0151+j 0,122 0,1015+j 0,120	0,99

Tablica 6.2

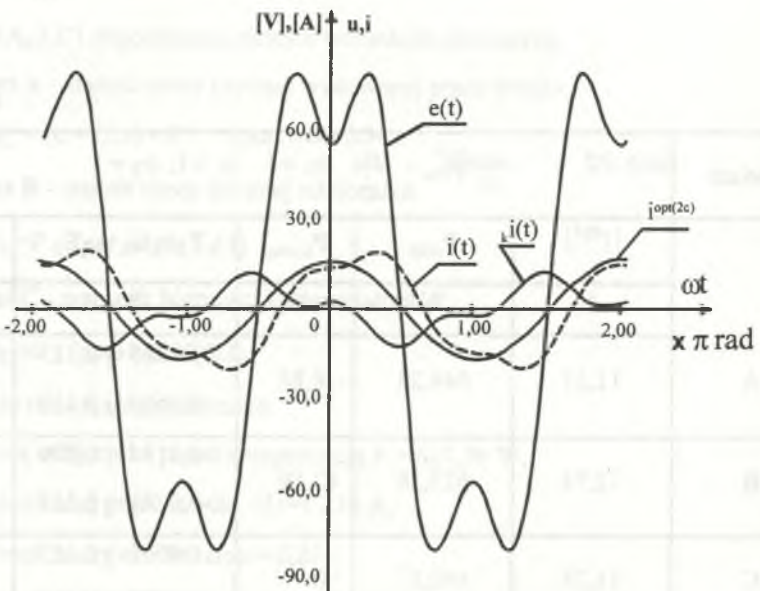
Wariant	zad. Z2 $\min_{(i)} \ i\ _W^2$, dla $\rho_0 = 1, \rho_1 = 1, \rho_2 = 1$				
	$ I^{opt} $	P_{odb}	P_{komp}	$kY_h = kG_h + j kB_h$	$\cos\varphi'$
	A	W	W	S	
A	11,51	644,24	-16,88	0,00315+j 0,113 -0,0659+j 0,119	0,95
B	12,74	627,36	42,19	0,0194+j 0,079 -0,0709+j 0,117	0,93
C	11,78	640,17	0	0,0091+j 0,123 -0,0672+j 0,119	0,94



Rys.6.9. kompensator dla przykładu 6.2

Fig.6.9. Compensator for example 6.2

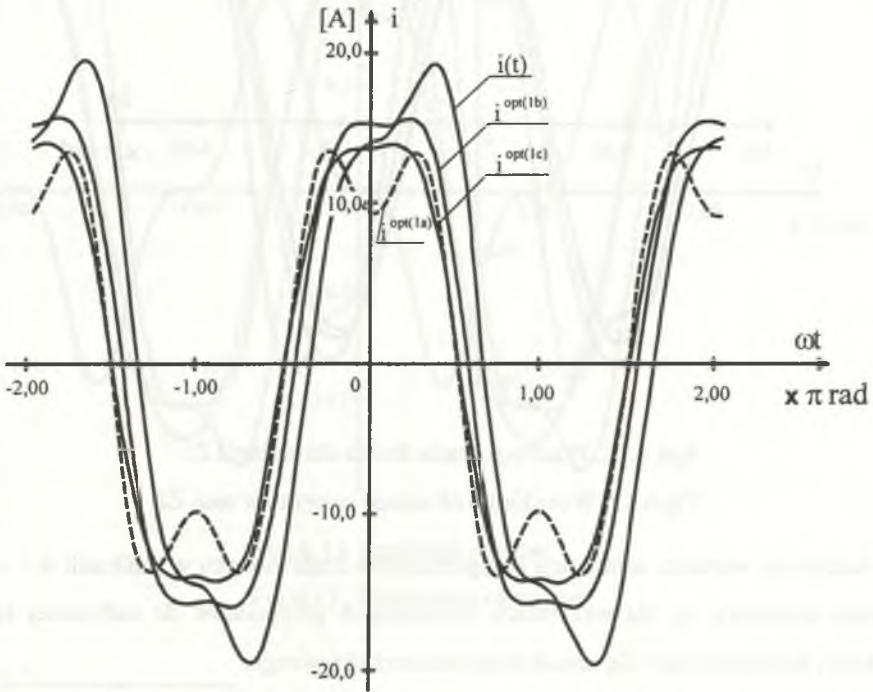
Dla przedstawionego przykładu dobrano przykładowo kompensator według zadania Z2 wariant C, dla założonych biegunów: $s_1 = -0,5+j1$, $s_2 = -1+j1$ oraz $k_0 = -0,1$. Kompensator ten przedstawiono na rys.6.9.



Rys.6.10. Przebiegi czasowe: napięcia źródła $e(t)$, prądu źródła przed kompensacją $i(t)$, prądu kompensatora $i_k(t)$, prądu źródła po kompensacji dla zadania Z2, wariantu C

Fig.6.10. Waveforms of voltage source $e(t)$, current source $i(t)$ before compensation, current of compensator $i_k(t)$, current source after compensation for task Z2, variant C

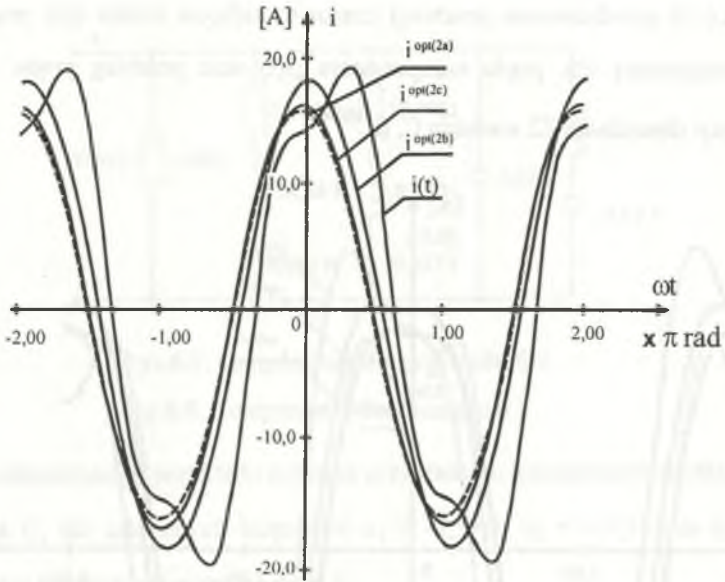
Na rys.6.10 przedstawiono przebiegi czasowe: napięcia źródła $e(t)$, prądu źródła przed kompensacją $i(t)$, prądu kompensatora $i_k(t)$ oraz przebieg prądu źródła po kompensacji dla zadania Z2 wariantu C, ($i^{\text{opt}(2c)}$).



Rys.6.11. Przebiegi prądu źródła dla poszczególnych wariantów zadania Z1

Fig.6.11. Waveforms of source current for individual variants of task Z1

Na rys.6.11 przedstawiono przebiegi prądu źródła dla poszczególnych wariantów zadania Z1. Natomiast na rys.6.12 przedstawiono te same wielkości dla zadania Z2 przy ($\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1$).



Rys.6.12. Przebiegi prądu źródła dla zadania Z1

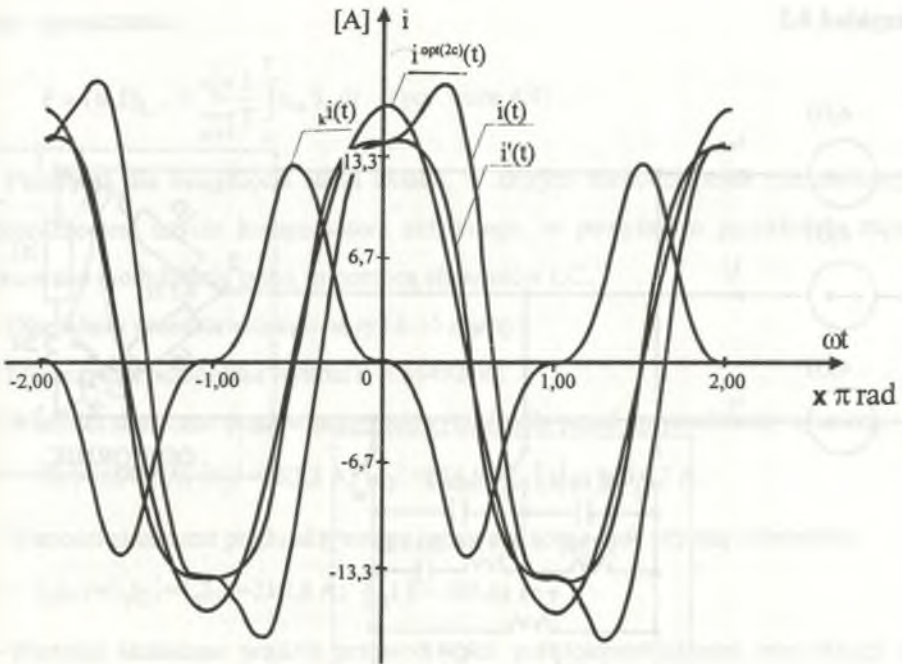
Fig.6.12. Waveforms of source current for task Z2

Analizując wartości admittancji kompensatorów zestawionych w tablicach 6.1 - 6.2 można zauważyć, że dla wszystkich rozważanych przypadków do całkowitej kompensacji konieczne staje się użycie kompensatora aktywnego.

W wielu przypadkach całkowita kompensacja może być nieuzasadniona. Dlatego też w punkcie 5.4 zaproponowano podejście suboptymalne. W tablicy 6.3 przedstawiono wartości uzyskane dla rozważanego przykładu według metody suboptymalizacji zaproponowanej w punkcie 5.4 dla zadania Z2 wariantu C.

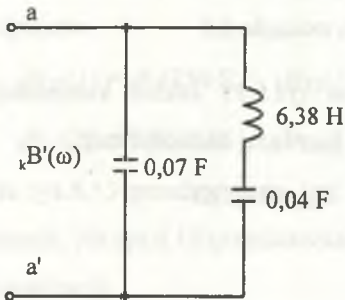
Tablica 6.3

$\bigwedge_{h \in N} \min \ I'_h - I_h^{\text{opt}(2c)}\ ^2$								
$ I $	$ I^{\text{opt}(2c)} $	P_{odb}	$ kI $	$ I' $	P^*_{odb}	$ kI $	kB_h	$\cos\varphi$
A	A	W	A	A	W	A	S	
13,36	11,78	640,17	7,2	11,43	643,32	7,05	$kB_1=0,129$ $kB_1=0,118$	0,97



Rys.6.13. Przebiegi prądów

Fig.6.13. Waveforms of current



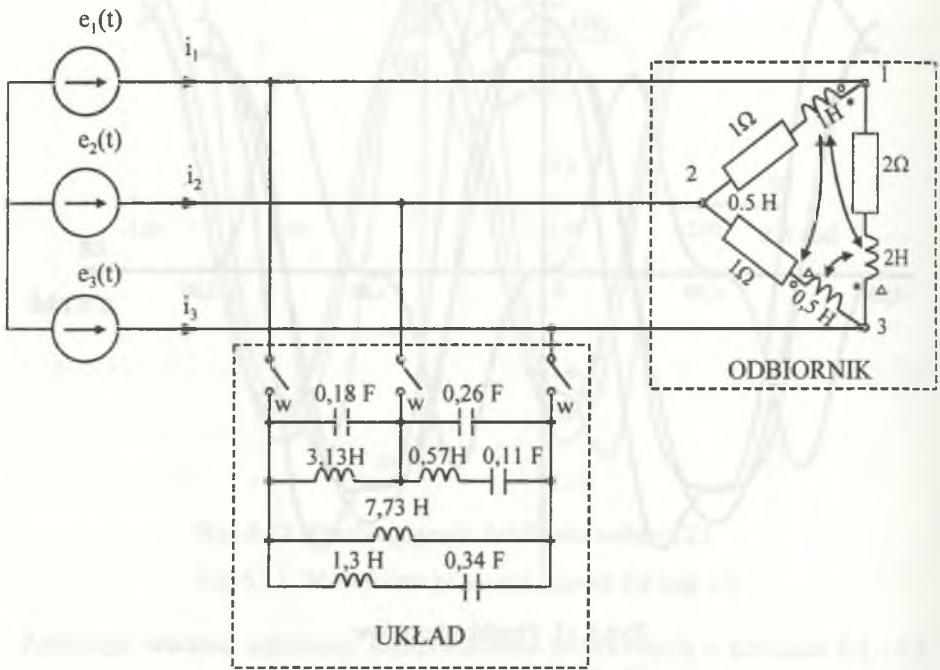
Rys.6.14. Struktura kompensatora reaktancyjnego

Fig.6.14. The structure of reactance compensator

Na rys.6.13 przedstawiono prąd źródła przed kompensacją $i(t)$, prąd optymalny $i^{opt(2c)}(t)$, prąd źródła przy częściowej kompensacji dwójnikiem LC $i'(t)$ według metody zaproponowanej w punkcie 5.4 oraz prąd kompensatora reaktancyjnego $i_k'(t)$.

Strukturę kompensatora reaktancyjnego $k_B'(\omega)$ przedstawiono na rys.6.14.

Przykład 6.3



Rys.6.15. Analizowany układ w przykładzie 6.3

Fig.6.15. The system analysed in example 6.3

Dla układu trójfazowego przedstawionego na rys.6.15 (układ kompensujący odłączony), dla następujących danych dotyczących pierwszej harmonicznej:

$$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}, \quad Z_{11} = (1 + j1)\Omega, \quad Z_{22} = (1 + j0,5)\Omega, \quad Z_{33} = (2 + j2)\Omega$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_{23} = Z_{32} = Z_{13} = Z_{31} = j0,5\Omega,$$

$$e_1(t) = \sqrt{2}(100 \cos \omega_0 t + 20 \cos 5\omega_0 t) \text{ V},$$

$$e_2 = e_1(t - \frac{T}{3}), \quad e_3 = e_2(t - \frac{T}{3})$$

należy przeprowadzić modyfikację do rozwiązania poniższego problemu minimalizacji

$$\min_{(i)} \|i\|_{L,n}^2 = \min_{(i)} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T i_{\alpha}^2(t) dt \quad (\text{por. wzór 4.3})$$

przy ograniczeniu

$$P = (\mathbb{W}, \mathbb{i})_{L,n} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T u_{\alpha} i_{\alpha} dt \quad (\text{por. wzór 4.4}).$$

Ponieważ dla osiągnięcia stanu układu, w którym zachodzi pełna minimalizacja, konieczne jest użycie kompensatora aktywnego, w powyższym przykładzie zaproponowano modyfikację tylko za pomocą elementów LC.

Dla układu przedstawionego na rys.6.15 mamy:

Moc czynna odbiornika wynosi $P = 64492 \text{ W}$.

Wartości skuteczne prądów przewodowych źródła przed optymalizacją wynoszą:

$$|I_1| = 167,3 \text{ A}; |I_2| = 262,3 \text{ A}; |I_3| = 256,9 \text{ A}; \|\mathbf{i}\| = 403,47 \text{ A}.$$

Wartości skuteczne prądu aktywnego zapewniającego moc czynną odbiornika:

$$|aI_1| = |aI_2| = |aI_3| = 210,8 \text{ A}; \|\mathbf{a i}\| = 365,11 \text{ A}.$$

Wartości skuteczne prądów przewodowych po przeprowadzonej modyfikacji za pomocą dwójników reaktancyjnych LC wynoszą:

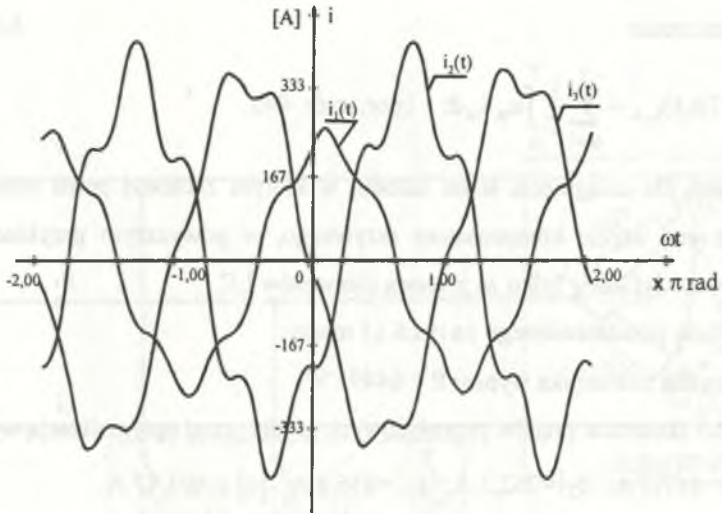
$$|I'_1| = |I'_2| = |I'_3| = 212,1 \text{ A}; \|\mathbf{i}'\| = 367,36 \text{ A}.$$

Wartości susceptancji kompensatorów włączonych na napięcie międzyfazowe są następujące:

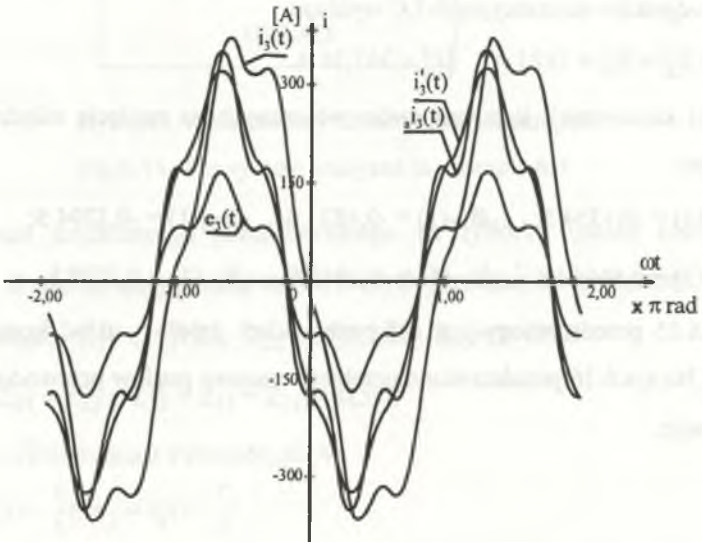
$$k_{B12}(1) = -0,1354 \text{ S}; \quad k_{B13}(1) = -0,4831 \text{ S}; \quad k_{B23}(1) = -0,3794 \text{ S};$$

$$k_{B12}(5) = 0,8605 \text{ S}; \quad k_{B13}(5) = -0,1943 \text{ S}; \quad k_{B23}(1) = 0,3279 \text{ S}.$$

Na rys.6.15 przedstawiony jest całkowity układ: źródło - układ kompensujący - odbiornik. Na rys.6.16 przedstawiono przebiegi czasowe prądów przewodowych przed optymalizacją.



Rys.6.16. Przebiegi czasowe prądów przewodowych przed optymalizacją
 Fig.6.16. Waveforms of line currents before optimization



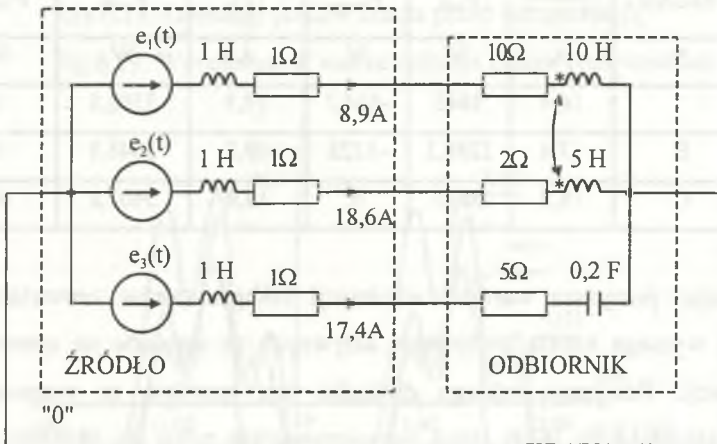
Rys.6.17. Przebiegi czasowe napięcia fazowego $e_3(t)$, prądu przewodowego przed optymalizacją $i_3(t)$, prądu aktywnego $a_{i_3}(t)$ oraz prądu po częściowej optymalizacji $i_3(t)$.

Fig.6.17. Waveforms of phase voltage $e_3(t)$, line current $i_3(t)$ before optimization, active current $a_{i_3}(t)$ and current $i_3(t)$ after partial optimization

Na rys.6.17 przedstawione są przebiegi czasowe napięcia fazowego źródła $e(t)$ dla trzeciej fazy, przebieg czasowy prądu przewodowego przed optymalizacją $i_3(t)$, prądu aktywnego (czynnego) $a_i i_3(t)$ oraz prądu przewodowego po modyfikacji $i'_3(t)$. Należy zaznaczyć, że wartości chwilowe prądów aktywnych spełniają zależności $a_i i_2(t) = a_i i_1(t - T/3)$, $a_i i_3(t) = a_i i_2(t - T/3)$. Podobne są spełnione zależności po modyfikacji tylko za pomocą układów LC $i'_2(t) = i'_1(t - T/3)$, $i'_3(t) = i'_2(t - T/3)$.

Należy podkreślić, że przedstawiony problem optymalizacji, a następnie modyfikacji za pomocą układów LC dla źródeł idealnych jest równoważny problemowi kompensacji składowej biernej i asymetrii opisanej w pracy [23] czy też problemowi symetryzacji [65].

Przykład 6.4



Rys.6.18. Analizowany układ w przykładzie 6.4

Fig.6.18. The system analysed in example 6.4

Dla układu (rys.6.18) o danych $e_1(t) = \sqrt{2}(120 \cos \omega_0 t + 30 \cos 4 \omega_0 t + 20 \cos 5 \omega_0 t)$ V, $e_2(t) = e_1(t - T/3)$, $e_3(t) = e_2(t - T/3)$, $\omega_0 = 1$ rad/s, należy przeprowadzić modyfikację układu według zadań Z1, Z2 dla poszczególnych wariantów A, B, C. Zarówno zadanie Z1, Z2, jak i warianty A, B, C stanowią uogólnienie omawianych zagadnień w punkcie 3.2 na układy trójfazowe.

Moc czynna odbiornika przed modyfikacją: $P_{\text{odb}} = 3288,3 \text{ W}$.

Wartość skuteczna prądu źródła przed modyfikacją: $|\mathbb{I}| = 27,1 \text{ A}$.

Niektóre wartości uzyskane po rozwiązaniu zadania Z1 zestawiono w tabeli 6.4.

Wartości admitancji kompensatora dla spełnienia zadania optymalizacyjnego Z1 dla wariantu A wynoszą:

$${}_k Y_{101} = (-0,0065 + j0,0243) \text{ S}, \quad {}_k Y_{201} = (-0,022 + j0,217) \text{ S}, \quad {}_k Y_{301} = (-0,0190 - j0,0933) \text{ S},$$

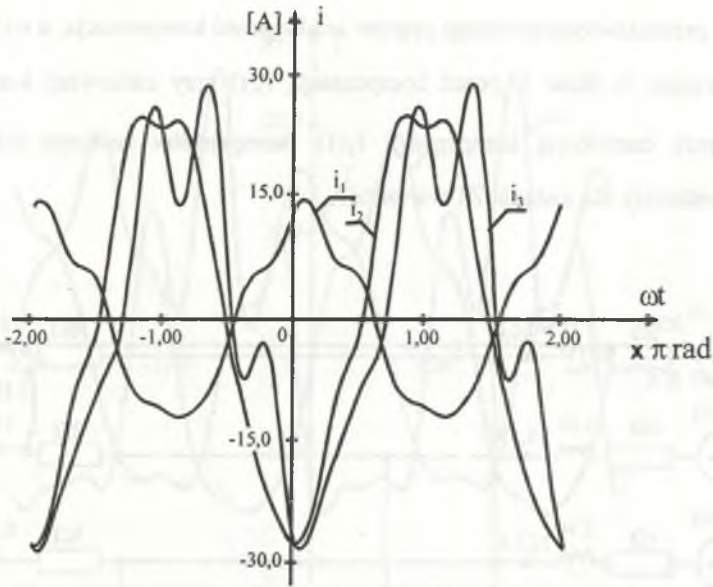
$${}_k Y_{104} = (-0,0475 + j0,0534) \text{ S}, \quad {}_k Y_{204} = (0,0739 + j0,096) \text{ S}, \quad {}_k Y_{304} = (-0,1145 - j0,0235) \text{ S},$$

$${}_k Y_{105} = (-0,0883 + j0,0569) \text{ S}, \quad {}_k Y_{205} = (-0,0569 + j0,085) \text{ S}, \quad {}_k Y_{305} = (-0,0223 - j0,0200) \text{ S}.$$

Tablica 6.4

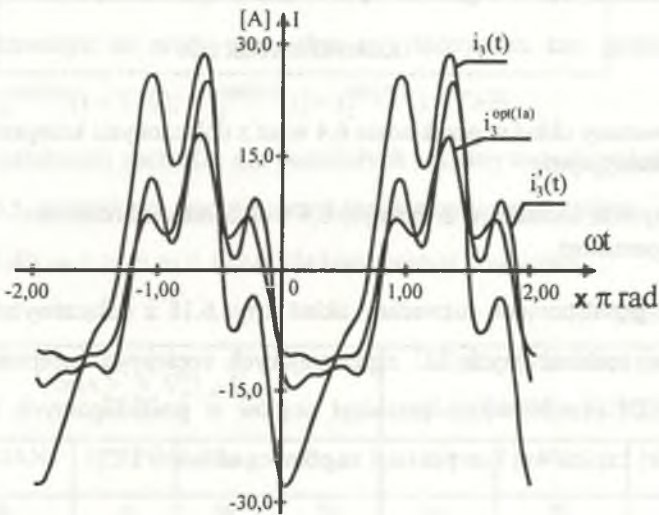
$\min \sum_{h=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 I_{\alpha h} I_{\alpha h}^*$				WIELKOŚCI UZYSKANE ZA POMOCĄ KOMP. LC		
WARIANT	$ \mathbb{I}^{\text{opt}(2c)} $	P_{odb}	P_{komp}	$ \mathbb{I}' $	P'_{odb}	P'_{komp}
A	A	W	W	A	W	W
	16,4	3843	-554,7	19,3	3592,8	0
B	17,4	3288,3	-1228	19,8	3048,9	0
C	18,2	3523	0	18,4	3407,8	0

Analizując powyższe wartości admitancji kompensatorów zauważamy, że ich realizacja wymaga użycia dwójników aktywnych ze względu na ujemne wartości konduktancji. Realizacja takiego dwójnika jest możliwa za pomocą układów energoelektronicznych [64]. Jeżeli ograniczymy się tylko do układów LC (część urojona admitancji kompensatora), to mówimy wówczas o częściowej kompensacji.



Rys.6.19. Przebiegi prądów źródła przed kompensacją

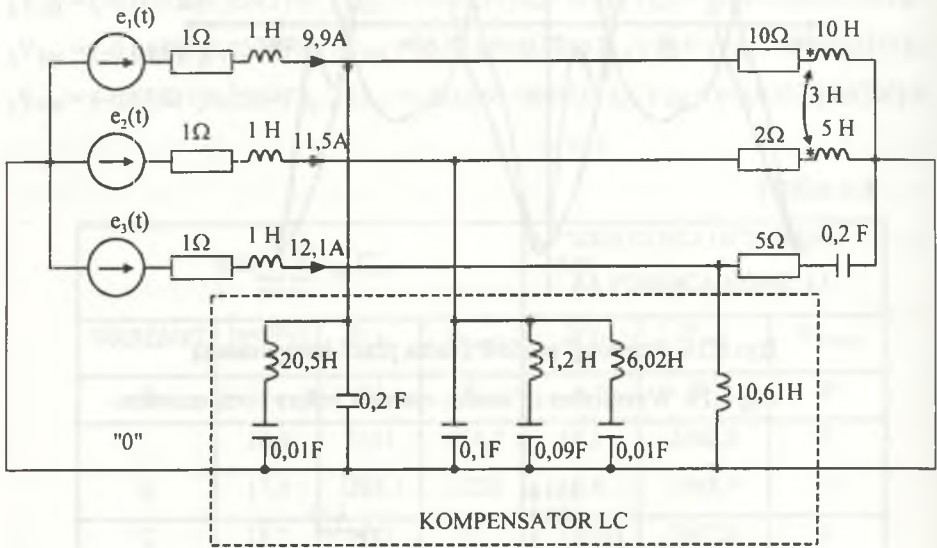
Fig.6.19. Waveforms of source currents before compensation



Rys.6.20. Przebiegi prądów w fazie 3, przed kompensacją, przy całkowitej kompensacji, przy częściowej kompensacji

Fig.6.20. Waveforms of current in the phase 3 before compensation, by completely compensation and by partial compensation

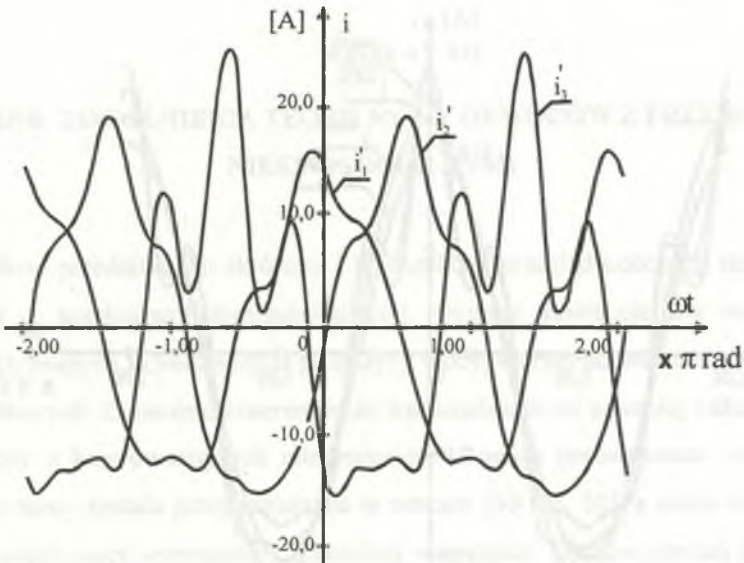
Na rys.6.19 przedstawiono przebiegi prądów źródła przed kompensacją, a na rys.6.20 - przebiegi prądów w fazie 3: przed kompensacją $i_3(t)$ przy całkowitej kompensacji $i_3^{\text{opt}(1a)}(t)$, przy częściowej kompensacji $i_3'(t)$ (kompensator realizuje tylko część urojonej admittancji), dla zadania Z1 wariantu A.



Rys.6.21. Rozważany układ w przykładzie 6.4 wraz z dołączonymi kompensatorami reaktancyjnymi

Fig.6.21. The system considered in example 6.4 with connected reactance compensators

Na rys.6.21 przedstawiono rozważany układ z rys.6.18 z dołączonymi obwodami kompensatorów reaktancyjnych LC zapewniających częściową kompensację, natomiast na rys.6.22 przedstawiono przebiegi prądów w poszczególnych fazach przy zaproponowanej częściowej kompensacji za pomocą układów LC.



Rys.6.22. Przebiegi prądów dla zaproponowanej częściowej kompensacji

Fig.6.22. Waveforms of current for proposed partial compensation

Należy zauważyć, że prądy optymalne są symetryczne, tzn. spełniają zależność $i_2^{\text{opt}(1a)}(t) = i_1^{\text{opt}(1a)}(t - T/3)$; $i_3^{\text{opt}(1a)}(t) = i_2^{\text{opt}(1a)}(t - T/3)$.

Podobne zależności zachodzą dla pozostałych rozpatrywanych zadań i wariantów. W tabelicy 6.5 zestawiono wartości uzyskane z rozwiązania zadania Z2 dla pełnej kompensacji dla $\rho_0 = \rho_1 = \rho_2 = 1$ oraz dla kompensacji częściowej.

Tablica 6.5

$\min \sum_{h=1}^n \sum_{\alpha=1}^3 \nabla_{h^*}^2 I_{ah}^* I_{ah}^*$				WIELKOŚCI UZYSKANE ZA POMOCĄ KOMP. LC		
WARIANT	$ \Pi^{\text{opt}(2c)} $	P_{odb}	P_{komp}	$ \Pi^* $	P_{odb}^*	P_{komp}^*
A	A	W	W	A	W	W
	17,2	3801	-513	19,2	3606,2	0
B	20,6	3288,3	-810	20,9	3033,1	0
C	19,3	3589,3	0	18,4	3444,5	0

Aneks A

WYBRANE UOGÓLNIENIA TEORII MOCY OBWODÓW Z PRZEBIEGAMI NIESINUSOIDALNYMI

W aneksie przedstawiono skrócony i uproszczony przegląd koncepcji teorii mocy obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi. Opisane koncepcje nie wyczerpują wszystkich znanych kilkudziesięciu propozycji mocy, którym poświęcone jest kilkaset prac źródłowych. Corocznie obserwuje się wprowadzanie co najmniej kilku nowych pojęć mocy o kontrowersyjnych interpretacjach. Analiza porównawcza niektórych koncepcji mocy została przeprowadzona w pracach [10, 16, 30], a pełne omówienie znanych pojęć mocy wymagałoby oddzielnej monografii. Opisane poniżej koncepcje źródłowe zostały w zasadzie wprowadzone dla układu jednofazowego z idealnym źródłem napięcia (rozdz.1.2., rys.1.4a), w innych sytuacjach, tam gdzie to było możliwe, koncepcje te zredukowano do wymienionego obwodu. Należy podkreślić, że wniknięcie w omawiane koncepcje nie jest możliwe na podstawie niniejszego aneksu i wymaga skrupulatnej analizy prac źródłowych, bez której pewne idee autorów tych prac mogłyby zostać rozmyte bądź też zagubione.

Koncepcja Z. Nowomiejskiego [53, 54]

Określił on moc bierną Budeanu (1.12) w dziedzinie czasu, zgodnie ze wzorem:

$${}_B Q = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) [\mathfrak{H}i](t) dt, \quad (\text{A.1})$$

gdzie:

\mathfrak{H} - transformata Hilberta prądu dwójnika (rys.1.1), określona wzorem:

$$[\mathfrak{H}i](t) = \text{V.P.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (\text{A.2})$$

Ponadto zdefiniował on moc bierną S. Fryzego (1.25) za pomocą formuły całkowej:

$${}_F Q = \sqrt{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{1}{2} |u(t)i(\tau) - i(t)u(\tau)|^2 dt d\tau} , \quad (\text{A.3})$$

i wprowadził moc symboliczną ${}_N S$:

$${}_N S = P + j {}_B Q , \quad (\text{A.4})$$

gdzie:

P - moc czynna,

${}_B Q$ - moc bierna Budeanu.

Koncepcja ta zawiera elementy teorii C.I. Budeanu i S. Fryzego, a jej cechą zmienną jest to, że wszystkie moce są definiowane w dziedzinie czasu.

Koncepcja E. W. Kimbarka [45]

Wprowadził on równanie mocy:

$$|S|^2 = P^2 + {}_K Q^2 + {}_K D^2 , \quad (\text{A.5})$$

gdzie:

$|S|$ - moc pozorna

$${}_K Q = |U_1| |I_1| \sin(\angle U_1, I_1) , \quad (\text{A.6})$$

$${}_K D = \sqrt{|S|^2 - P^2 - {}_K Q^2} . \quad (\text{A.7})$$

Cechą zmienną koncepcji Kimbarka jest to, że za moc bierną w obwodach z przebiegami niesinusoidalnymi przyjął on moc podstawowej harmonicznej przebiegów napięcia i prądu (rys.1.4a).

Koncepcja D. Sharona [68]

Wprowadził on równanie mocy:

$$|S|^2 = P^2 + {}_S Q^2 + {}_S S^2 \quad (\text{A.8})$$

gdzie:

$|S|$, P - moc pozorna i czynna,

$${}_S Q = \|u\|_{L^2_T} \sqrt{\sum_{h=1}^{\infty} |I_h|^2 \sin^2(\angle U_h, I_h)} , \quad (\text{A.9})$$

$${}_S S = \sqrt{|S|^2 - P^2 - {}_S Q^2} . \quad (\text{A.10})$$

Wprowadzona tu koncepcja mocy ${}_sQ$ jest identyczna z koncepcją mocy reaktancyjnej zdefiniowanej przez Shepherd'a i Zakikhaniego i omówionej w dalszej części aneksu. Sens fizyczny mocy ${}_sS$ nie został wyjaśniony przez Sharona.

Koncepcja J.H.R. Enslina i J.D. Van Wyka [35]

Zaproponowali oni definicję mocy biernej ${}_EQ$ dla przebiegów nieokresowych. Definicja ta dla przebiegów okresowych przyjmuje postać:

$${}_EQ = \sqrt{R_{ui}^2(\tau) - R_{ui}^2(0)}, \quad (\text{A.11})$$

gdzie:

$$R_{ui}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(\tau) i(t - \tau) dt. \quad (\text{A.12})$$

Wprowadzili oni również nowe pojęcie mocy deaktywnej ${}_ED$:

$${}_ED = \sqrt{|S|^2 - P^2 - {}_EQ^2}. \quad (\text{A.13})$$

Niestety, moc ${}_EQ$ nie jest miarą zwrotnego przepływu energii w obwodzie, gdyż przepływ ten uzależniony jest również od mocy deaktywnej [10].

Koncepcja N.L. Kustersa W.J.M. Moore'a [50]

W ramach tej koncepcji zostały rozpatrzone dwa przypadki, z których pierwszy dotyczył odbiornika o charakterze rezystancyjno-indukcyjnym, drugi natomiast dotyczył odbiornika o charakterze rezystancyjno-pojemnościowym. Dla wymienionych klas odbiorników zostały wprowadzone rozkłady ortogonalne prądu źródła i równania mocy.

Układ rezystancyjno-indukcyjny

Rozkład ortogonalny prądu źródła:

$$i = {}_a i + i_{qc} + i_{qcr} \quad (\text{A.14})$$

gdzie:

i - całkowity prąd źródła,

${}_a i$ - prąd aktywny w sensie S. Fryzego (1.17),

i_{qc} - prąd bierny pojemnościowy, określony wzorem:

$$i_{qc} = \frac{\left(\frac{du}{dt}, i \right)_{L_T^2}}{\left(\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L_T^2} \right)^2} \cdot \frac{du}{dt} \quad (\text{A.15})$$

i_{qcr} - prąd dopełniający, stanowiący uzupełnienie prądów a_i , i_{qc} do prądu całkowitego i .

Z wzajemnej ortogonalności prądów a_i , i_{qc} , i_{qcr} :

$$(a_i, i_{qc})_{L_T^2} = 0, \quad (a_i, i_{qcr})_{L_T^2} = 0, \quad (i_{qc}, i_{qcr})_{L_T^2} = 0, \quad (\text{A.16})$$

wynika, że:

$$\|i\|_{L_T^2}^2 = (a_i + i_{qc} + i_{qcr}, a_i + i_{qc} + i_{qcr})_{L_T^2} = \|a_i\|_{L_T^2}^2 + \|i_{qc}\|_{L_T^2}^2 + \|i_{qcr}\|_{L_T^2}^2. \quad (\text{A.17})$$

Mnożąc równanie (A.17) przez kwadrat wartości skutecznej napięcia źródła, uzyskuje się równanie mocy:

$$|S|^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|i\|_{L_T^2}^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|a_i\|_{L_T^2}^2 + \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_{qc}\|_{L_T^2}^2 + \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_{qcr}\|_{L_T^2}^2 = P^2 + {}_K Q_c^2 + {}_K Q_{cr}^2. \quad (\text{A.18})$$

gdzie:

$|S|$, P - moc pozorna i czynna

${}_K Q_c^2$ - moc bierna pojemnościowa,

${}_K Q_{cr}$ - moc dopełniająca.

Układ rezystancyjno-pojemnościowy

Rozkład ortogonalny prądu źródła:

$$i = a_i + i_{qL} + i_{qLr}, \quad (\text{A.19})$$

gdzie:

i , a_i - prąd całkowity źródła i prąd aktywny (por. (A.14))

i_{qL} - prąd bierny indukcyjny, określony wzorem:

$$i_{qL} = \frac{\left(\int_0^t u(\tau) d\tau, i \right)_{L_T^2}}{\left\| \int_0^t u(\tau) d\tau \right\|_{L_T^2}^2} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad (\text{A.20})$$

i_{qLr} - prąd dopełniający, stanowiący uzupełnienie prądów a_i , i_{qL} do prądu całkowitego i .

Prądy a_i , i_{qL} , i_{qLr} są wzajemnie ortogonalne:

$$(a_i, i_{qL})_{L_T^2} = 0, \quad (a_i, i_{qLr})_{L_T^2} = 0, \quad (i_{qL}, i_{qLr})_{L_T^2} = 0. \quad (\text{A.21})$$

Postępując podobnie jak poprzednio (por. (A.17), (A.18)) uzyskuje się równania mocy:

$$|S|^2 = P^2 + \kappa Q_L^2 + \kappa Q_{Lr}^2. \quad (\text{A.22})$$

gdzie:

$$\kappa Q_L = \|u\|_{L_T^2} \|i_{qL}\|_{L_T^2} - \text{moc bierna indukcyjna},$$

$$\kappa Q_{Lr} = \|u\|_{L_T^2} \|i_{qLr}\|_{L_T^2} - \text{moc dopełniająca}.$$

Zgodnie z koncepcją Kustersa-Moore'a, prądy: bierny pojemnościowy i_{qC} i bierny indukcyjny i_{qL} mogą być wyeliminowane z całkowitego prądu źródła przez dołączenie równolegle do zacisków odbiornika odpowiednio dobranego kondensatora lub induktora. Prądy dopełniające i_{qCr} , i_{qLr} są niekompensowalne dwójnikiem reakcyjnym. Z przedstawionych powodów moce κQ_C , κQ_L zostały przez autorów koncepcji nazwane odpowiednio mocą bierną pojemnościową i mocą bierną indukcyjną.

Niestety, szczegółowa analiza koncepcji Kustersa-Moore'a przeprowadzona przez L.S. Czarneckiego [18, 21], wykazała niepoprawność wniosków wyciąganych przez autorów tej koncepcji oraz brak prawidłowej interpretacji wprowadzonych mocy.

Koncepcja M. Depenbrocka [28, 29]

Podstawę tej koncepcji stanowi rozkład całkowitego napięcia źródła u na harmoniczną podstawową u_1 i składnik uzupełniający u_k :

$$u = u_1 + u_k . \quad (\text{A.23})$$

Wykorzystując wzór (A.23) oraz definiując wielkości:

$$P_1 = (u_1, i)_{L_T^2} , \quad (\text{A.24})$$

$$P_k = (u_k, i)_{L_T^2} , \quad (\text{A.25})$$

$$G_1 = \frac{(u_1, i)_{L_T^2}}{\|u\|_{L_T^2}^2} , \quad (\text{A.26})$$

$$G_k = \frac{(u_k, i)_{L_T^2}}{\|u\|_{L_T^2}^2} , \quad (\text{A.27})$$

$$G = \frac{(u, i)_{L_T^2}}{\|u\|_{L_T^2}^2} , \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta G = G_1 - G , \quad (\text{A.29})$$

$$\Delta G_k = G_k - G , \quad (\text{A.30})$$

wprowadzony został rozkład ortogonalny całkowitego prądu i źródła:

$$i = a^i_1 + a^i_k + i_Q + i_{gv} + i_{kv} + i_N , \quad (\text{A.31})$$

gdzie:

$$a^i_1 = \frac{(u, i)_{L_T^2}}{\|u\|_{L_T^2}^2} u_1 , \quad (\text{A.32})$$

$$a^i_k = \frac{(u, i)_{L_T^2}}{\|u\|_{L_T^2}^2} u_k , \quad (\text{A.33})$$

$$a^i_Q = \frac{(i, u_1(t - \frac{T}{4}))}{\|u_1\|^2} u_1(t - \frac{T}{4}) , \quad (\text{A.34})$$

$$i_{gv} = \Delta G u_1, \quad (\text{A.35})$$

$$i_{gv} = \Delta G_k u_k, \quad (\text{A.36})$$

$$i_N = i - (a i_1 + a i_k + i_Q + i_{gv} + i_{kv}). \quad (\text{A.37})$$

Wykorzystując rozkład prądu (A.31) M. Depenbrock wprowadził równanie mocy:

$$|S|^2 = P^2 + {}_DQ^2 + V^2 + N^2, \quad (\text{A.38})$$

gdzie:

$$P = P_1 + P_k, \quad (\text{A.39})$$

$${}_DQ = \|u\|_{L_T^2} \|i_Q\|_{L_T^2}, \quad (\text{A.40})$$

$$V = \|u\|_{L_T^2} \sqrt{\|i_{gv}\|_{L_T^2}^2 + \|i_{kv}\|_{L_T^2}^2}, \quad (\text{A.41})$$

$$N = \|u\|_{L_T^2} \|i_N\|_{L_T^2}. \quad (\text{A.42})$$

Koncepcja Depenbrocka zawiera cechy wspólne z koncepcją Kimbarka. Moce P_1 (A.24), P_k (A.25) to moce czynne przenoszone przez pierwszą harmoniczną prądu i przez pozostałe harmoniczne prądu. Moc ${}_DQ$ stanowi [10] moc bierną podstawowej harmonicznej i pokrywa się z definicją mocy biernej (A.6) wprowadzonej przez Kimbarka. Sens fizyczny pozostałych mocy występujących w równaniu (A.38) nie został dostatecznie wyjaśniony.

Koncepcja Shepherd'a - Zakikhaniego [69, 70]

Podstawę tej koncepcji stanowi rozkład prądu źródła (rys.1.4a) na dwa składniki:

$$i = i_R + i_r, \quad (\text{A.43})$$

gdzie:

$$i_R(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} |I_h| \cos \varphi_h (h\omega_0 t + \alpha_h), \quad (\text{A.44})$$

$$i_r(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} |I_h| \sin \varphi_h (h\omega_0 t + \alpha_h), \quad \alpha_h = \arg U_h, \quad \varphi_h = (U_h, I_h), \quad (\text{A.45})$$

przy czym prądy i_R , i_r są wzajemnie ortogonalne:

$$(i_R, i_r)_{L_T^2} = 0. \quad (A.46)$$

Ze wzorów (A.43), (A.46) wynika równanie mocy:

$$|S|^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|i\|_{L_T^2}^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_R\|_{L_T^2}^2 + \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_r\|_{L_T^2}^2 = {}_R S^2 + Q_r^2, \quad (A.47)$$

w którym nie występuje moc czynna P . Interpretacja prądów i_R , i_r jest prosta dla odbiornika SLS opisanego ciągiem admitancji $Y_h = G_h + jB_h$, $h \in N$ (rys. A1).

Harmoniczne I_{Rh} , I_{rh} prądów i_r , i_r stanowią rzuty harmonicznyc I_h całkowitego prądu odbiornika na kierunek równoległy i prostopadły względem wektora U_h harmonicznyc napięcia źródła. Zatem:

$$i_R(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_h U_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (A.48)$$

$$i_r(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(jh\omega_0 t). \quad (A.49)$$

Prąd i_R nosi nazwę składowej czynnej całkowitego prądu źródła i podobnie jak moc S_R (A.47), nie ma on bardziej szczegółowej interpretacji fizycznej. Harmoniczne prądu i_r (A.49) są przesunięte w fazie o kąt $\pm \frac{\pi}{2}$ względem harmonicznyc U_h napięcia źródła i mogą być wyeliminowane z prądu źródła przez dołączenie równoległe do zacisków odbiornika dwójnika reaktancyjnego o susceptancjach kB_h takich, że:

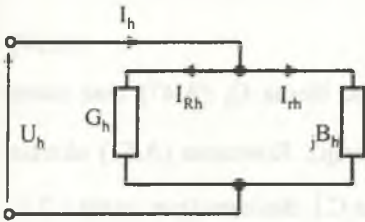
$$kB_h = -B_h, \quad h \in N. \quad (A.50)$$

Z wymienionych powodów przyjmuje się, że prąd i_r związany jest ze zwrotnym przepływem energii w układzie: źródło - odbiornik. Prąd ten nosi nazwę prądu reaktancyjnego a jego miarę stanowi moc Q_r (A.47). Należy zauważyć, że żadna z mocy występujących w równaniu (A.47) nie jest zachowawcza. Dla źródła o skończonym widmie harmonicznyc i o pomijalnie małej impedancji wewnętrznej przedstawiona interpretacja prądu i_r oraz mocy Q_r wydaje się sensowna. Wątpliwości

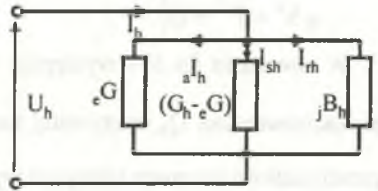
powstają w sytuacji, gdy napięcie źródła jest sygnałem o nieskończonym widmie harmonicznym, co z reguły zawsze występuje. W tym przypadku z jednej strony prąd bierny i_r oraz moc bierna Q_r byłyby pobierane przez układ o stałych skupionych, z drugiej strony zaś prąd ten oraz moc Q_r byłyby kompensowane układem polowym - bezstratną linią długą o susceptancjach określonych wzorem (A.50). Wynikałoby z tego wątpliwa równoważność energetyczna tych układów.

Koncepcja L.S. Czarneckiego [15, 20]

Modyfikacja koncepcji Shepherda - Zakikhaniego została przeprowadzona przez L.S. Czarneckiego i polegała na dalszej dekompozycji rozkładu (A.43). W wyniku tej dekompozycji uzyskuje się prąd aktywny S. Fryzego oraz nowy prąd i_d nazwany prądem rozrzutu (dispersji). Uzyskana w ten sposób dekompozycja prądu źródła wynika wprost z rys.A1 oraz rys.A2:



Rys.A1. Ilustracja rozkładu (A.43) dla pojedynczej harmoniczej
Fig.A1. The illustration of decomposition (A.43) for single harmonic



Rys.A2. Ilustracja dekompozycji (A.51) dla pojedynczej harmoniczej
Fig.A2. The illustration of decomposition (A.51) for single harmonic

Wprowadzony w tej koncepcji rozkład prądu źródła określa wzór:

$$\begin{aligned}
 i &= i_a + i_r + i_s = \\
 &= G_0 U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h + jB_h) U_h \exp(jh\omega_0 t) = \\
 &= {}_e G U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_e G_h U_h \exp(jh\omega_0 t) + \\
 &+ \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(jh\omega_0 t) + \\
 &+ (G_0 - {}_e G) U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - {}_e G) U_h \exp(jh\omega_0 t).
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

Z wzajemnej ortogonalności prądów i_a , i_r , i_s :

$$(i_a, i_r)_{L_T^2} = 0, \quad (i_a, i_s)_{L_T^2} = 0, \quad (i_r, i_s)_{L_T^2} = 0 \tag{A.52}$$

wynika równanie mocy:

$$|S|^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|i\|_{L_T^2}^2 = \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_a\|_{L_T^2}^2 + \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_r\|_{L_T^2}^2 + \|u\|_{L_T^2}^2 \|i_s\|_{L_T^2}^2 = P^2 + Q_r^2 + Q_s^2, \tag{A.53}$$

przy czym (por. A.47):

$${}_R S^2 = P^2 + Q_s^2. \tag{A.54}$$

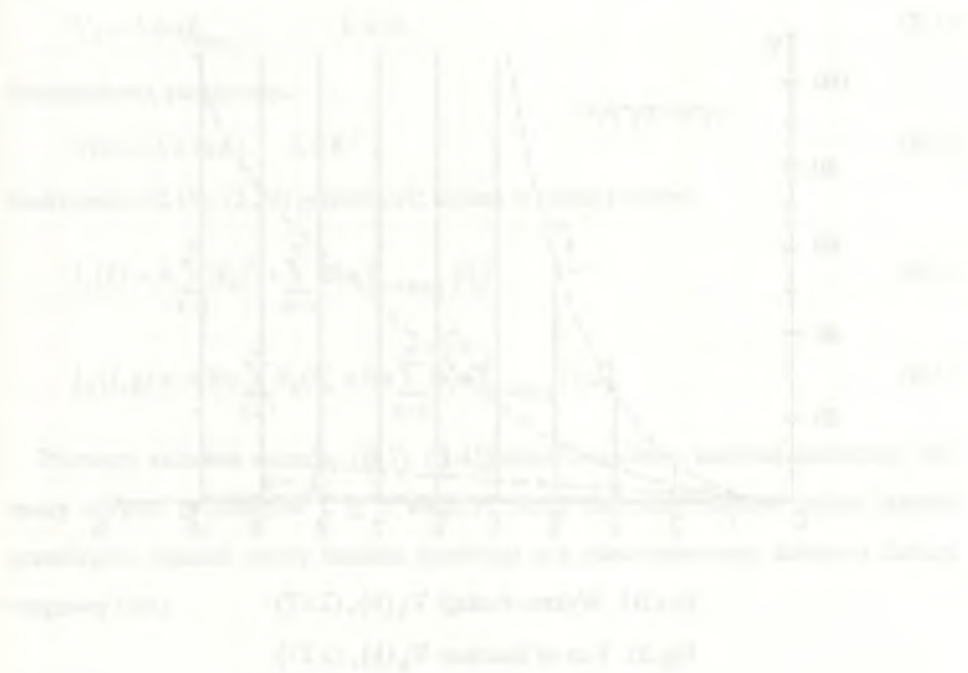
W równaniu (A.53) występuje moc czynna P , moc bierna Q_r (A.47) oraz nowa niezachowawcza Q_s , nazywana mocą rozrzutu (dyspersji). Równanie (A.53) określa prostopadłość mocy różny od wprowadzonego przez C.I. Budeanu (por. rozdz.1.2.1, rys.1.3). Prąd rozrzutu i_s (A.51) powstaje w wyniku dyspersji częstotliwościowej konduktancji odbiornika G_h względem konduktancji zastępczej S . Fryzego ${}_e G$. Bardziej szczegółowa interpretacja tego prądu jest nicznana. Moce Q_r , Q_s (A.53) stanowią jedynie miary prądów i_r , i_s i nie mają odrębnej interpretacji. Moce te są niezachowawcze, a więc nieprzydatne do celów bilansowania energii.

Przedstawione koncepcje źródłowe niektórych teorii mocy układów z przebiegami niesinusoidalnymi mają wiele uogólnień. Koncepcje te oraz wiele innych nie omówionych w pracy mają następujące cechy wspólne:

1. Są one wprowadzane na poziomie najprostszego modelu obwodu złożonego ze źródła i odbiornika.

2. Dotyczą z reguły układów z przebiegami niesinusoidalnymi i okresowymi.
3. W żadnej z nich nie uwzględnia się pojęcia optymalnego kształtu przebiegu.
4. Wprowadzane dekompozycje prądów i mocy budzą liczne wątpliwości interpretacyjne.
5. Wprowadzane moce są najczęściej niezachowawcze.

Z wymienionych przyczyn brak jest ogólnie akceptowalnych na świecie mocy w układach z przebiegami niesinusoidalnymi, a sposoby poprawnego zdefiniowania takich mocy (o ile w ogóle istnieją) pozostają do chwili obecnej nieznanymi. Świadczą o tym liczne kontrowersyjne artykuły, które ukazały się w ostatnim okresie np. [26, 32, 36].

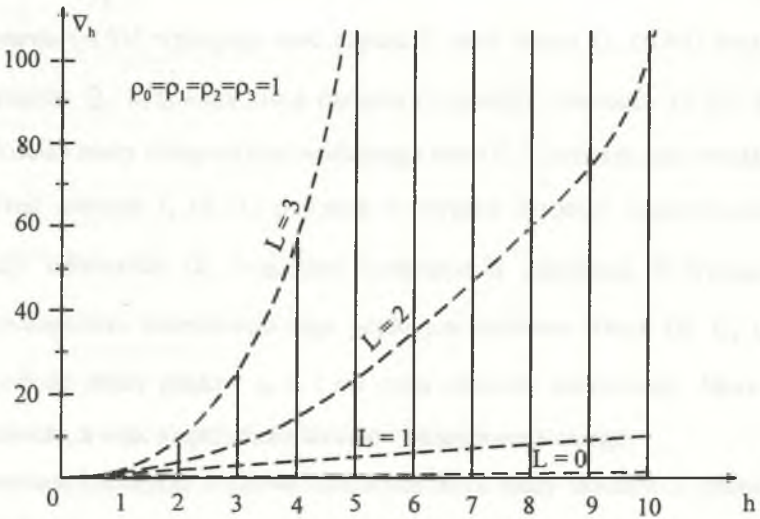


Aneks B

UOGÓLNIONY WSKAŹNIK JAKOŚCI

Sprecyzowanie pojęcia "optymalnego kształtu", przebiegów występujących w obwodach elektrycznych jest możliwe, gdy obwody te stanowią modele układów elektroenergetycznych. Dla takich obwodów optymalny kształt przebiegów utożsamia się z przebiegiem sinusoidalnym o częstości znamionowej systemu elektroenergetycznego. W ogólnej teorii obwodów i sygnałów określenie pojęcia optymalnego kształtu przebiegów jest możliwe dla wybranej klasy układów (np. generatorów drgań) i zdeterminowane celami, do których układy te są stosowane.

Wykorzystywane w pracy wskaźniki jakości (2.14), (2.15), (2.19), (2.20) stanowią filtry, silnie wzmacniające wyższe harmoniczne przebiegów, co wprost wynika ze wzorów (2.17), (2.19), (2.20) (rys.B.1).



Rys.B1. Wykres funkcji $\nabla_h(h)$, (2.17)

Fig.B1. Plot of function $\nabla_h(h)$, (2.17)

Minimalizacja wymienionych wskaźników jakości prowadzi zatem do wyróżnienia przebiegów o kształcie zbliżonym do przebiegu sinusoidalnego i o częstotści najniższej harmonicznej występującej w przebiegu napięcia źródła. Wskaźniki te nie mogą być więc wykorzystywane do optymalizacji obwodów, dla których optymalny kształt przebiegu rozumie się w inny, niż to opisano, sposób. Eliminację tej niedogodności można przeprowadzić różnie. Kilka metod umożliwiających optymalizację energetyczno-jakościowych właściwości obwodów, dla których optymalny kształt przebiegów zadaje się w sposób dowolny, opisano poniżej.

I. MODYFIKACJA WSKAŹNIKA JAKOŚCI W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI

Możliwe jest [84] uogólnienie wskaźników jakości (2.19), (2.20) w taki sposób, by zależały one selektywnie od grupy harmonicznych należących do danego zbioru indeksów $N_0 \subset N$. W tym celu wystarczy współczynniki ∇_h zdefiniować jako dowolną zadaną i dodatnią funkcję częstotliwości $\nabla(\omega)$:

$$\nabla_h = \nabla(\omega)|_{h\omega_0}, \quad h \in N. \quad (\text{B.1})$$

Przykładowo, przyjmując:

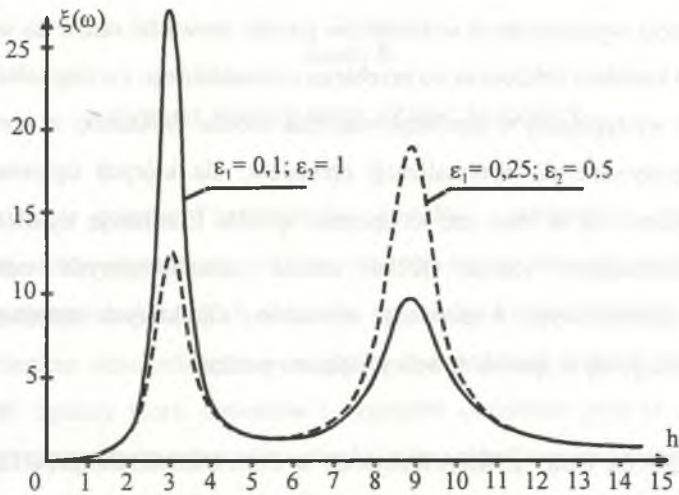
$$\nabla(\omega) = A + B(\omega), \quad A \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{B.2})$$

funkcjonały (2.19), (2.20) przedstawić można w postaci wzoru:

$$J_1(f) = A \sum_{h=1}^{\infty} |F_h|^2 + \sum_{h=1}^{\infty} B(\omega)|_{\omega=h\omega_0} |F_h|^2, \quad (\text{B.3})$$

$$J_2(f, g) = A \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} F_h G_h^* + \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} B(\omega)|_{\omega=h\omega_0} F_h G_h^*. \quad (\text{B.4})$$

Pierwszy składnik wzorów (B.3), (B.4) umożliwia ocenę wartości skutecznej lub mocy czynnej przebiegów f , g , z wagą A , drugi natomiast stanowi ocenę kształtu przebiegów. Sposób oceny kształtu przebiegu jest zdeterminowany doбором funkcji wagowej $B(\omega)$.

Rys.B2. Przykładowy wykres funkcji $B(\omega)$ Fig.B2. Exemplary plot of function $B(\omega)$

Przykład B.1

Przyjmijmy, że wskaźnik jakości (B.3) powinien być uzależniony od udziałów trzeciej i dziewiątej harmonicznej przebiegu okresowego. Definiując funkcję $B(\omega)$ (rys.B2) zgodnie z wzorem:

$$B(\omega) = \omega \left[\frac{1}{(\omega - 3)^2 + \varepsilon_1} + \frac{1}{(\omega - 9)^2 + \varepsilon_2} \right], \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, \quad A = 0,5,$$

rozwiązanie problemu minimalizacji wskaźnika (B.3) prowadzi do prądu optymalnego o małej zawartości trzeciej i dziewiątej harmonicznej.

Wynika to z oszacowania prądu optymalnego źródła, które (por. rozdz.3.1) dla układu z idealnym źródłem napięcia ma postać:

$$|{}_a I_h| = |{}_e G_h| |U_h| \leq |B(\omega)|_{\omega=h\omega_0}^{-1} |U_h|. \quad (B.5)$$

II. MODYFIKACJA WSKAŹNIKA JAKOŚCI W DZIEDZINIE CZASU

Uwrażliwienie wskaźników jakości (2.14), (2.15) na zadany kształt przebiegu można osiągnąć [85], modyfikując je od postaci określonej wzorami:

$$J_3(f) = \sum_{k=-m}^{k=l} \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [\mathfrak{K}^{(k)} f]^2(t) dt, \quad (B.6)$$

$$J_4(f, g) = \sum_{k=-m}^{k=l} \rho_k \frac{1}{T} \int_0^T [\mathfrak{K}^{(k)}(f, g)]^2(t) dt, \quad (B.7)$$

gdzie:

$\rho_{-m}, \dots, \rho_0, \dots, \rho_l$ - nieujemne współczynniki wagi,

$\mathfrak{K}^{(k)}$ - operator zdefiniowany zgodnie z wzorem:

$$\mathfrak{K}^{(k)} = \begin{cases} D^{(k)} & \text{dla } k \geq 0 \\ I^{(k)} & \text{dla } k < 0 \end{cases}, \quad (B.8)$$

$D^{(k)}$ - symbol pochodnej w sensie Sobolewa, k-tego rzędu,

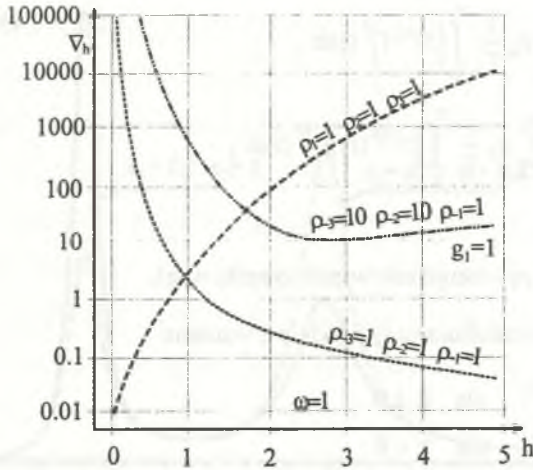
$I^{(k)}$ - symbol k-krotnej nieznaczonej całki w sensie Lebesgue'a.

Można wykazać [86], że funkcjonały J_3, J_4 w dziedzinie częstotliwości przyjmują postać określoną wzorami (2.19), (2.20), przy czym (por. (B.1), (B.2)):

$$\nabla_h = \sum_{k=-m}^{k=l} \rho_k (h\omega_0)^{2k}. \quad (B.9)$$

Uwzględnienie we wskaźnikach jakości (B.6), (B.7) pochodnych przebiegów uwrażliwia je na wpływ wyższych harmonicznym przebiegów. W przeciwieństwie do tego operator całkowania (B.8) uwrażliwia te wskaźniki na harmoniczne o niskich numerach. W efekcie tego poprzez dobór współczynników wagi ρ_k można ustalić wrażliwość rozpatrywanych funkcjonałów na żądane pasmo harmonicznym przebiegu, a więc na jego żądany kształt. Uzyskane tak funkcje ∇_h (B.9) mogą być modalnymi funkcjami częstotliwości, co ilustruje rys.B.3.

Optymalizacja wskaźników jakości (B.6), (B.7) prowadzić może do przebiegów o wytłumionym bądź też wzmacnionym pasmie harmonicznym.

Rys.B3. Przykładowy przebieg funkcji $\nabla_h(h)$, (B.9)Fig.B3. Exemplary plot of function $\nabla_h(h)$, (B.9)

III. MODYFIKACJA ZADANIA OPTYMALIZACYJNEGO

Podejście takie stosowane od niedawna [76, 77, 91], możliwe jest w dwojaki sposób, co opisano poniżej.

III.1. Modyfikacja funkcjonału jakości uwzględniająca sygnał wzorcowy

Modyfikacja ta polega na rozpatrywaniu zadań optymalizacji (por. rozdz. 3, 4 pracy) z wykorzystaniem funkcjonałów określonych na sygnale różnicowym:

$$\min_f J(f - f_0), \quad (\text{B.10})$$

gdzie:

f_0 - zadany sygnał wzorcowy określający przyjęty optymalny kształt przebiegu.

Funkcjonał jakości (B.10) może tu mieć postać normy średniokwadratowej, normy Sobolewa lub też innych norm przestrzeni funkcyjnych. Do rozwiązywania problemów optymalizacji funkcjonałów (B.10) nieróżniczkowalnych w sensie Frechéta lub Gateaux stosuje się metody subgradientowe [76]. Minimalizacja sygnału różnicowego umożliwiła uzyskiwanie przebiegów optymalnych o kształtach różniących się dowolnie mało od przebiegów wzorcowych.

III.2. Modyfikacja ograniczeń ograniczeń optymalizacji

W tym przypadku zadania optymalizacji klasycznych funkcjonałów jakości (por. rozdz. 3, 4) uzupełnia się o dodatkowe ograniczenia:

A. Dotyczące przebiegu różnicowego:

$$\mathcal{U}_1(f - f_0) = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (\text{B.11})$$

gdzie:

\mathcal{U}_1 - funkcjonały mające postać norm przestrzeni Hilberta przebiegów okresowych (por. rozdz. 2).

B. Dotyczące zawartości harmonicznyc z zadanego pasma, zgodnie z wzorem:

$$\mathcal{U}_2(f) = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0 \quad (\text{B.12})$$

gdzie:

\mathcal{U}_2 - funkcjonały stanowiące ocenę przebiegów, określone zgodnie z regułami opisanymi w punktach I, II aneksu.

Wymienione metody umożliwiają formalizację zadań optymalizacyjnych, których rozwiązanie prowadzi do prądów optymalnych (aktywnych) o minimalnych wartościach skutecznych lub też realizujących minimalne straty mocy czynnej na wybranych elementach obwodów. Kształt tych prądów jest dowolnie bliski zadanym przebiegom wzorcowym. Techniki rozwiązywania wymienionych problemów są często podobne do stosowanych w pracy.

LITERATURA

1. Adams R. A.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975.
2. Akagi H., Kanazawa V., Nabae A.: Generalized Theory of Instantaneous Reactive Power in Three-phase Systems. Int. Power Electron. Conf. (IPEC), Tokyo 1983, pp.1375-1386.
3. Aleksiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1975.
4. Berker G.P.: On matrices having a invariant cone. Czech. Math. Journal. No.21, 1972.
5. Berman A., Plemmons R.J.: R.J.: Monotonicity and generalized inverse. SIAM J. Appl. Math. No.22,1972.
6. Berman A., Plemmons R.J.: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press, London 1979
7. Bertsekas D.P.: Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press, New York 1982.
8. Białkiewicz Z.S.: Reducing of Harmonic in MV Networks with LC Filters. Int. Conf. on Source and Effects of Power Systems Disturbances. London, April, 1974, pp.151-155.
9. Boesch F.T., Wohlers M.R.: On network synthesis with negative resistances. Proc. IRE,48, Sept. 1960, pp.1656-1657.
10. Bolikowski J., Czarnecki L., Miłek M.: Pomiar wartości skutecznych i mocy w obwodach o przebiegach niesinusoidalnych. PWN, Warszawa 1990.
11. Brodzki M., Walczak J., Umińska-Bortliczek M., Pasko M.: Optimierung eines Vorgeschlageren neuen Qualitätsfaktors Electricischer Energie. 33 Int. Wiss. Symp., Ilmenau, 1988, pp.63-66.
12. Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne, nr 35, z.5, 1989, ss.31-44.

13. Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych, z wykorzystaniem pojęcia przestrzeni Sobolewa. Materiały XI SPETO'88, Wisła 1988, ss.213-231.
14. Budeanu C.I.: Puissances reactivs et fictives. RGE. TXXIII, 1928, pp.762-773.
15. Carlin H. J.: General N-port Synthesis with Negative Resistors. Proc. IEE 113, May 1966, pp.783-787.
16. Cholewicki T.: Rodzaje mocy przy przebiegach odkształconych. Obecny stan badań. Przegląd Elektrotechniczny, Nr 3, 1980, ss.99-102.
17. Czarnecki L.S.: Minimisation of distortion power of nonsinusoidal sources applied to linear loads. Proc. IEE, Vol. 128, Pt.C, No.4, July, 1981, pp.208-210.
18. Czarnecki L.S.: Additional Discussion to "Reactive Power Under Non-sinusoidal Conditions". IEEE Trans. on PAS-102, No.4, 1983, pp.
19. Czarnecki L.S.: Ortogonalne składniki prądu odbiornika liniowego zasilanego napięciem odkształconym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.86, Gliwice 1983, ss.5-17.
20. Czarnecki L.S.: Interpretacja identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.91, Gliwice 1984 (monografia habilitacyjna).
21. Czarnecki L.S.: Uwagi o definicjach mocy biernej Kustersa i Moore'a obwodów o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne, t. 30, z. 3-4, 1984, ss.1089-1100.
22. Czarnecki L.S.: Minimization of reactive power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans. Instr. Meas. Vol. IM.36, No.1, March, 1987, pp.18-22.
23. Czarnecki L.S.: Kompensacja prądu biernego i prądu asymetrii układu 3-fazowego z przebiegami niesinusoidalnymi. Wiosenne Seminarium prądów niesinusoidalnych. Drzonków, maj 1989, ss.59-72.
24. Czarnecki L.S.: What is Wrong with the Budeanu Concept of Reactive and Distortion Power and Why it should be Abandoned. IEEE Trans. Instr. Meas. Vol. IM-38, 1989, pp.839-841.

25. Czarnecki L.S.: Physical Reasons of Currents RMS Value Increase in Power Systems with Nonsinusoidal Voltage. IEEE Tran. on Power Delivery, Vol.8 No.1, January, 1993, pp.437-447, and Discussion.
26. Czarnecki L.S.: Power Theory of Electric Circuits: Common Data Base of Power Related Phenomena and Properties. ETEP Vol.4, No.6, November/ December 1994, pp.491-498 (and Discussion).
27. Demirczjan K.S.: Reaktywna ili obmiennaja moszczynost? Izv.Akad. Nauk ZSRR, No.2, 1984, c. 66-72.
28. Depenbrock M.: Wirk-und Blindleistungen periodischer Strome in Ein-und Mehrphasensystemen mit periodischen Spannungen beliebiger Kurvenform. ETG-Faber. No.6, Berlin/Germany: vde-verlag, 1979, pp.17-59.
29. Depenbrock M.: Wirk-und Blindleistung. ETG Fachung „Blindleistung“ Aachen, Oct. 1979, pp.17-63.
30. Depenbrock M., Marshall D.A., Van Wyk J.D.: Formulating Requirements for a Universally Applicable Power Theory as Control Algorithm in Power Compensators. Proc. Second International Workshop on Power Definitions and Measurements under Nonsinusoidal Conditions, Stresa, Italy, 1993, pp.1-25.
31. Emanuel A.E.: Suggested definitions of reactive power nonsinusoidal systems. Proc IEEE, Vol.121, No.7, July 1974, pp.705-706.
32. Emanuel A.E.: Apparent and Reactive Powers in Three-Phase Systems: In Search of a Physical Meaning and Better Resolution. ETEP, Vol.3, No.1, January/February 1993, pp.7-14, and letters to the Editor,
33. Comments by Czarnecki L.S. and Reply by Emanuel A.E. ETEP, Vol.4, No.1, Sept./Oct., 1994, pp.421-426.
34. Emanuel A.E.: The Need for a Simple and Practical Resolution of the Apparent Power. ETEP, Vol.3, No.1, January/February, 1993, pp.103-106, (and Discussion).
35. Enslin J.H.R., Van Wyk J.D.: Measurement and Compensation of Fictitious Power under Nonsinusoidal Voltage and Current Conditions. IEEE Trans. on IM., Vol. IM-37, No.3, 1988, pp.403-408.

36. Filipiński P.: Apparent Power -a Misleading Quantity in the Nonsinusoidal Power Theory: Are all Non-sinusoidal Power Theories Doomed to Fail. ETEP, Vol.3, No.1, January/February 1993, pp.21-26, and letters to the Editor, Comments by Czarnecki L.S. and Reply by Filipiński P., ETEP, Vol.4, No.1, Sept./Oct., 1994, pp.427-432.
37. Franks L. E.: Teoria sygnałów. WNT, Warszawa 1976.
38. Fryze S.: Moc czynna, bierna i pozorna w obwodach o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny nr 7, 1931, ss.193-203, nr 8, 225-234, oraz nr 22, 1932, ss.673-676.
39. Fryze S.: Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki. PWN, Wrocław 1966.
40. Gafni H., Cederbaum I.: Synthesis with negative resistors. Proc. IEE, May 1966, pp.783-787.
41. Guillemain E.A.: Synthesis of passive networks. J. Wiley New York 1957.
42. Hooke R., Jeeves J.A.: Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems. Proc. of JACM, No.12, 1974, pp.212-229.
43. Iwan K., Szczęsny R.: System TCAD 4.2, pakiet programów symulacyjnych układów energoelektronicznych. Przewodnik użytkownika, Gdańsk 1992.
44. Karni S.: Network Theory: Analysis and Synthesis. Allyn and Bacon, Inc., Boston 1966.
45. Kimbark E.W.: Direct Current Transmission. J. Wiley, New York 1971.
46. Klinger G.: L-C Kompensation and Symmetrierung für Mehrphasensysteme mit beliebigen Spannungsverlauf. ETZ Archiv, No.2, Feb. 1979, pp.57-61.
47. Krasnosielskij M.A., Lifsic F.A., Sobolew A.W.: Pozitiwnyje liniejnyje sistemy. Nauka, Moskwa 1985.
48. Kudrewicz J.: Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT, Warszawa 1976.
49. Kurbiel A.: Elektrotermiczne urządzenia łukowe. WNT, Warszawa 1988.
50. Kusters N.L.: Moore W.J.M.: On the Definition of Reactive power under Nonsinusoidal Conditions. IEEE Trans. on PAS. Vol.99, 1980, pp.1845-1854.

51. Kuzniecowa B.G.: Kompensacja reaktownej mocy w elektrycznych systemach z niesymetrycznymi obciążeniami. Elektryczność, No. 2, 1984, s.64-67.
52. Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1970.
53. Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.46, Gliwice 1974, ss.7-26
54. Nowomiejski Z.: Generalized Theory of Electric Power. Archiv für Elektrotechnik. No.63, 1981, pp.177-182.
55. Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965.
56. Pasko M., Walczak J.: A synthesis of compensation systems of current reactance component of two terminal receiver with deformed voltage supply. XIV Int. Conf. Math. Opt. Theory and Appl., Eisenach, Dec. 1989, pp.187-190.
57. Pasko M., Walczak J.: Metoda syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.113, Gliwice 1991, ss.95-112.
58. Pasko M., Dybek M.: Komputerowe wyznaczanie struktur dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik liniowy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.122, Gliwice 1991, ss.21-35.
59. Pasko M.: Dobór kompensatorów optymalizujących warunki energetyczne rzeczywistego źródła napięć odkształconych. Materiały XIV SPETO'91, Gliwice-Wisła 1991, ss.129-139.
60. Pasko M.: Dobór dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu źródła napięcia odkształconego okresowego zasilającego odbiornik liniowy. Archiwum Elektrotechniki, t. XLII, z.1-4, Warszawa 1992,ss.73-84.
61. Pasko M.: Optimization of working conditions of the non-sinusoidal periodic real voltage source by means of LC one ports. Archiwum Elektrotechniki, t. XLIII, z.3, Warszawa 1994,pp. 529-536.

62. Pasko M., Walczak J.: A Variable Capacitance Compensator for Minimization of Harmonics in the System under Non-sinusoidal Conditions. Africon'92, Johannesburg, Sept. 1992.
63. Pasko M.: Propozycje modyfikacji układów zasilanych z rzeczywistego źródła jednofazowego napięć niesinusoidalnych w zależności od warunków dla strumienia mocy czynnej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.130, Gliwice 1992, ss.39-56.
64. Pasko M., Grzesik B., Kaczmarczyk Z.: Energoelektroniczna realizacja techniczna dwójnika - ujemnej rezystancji. Materiały XVI SPETO'93, Gliwice-Ustroń 1993, ss.225-232.
65. Pasko M.: Dobór kompensatorów optymalizujących warunki pracy źródeł napięć jednofazowych i wielofazowych z przebiegami okresowymi odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.135, Gliwice 1994 (monografia habilitacyjna).
66. Pasko M.: Modification of three-phase systems with non-sinusoidal waveforms for optimization of source current shape. Archiwum Elektrotechniki, Vol.XLIV, No.1, Warszawa 1995, pp.69-82.
67. Pillet E.: Sur la generalisation de la notion de puissance reactive. RGE, No.5, 1982, pp.317-323.
68. Sharon D.: Reactive Power Definition and Power Factor Improvement in Nonlinear Systems. Proc. IEE, Vol.120, No.6, June, 1973, pp.704-706.
69. Shepherd W., Zakhikhani P.: Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems. Proc. IEE, Vol.119, No.9, Sept. 1972, , pp.1361-1362.
70. Shepherd W., Zakhikhani P.: Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems. Proc. IEE, Vol.120, No.7, July. 1973, , pp.705-706.
71. Siwczyński M.: Teoria mocy układów spróbkowanych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.98, Gliwice 1985, ss.17-28.
72. Siwczyński M.: Optymalizacja warunków energetycznych rzeczywistego źródła napięcia metodami analizy funkcjonalnej. Materiały XIII SPETO'90, Gliwice-Wisła 1990, ss.276-295.

73. Siwczyński M., Kłosiński R.: Algorytmy minimalizacji warunkowej kwadratowych funkcjonalów strat energii w rzeczywistym źródle napięcia. Materiały XIV SPETO'91, Gliwice-Wiśła 1991, ss.85-91.
74. Siwczyński M., Kłosiński R.: The Square Functional of Real Source Power losser Minimizing Algorithms. XIV Nat. Conf. on CAS and Electron. Circ. Waplewo 1991, pp.65-70.
75. Siwczyński M., Pasko M.: Minimization of Losses on the Line of Electrical Transmission. Appl. Math. and Comp. Science, Vol.4, No.1, 1994, pp.29-37.
76. Siwczyński M.: Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych. Politechnika Krakowska, Monografia 183, Kraków 1995.
77. Siwczyński M., Kłosiński R.: Current Waveform Optimization and Synthesis of Correction Network for Voltage Sources. 8-th ISTET'95, Thessaloniki, Grece, 1995.
78. Su K.L.: Teoria układów aktywnych. WNT, Warszawa 1969.
79. Walczak J.: Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym z rzeczywistego źródła napięcia. Materiały XIII SPETO'90, Gliwice-Wiśła 1990, ss.295-308.
80. Walczak J., Pasko M.: Interpolacyjna metoda syntezy funkcji rzeczywistych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.122, Gliwice 1991, ss.7-20.
81. Walczak J.: Optymalizacja warunków pracy rzeczywistych trójfazowych źródeł napięć odkształconych. I . Wyznaczanie prądu aktywnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.122, Gliwice 1991, ss.125-145.
82. Walczak J., Gawłowski A.: Optymalizacja warunków pracy źródła zasilającego odbiorniki połączone równolegle. Materiały XV SPETO'92, Gliwice-Wiśła 1992, ss.489-499.
83. Walczak J.: Optymalizacyjna metoda wyznaczania prądu aktywnego źródła napięcia okresowego niesinusoidalnego o niezerowej impedancji wewnętrznej. Materiały XV SPETO'92, Gliwice-Wiśła 1992, ss.457-464.

84. Walczak J. Optymalizacja energetyczno-jakościowych właściwości obwodów elektrycznych w przestrzeniach Hilberta. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, ser. Elektryka, z.125, Gliwice 1992 (monografia habilitacyjna).
85. Walczak J.: O możliwości pewnego uogólnienia prądu aktywnego w sensie Fryzego. Materiały XVI SPETO'93, Gliwice-Ustroń 1993, ss.401-409.
86. Walczak J.: Optimization of Electrical Systems with Application of Hilbert Space Theory. 7-th Int. Symposium SMC, Zakopane, May 1993, pp.260-264.
87. Walczak J., Pasko M., Dębowski K.: Metoda wyznaczania prądów aktywnych dla pewnej klasy obwodów z przebiegami okresowymi i niesinusoidalnymi. Materiały XVII SPETO'94, Gliwice-Ustroń 1994, ss.135-142.
88. Walczak J., Pasko M.: A New Approach to Optimization of Operating Conditions of Nonsinusoidal Systems. Proc. of PEMC'94, Warszawa, Sept. 1994, pp. 247-251.
89. Walczak J., Pasko M.: Optimization Method of Active Current Determination in the Networks with Nonsinusoidal Waveforms. Proc. of EDPE'94, Kosice, Sept. 1994, pp.116-122.
90. Walczak J., Pasko M.: Minimalizacja strat w jednofazowych torach transmisyjnych przy przebiegach niesinusoidalnych. VI Sympozjum PPEE'95, Ustroń 1995, ss.473-478.
91. Walczak J.: Zastosowanie metod polioptymalizacyjnych do wyznaczania prądów aktywnych. II Konf. EPN'95, Zielona Góra 1995, ss.155-162.
92. Žarkov F.P.: Ob odnom sposobie opriedelenja reaktivnoj moszcznosti. IAN ZSRR, Energetika i Transport, No.2, 1984, c.66-72.
93. Žeżelenko I. W.: Wysszyje garmoniki elektrosnaboženija prompredpriatij. Energoatomizdat, Moskwa 1994.

OPTYMALIZACJA ENERGETYCZNO-JAKOŚCIOWYCH WŁAŚCIWOŚCI OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH Z PRZEBIEGAMI OKRESOWYMI NIESINUSOIDALNYMI

Streszczenie

Monografia przedstawia wyniki kilkuletnich prac autorów dotyczące analizy właściwości energetycznych i jakościowych obwodów z przebiegami okresowymi, niesinusoidalnymi. Na wstępie omówione zostały dwie podstawowe teorie mocy obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi, na bazie których autorzy proponują nową koncepcję analizy takich obwodów pod kątem poprawy ich właściwości energetycznych i jakościowych. Koncepcja ta oparta jest na metodach optymalizacyjnych.

Opis stosowanego w pracy aparatu matematycznego zawarty jest w rozdziale 2. Dalsze rozdziały monografii tworzą dwa bloki tematyczne.

Pierwszy z nich dotyczy zagadnień optymalizacji wartości skutecznych i zniekształceń prądów w obwodach jedno- i wielofazowych. Dla rozpatrywanych w pracy obwodów SLS optymalizację przeprowadza się w dziedzinie częstotliwości. Podejście takie (w przeciwieństwie do analizy czasowej) umożliwiło uzyskiwanie rozwiązań wielu z rozpatrywanych problemów w postaci zamkniętej, dla innych możliwa jest przy tym podejściu konstrukcja efektywnych algorytmów numerycznych służących do ich rozwiązywania. W pracy rozpatrzono (rozd.3, 4) przede wszystkim proste modele układów zawierające źródło energii i odbiornik, tym niemniej opisane metody mogą być stosowane dla układów o złożonej strukturze topologicznej.

W ramach drugiego bloku (rozd.5,6) rozpatrzono zagadnienie realizacji optymalnych punktów pracy obwodów, które określono w rozdziałach 3, 4. Realizację tę przeprowadza się z wykorzystaniem dwu- i wielozaciskowych układów SLS, nazywanych kompensatorami. Centralnym problemem (rozd. 5) jest tu synteza dwójników pasywnych i aktywnych, których charakterystyki częstotliwościowe zadane są w skończonej liczbie punktów. W pierwszej kolejności opisano metodę syntezy pewnej klasy (RLC, $-R^{(1)}$) dwójników aktywnych o prostej realizacji energoelektronicznej. Następnie opisano kilka metod syntezy dwójników pasywnych LC. Na zakończenie pracy (rozd. 6) podano kilka przykładów ilustrujących stosowane metody optymalizacji i syntezy.

Uzupełnienie pracy stanowią dwa aneksy. Pierwszy dotyczy krótkiego przeglądu bardziej znanych teorii mocy obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi. Drugi aneks zawiera propozycje uogólnienia stosowanego w pracy wskaźnika jakości tak, by możliwa była optymalizacja kształtu sygnałów w sposób dowolnie zdefiniowany przez użytkownika.

Wyniki rozważań zawartych w pracy uzupełniono licznymi przykładami ilustrującymi możliwości wprowadzonych przez autorów koncepcji i metod.

THE OPTIMIZATION OF ENERGETICAL-QUALITY PROPERTIES OF ELECTRICAL SYSTEMS WITH PERIODIC NONSINUSOIDAL WAVEFORMS

Summary

The monograph presents results of the authors several years' investigations dealing with power and qualitative properties of nonsinusoidal systems.

The monograph starts with discussing two main power theories for nonsinusoidal systems. Basing on these theories the authors suggest a new conception of analysis for such systems from the point of view of circuit power and qualitative properties improvement.

This conception is based on optimization methods. The description of mathematical methods is presented in Chapter 2. The other monograph chapters can be divided into two topical sections.

The first section deals with optimization problems of rms values and distortions of currents in one- and multi-phase systems. The optimization is made in the frequency domain for the circuits SLS discussed in the monograph. This approach (contrary to analysis in the time domain) makes possible to get solutions in a close form for many presented problems or develop effective numerical algorithm for the others which can be used to solve them.

In the monograph simple circuit models containing the power source and the load are presented (see Chapters 3 and 4) but the described methods can be applied to circuits with complex topological structure as well.

The second section (i.e. Chapters 5 and 6) deals with the problem of realization of optimum operating points of the circuits described in Chapters 3 and 4. This realization is made by means of two and multi terminal circuits SLS called compensators. The main problem (see Chapter 5) is the syntheses of passive and active one-ports whose frequency characteristics are given in a finite number of points. The method of synthesis of active one-ports of class (RLC, $-R^1$) with simple energo-electronic realization is described first. Next a few methods of synthesis of passive one-ports LC are presented. Some examples illustrating the applied methods of optimization and synthesis are given in Chapter 6.

Two appendixes finish the monograph. The first one presents a short review of the well-known power theories of nonsinusoidal systems. The second one gives some suggestions for

generalization of the function of goal used in the monograph so that the optimization of signal shape in the way defined optionally by the user could be possible.

The results of considerations presented in the monograph are supported by many examples showing advantages of the conceptions and the methods introduced by the authors.

P.3347/96/150

0,-
4,-

Książka ta jest wynikiem prac autorów prowadzonych w latach 1987 - 1993 i dotyczących opisu, interpretacji i analizy właściwości energetycznych obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi. Przedstawia ona nowe i oryginalne podejście do teorii mocy obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi, a także zastosowań tej teorii.

Książka ta jest przeznaczona dla studentów i inżynierów kierunków technicznych, a także wszystkich osób zainteresowanych współczesnym podejściem do teorii mocy.



DR HAb INŻ. MARIAN PASKO

jest pracownikiem naukowo-dydaktycznym Instytutu Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Przedmiotem jego zainteresowania są zagadnienia związane z analizą i syntezą obwodów elektrycznych, teorią wrażliwości oraz teorią mocy w układach z przebiegami niesinusoidalnymi. Jest autorem lub współautorem ponad 80 publikacji naukowych z tej tematyki, opublikowanych w kraju i za granicą, a także współautorem 14 skryptów dydaktycznych dla studentów.



DR HAb INŻ. JANUSZ WALCZAK

jest pracownikiem naukowo-dydaktycznym Instytutu Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Zajmuje się głównie teorią mocy obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi, a także analizą i syntezą obwodów elektrycznych. Jest autorem i współautorem ponad 100 publikacji, w większości o zasięgu międzynarodowym, oraz wielu innych opracowań z tych dziedzin.