ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996

Seria: ELEKTRYKA z. 149 Nr kol. 1321

Władysław MIZIA
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

ANALIZA TRANSFORMATORA O DOWOLNEJ LICZBIE UZWOJEŃ CYLINDRYCZNYCH

Streszczenie. Analiza dotyczy transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych jednakowej wysokości, nałożonych na siebie na kolumnie rdzenia magnetycznego. Uwzględniono wzajemne sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia, zależne od prądów we wszystkich uzwojeniach. Wynikiem analizy jest schemat zastępczy transformatora wielouzwojeniowego. Wprowadzono również uproszczone schematy zastępcze, pomijające prąd jałowy i określono ich parametry elektromagnetyczne.

ANALYSIS OF A TRANSFORMER WITH ANY NUMBER OF CYLINDRICAL WINDINGS

Summary. The analysis deals with a transformer with any number of cylindrical windings of the same height which are concentrically placed around the magnetic core column. Mutual linkages between windings by magnetic leakage which depends on currents in all windings have been taken into account. The analysis has resulted in working out of multi-winding transformer equivalent circuit. Simplified eqiuvalent circuits neglecting no-load current have been introduced. Their electromagnetic parameters have been determined as well.

1. WSTĘP

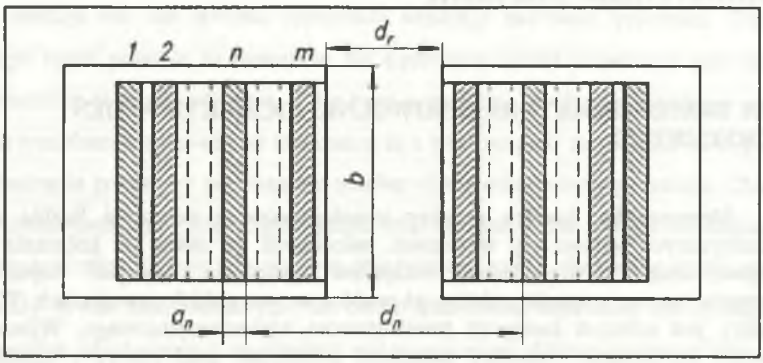
Przedmiotem analizy jest transformator o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych, umieszczonych na kolumnie rdzenia magnetycznego i nałożonych na siebie.

Zakłada się, że:

- uzwojenie zewnętrzne jest uzwojeniem pierwotnym, zasilanym z sieci elektroenergetycznej, natomiast pozostałe to uzwojenia wtórne, do których są przyłączone odbiory - typowy układ uzwojeń dla transformatora obniżającego napięcie,

- uzwojenia mają jednakowe wysokości zbliżone do wysokości kolumny rdzenia magnetycznego.

Przyjmując, że liczba uzwojeń wynosi m, podano na rys. 1 przyjętą numerację uzwojeń, podstawowe wymiary dowolnego n-tego uzwojenia oraz wymiary rdzenia magnetycznego.



Rys. 1. Podstawowe wymiary rdzenia magnetycznego oraz dowolnego n-tego uzwojenia
Fig. 1. Basic dimensions of magnetic core and n-th winding

Rezystancja dowolnego n-tego uzwojenia cylindrycznego

$$R_n = k_n \frac{z_n l_n}{\gamma S_n} \tag{1}$$

przy czym:

k_n - współczynnik powiększenia się rezystancji przy przepływie prądu przemiennego,

$l_n = \pi(d_n + a_n)$ - średnia długość zwoju,

γ, z_n, S_n - konduktywność, liczba zwojów, przekrój poprzeczny przewodu nawojowego.

Z podziału pola magnetycznego wytworzonego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia na pole:

- główne, którego linie zamykają się w rdzeniu magnetycznym,
- rozproszenia, którego linie w strefie uzwojenia przechodzą poza rdzeniem magnetycznym,

wynika, że indukcyjność własna n-tego uzwojenia

$$L_n = L_{nFe} + L_{n\sigma}. \tag{2}$$

Składowa indukcyjności własnej, wynikająca z pola głównego

$$L_{nFe} = z_n^2 \Lambda_{Fe}. \tag{3}$$

Składowa indukcyjności własnej, wynikająca z pola rozproszenia

$$L_{n\sigma} = z_n^2 \Lambda_{n\sigma}. \tag{4}$$

Permeancję $\Lambda_{n\sigma}$ określa się przyjmując, że rdzeń magnetyczny

- ma względną przenikalność magnetyczną $\mu = \infty$, tzn. pomijając spadek napięcia magnetycznego wzdłuż części linii pola magnetycznego w rdzeniu magnetycznym,
- pokrywa uzwojenia w częściach czołowych.

Na podstawie analizy szczegółowej podanej w pracy [3] permeancja

$$\Lambda_{n\sigma} = \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_n l_n}{3} - \frac{\pi a_n^2}{6} + \frac{\pi}{4}(d_n^2 - d_r^2)\right] \tag{5}$$

przy czym b, a_n, d_n, d_r podano na rys. 1.

Z podziału pola magnetycznego na pole główne i rozproszenia wynika, że indukcyjność wzajemna między k-tym a n-tym ($k \neq n$) uzwojeniem

$$M_{kn} = M_{knFe} + M_{kn\sigma}, \tag{6}$$

przy czym:

- składowa indukcyjności wzajemnej wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole główne

$$M_{knFe} = z_k z_n \Lambda_{Fe}, \tag{7}$$

- składowa indukcyjności wzajemnej wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole rozproszenia

$$M_{kn\sigma} = z_k z_n \Lambda_{kn\sigma}. \tag{8}$$

Permeancję $\Lambda_{kn\sigma}$ określa się przyjmując takie same założenia jak przy określeniu permeancji $\Lambda_{n\sigma}$.

Zgodnie z pracą [3] permeancja $\Lambda_{kn\sigma}$ zależy od wymiarów (d_k, b) rdzenia magnetycznego i wymiarów uzwojenia wewnętrznego.

Dla przyjętej (rys. 1) numeracji uzwojeń

– dla $k > n$ permeancja

$$\Lambda_{kn\sigma} = \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_k l_k}{2} - \frac{\pi a_k^2}{6} + \frac{\pi}{4}(d_n^2 - d_r^2)\right], \tag{9a}$$

– dla $k < n$ permeancja

$$\Lambda_{kn\sigma} = \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_n l_n}{2} - \frac{\pi a_n^2}{6} + \frac{\pi}{4}(d_n^2 - d_r^2)\right], \tag{9b}$$

przy czym:

b, a_n, d_n, d_r - podano na rys. 1,

a_k, d_k, l_k - grubość, średnica wewnętrzna i średnia długość zwoju k-tego uzwojenia.

Składowa indukcyjności wzajemnej, wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia, zależy więc od iloczynu liczby zwojów uzwojeń, wymiarów rdzenia magnetycznego i wymiarów uzwojenia wewnętrznego. Ze stwierdzenia tego wynika, że

– dla $k > n$

$$M_{kn\sigma} = M_{k(n-c)\sigma}\frac{z_n}{z_{(n-c)}}, \tag{10a}$$

przy czym:

$c = 1, \ldots\ldots k - 1,$

– dla $k < n$

$$M_{kn\sigma} = M_{(k-c)n\sigma}\frac{z_k}{z_{(k-c)}}, \tag{10b}$$

przy czym:

$c = 1, \ldots\ldots k - 1.$

Zależności (9), (10) określają charakterystyczną cechę dotyczącą indukcyjności wzajemnej uzwojeń cylindrycznych nałożonych na siebie na kolumnie rdzenia magnetycznego. Zależności te pozwalają na przejrzyste ujęcie wpływu wzajemnych sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia na schemat zastępczy transformatora i jego parametry. W analizie przyjmuje się, że transformator jest elementem liniowym.

Indukcyjności wzajemne uzwojeń spełniają zależności

$$M_{kn} = M_{nk}, \qquad M_{knFe} = M_{nkFe}, \qquad M_{kn\sigma} = M_{nk\sigma}. \tag{11}$$

2. RÓWNANIA OGÓLNE – SCHEMAT ZASTĘPCZY

Napięcie zasilania transformatora ma zwykle znamionową częstotliwość, a jego wartość jest zbliżona do napięcia znamionowego uzwojenia pierwotnego. W tych warunkach zasilania można przyjąć, że transformator jest elementem liniowym. Dodatkowo pomija się straty w rdzeniu magnetycznym, w izolacji oraz pojemności międzyzwojowe i międzyuzwojeniowe, ponieważ zagadnienia strat i przepięć nie są przedmiotem analizy teoretycznej. Przyjmując, że:

- uzwojenie zewnętrzne o numerze $n = 1$ (rys. 1) jest uzwojeniem pierwotnym,
- uzwojenia wewnętrzne o numerach $n = 2, 3, \ldots, m$ są uzwojeniami wtórnymi,

równanie sił magnetomotorycznych transformatora w stanie obciążenia określa zależność

$$i_{10}z_1 = i_1 z_1 - \sum_{n=2}^{m} i_n z_n. \tag{12}$$

Napięcie zasilania uzwojenia pierwotnego

$$u_1 = R_1 z_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}, \tag{13}$$

a siła elektromotoryczna indukowana w dowolnym k-tym uzwojeniu wtórnym

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = R_k i_k + u_k. \tag{14}$$

Strumień sprzężony z uzwojeniem pierwotnym

$$\Psi_1 = (L_{1Fe} + L_{1\sigma}) i_1 - \sum_{n=2}^{m} (M_{1nFe} + M_{1n\sigma})\, i_n. \tag{15}$$

Z równania (11) wynika, że

$$i_1 = i_{10} + \sum_{n=2}^{m} i'_n, \tag{16}$$

przy czym

$$i'_n = \frac{z_n}{z_1} i_n. \tag{17}$$

Po wprowadzeniu zależności (16) do równania (15) i uwzględnieniu zależności (3) i (7) strumień sprzężony z uzwojeniem pierwotnym

$$\Psi_1 = L_{1Fe} i_{10} + L_{1\sigma} i_1 - \sum_{n=2}^{m} \frac{z_1}{z_n} M_{1n\sigma}\, i'_n . \tag{18}$$

Strumień sprzężony z dowolnym k-tym uzwojeniem wtórnym

$$\Psi_k = (M_{1kFe} + M_{1k\sigma})\, i_1 - (L_{kFe} + L_{k\sigma})\, i_k - \sum_{n=2}^{k-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})\, i_n - \sum_{n=k+1}^{m} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})\, i_n . \tag{19}$$

Z równania (12) wynika, że

$$i_k = (i_1 - i_{10}) \frac{z_1}{z_k} - \sum_{n=2}^{k-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=k+1}^{m} \frac{z_n}{z_k} i_n \tag{20}$$

i po wykorzystaniu tej zależności i uwzględnieniu wyrażeń (3) i (7) strumień sprzężony

$$\Psi_k = M_{1kFe}\, i_{10} + M_{1k\sigma}\, i_1 - L_{k\sigma}\, i_k - \sum_{n=2}^{m} M_{nk\sigma}\, i_n - \sum_{n=k+1}^{m} M_{nk\sigma}\, i_n . \tag{21}$$

Po wprowadzeniu wyrażeń (17), (18) do równania (13) napięcie zasilania strony pierwotnej

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{1Fe} \frac{di_{10}}{dt} + L_{1\sigma} \frac{di_1}{dt} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{z_1}{z_n} M_{1n\sigma} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_1}{z_m} M_{1m} \frac{di'_m}{dt} . \tag{22}$$

Z wyrażenia (16) wynika, że

$$i'_m = i_1 - i_{10} - \sum_{n=2}^{m-1} i'_n . \tag{23}$$

Wprowadzając zależność (23) do równania (22) otrzymuje się

$$u_1 = R_1 i_1 + (L_{1\sigma} - \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}) \frac{di_1}{dt} + e_1 + (L_{1Fe} + \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}) \frac{di_{10}}{dt} , \tag{24}$$

przy czym

$$e_1 = \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma} \sum_{n=2}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{z_1}{z_n} M_{1n\sigma} \frac{di'_n}{dt} . \tag{25}$$

Po wprowadzeniu wyrażeń (16), (17) do równania (19) i uwzględnieniu zależności (3) i (7) strumień sprzężony

$$\Psi_k = M_{1kFe}\, i_{10} + M_{1k\sigma}\, i_1 - \frac{z_1}{z_k} L_{k\sigma}\, i'_k - \sum_{n=2}^{k-1} \frac{z_1}{z_n} M_{nk\sigma}\, i'_n - \sum_{n=k+1}^{m} \frac{z_1}{z_n} M_{nk\sigma}\, i'_n, \tag{26}$$

przy czym

$$i'_k = \frac{z_k}{z_1} i_k. \tag{27}$$

Po wprowadzeniu zależności (26), (27) do równania (14) otrzymuje się

$$u_k = M_{1kFe} \frac{di_{10}}{dt} + M_{1k\sigma} \frac{di_1}{dt} - \frac{z_1}{z_k} L_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - \frac{z_1}{z_k} R_k i'_k - \sum_{n=2}^{k-1} \frac{z_1}{z_n} M_{nk\sigma} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{m} \frac{z_1}{z_n} M_{nk\sigma} \frac{di'_n}{dt}. \tag{28}$$

Jeżeli równanie (28) pomnożymy przez z_1 / z_k, co oznacza sprowadzenie k-tej strony wtórnej do strony pierwotnej, wówczas po uwzględnieniu zależności (3), (7) otrzymuje się

$$\begin{aligned} u'_k = {} & L_{1Fe} \frac{di_{10}}{dt} + \frac{z_1}{z_k} M_{1k\sigma} \frac{di_1}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k - \frac{z_1^2}{z_k} \sum_{n=2}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \frac{di'_n}{dt} \\ & - \frac{z_1^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_1^2}{z_k} \frac{M_{mk}}{z_m} \frac{di'_m}{dt}, \end{aligned} \tag{29}$$

przy czym

$$\begin{aligned} u'_k &= \frac{z_1}{z_k} u_k, \\ L'_k &= \left(\frac{z_1}{z_k}\right)^2 L_k, \\ R'_k &= \left(\frac{z_1}{z_k}\right)^2 R_k. \end{aligned} \tag{30}$$

Na podstawie zależności (10a)

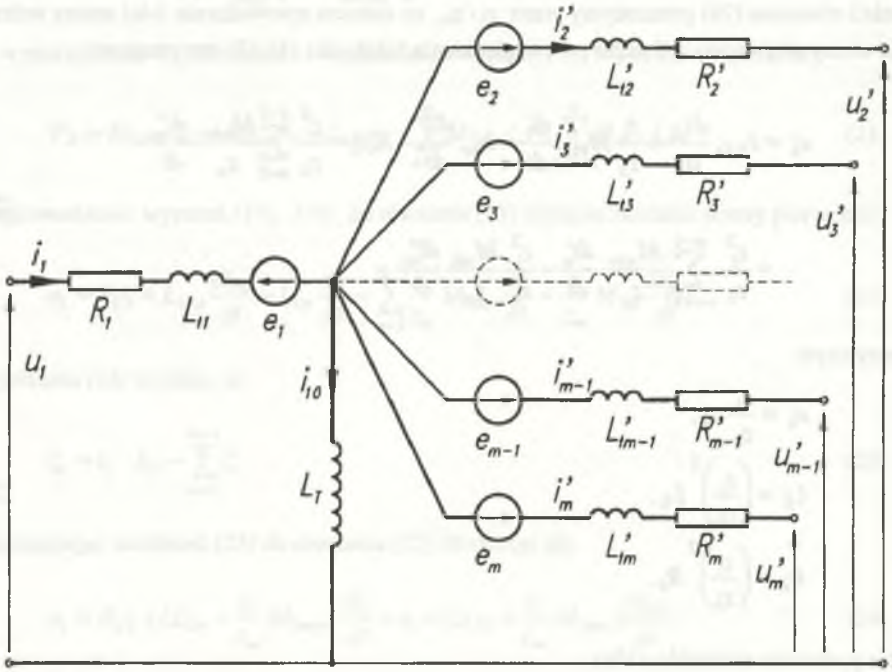
$$\frac{z_1^2}{z_k} \frac{M_{nk\sigma}}{z_m} = \frac{z_1^2}{z_k} \frac{M_{1m\sigma}}{z_m} \frac{z_k}{z_1} = \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}. \tag{31}$$

Po wprowadzeniu zależności (23), (31) do równania (29) otrzymuje się

$$u'_k = (L_{1Fe} + \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}) \frac{di_{10}}{dt} + e_k - (L'_{k\sigma} - \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k , \tag{32}$$

przy czym

$$e_k = (\frac{z_1}{z_k} M_{1k\sigma} - \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}) \frac{di_1}{dt} + \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma} \sum_{n=2}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_1^2}{z_k} \sum_{n=2}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \frac{di'_n}{dt} +$$
$$+ \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_1^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \frac{di'_n}{dt} . \tag{33}$$



Rys. 2. Schemat zastępczy transformatora m-uzwojeniowego, w którym strony wtórne sprowadzono na stronę pierwotną, którą stanowi uzwojenie zewnętrzne

Fig. 2. Equivalent circuit of m-winding transformer whose secondary sides are referred to a primary side which is the outer winding.

Równaniom (16), (24), (32) odpowiada schemat zastępczy transformatora m-uzwojeniowego (rys. 2), w którym:

- stronę pierwotną stanowi uzwojenie zewnętrzne,
- strony wtórne zostały sprowadzone na stronę pierwotną.

W schemacie zastępczym (rys. 2) siłę elektromotoryczną

- e_1 określa wyrażenie (25),
- e_k określa wyrażenie (33),

natomiast indukcyjność

$$L_T = L_{1Fe} + \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}, \tag{34}$$

$$L_{t1} = L_{1\sigma} - \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}, \tag{35}$$

$$L'_{tk} = L'_{k\sigma} - \frac{z_1}{z_m} M_{1m\sigma}, \tag{36}$$

przy czym

$$k = 2, 3, \ldots\ldots, m.$$

Wprowadzony schemat zastępczy transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych nałożonych na siebie na kolumnie rdzenia magnetycznego uwzględnia wzajemne sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia. Sprzężenia te są zależne od prądów we wszystkich uzwojeniach i powodują wzajemne oddziaływanie na siebie stron wtórnych przy zmianach ich prądów obciążenia. Wpływ wzajemnych sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia pogarsza właściwości eksploatacyjne transformatora, w szczególności przy dużej liczbie uzwojeń. Z tych powodów rzadko stosuje się transformatory jedno- lub trójfazowe o liczbie uzwojeń $m > 3$. Wprowadzony schemat zastępczy stanowi podstawę analizy właściwości transformatora w stanie ustalonym i nieustalonym. Ilościowa analiza wymaga znajomości parametrów elektromagnetycznych - rezystancji i indukcyjności - schematu zastępczego.

3. PARAMETRY UPROSZCZONYCH SCHEMATÓW ZASTĘPCZYCH WYBRANYCH TRANSFORMATORÓW WIELOUZWOJENIOWYCH

Ustalenie zależności parametrów schematu zastępczego transformatora wielouzwojeniowego od danych dotyczących uzwojeń i rdzenia magnetycznego pozwala na takie ich kształtowanie, by transformator spełniał określone wymagania, dotyczące np. zmian napięć stron wtórnych, prądów zwarcia. Celowe jest określenie takich zależności dla wybranych, najczęściej stosowanych rozwiązań transformatorów wielouzwojeniowych. Na ogół z wystarczającą dokładnością można posługiwać się parametrami uproszczonych schematów zastępczych, wynikających z pominięcia prądu jałowego.

Uproszczone schematy zastępcze i ich parametry określa się na podstawie zależności podanych w p. 1, 2, uwzględniając, że przy pominięciu prądu jałowego, zgodnie z wyrażeniem (12)

$$i_1 = \sum_{n=2}^{m} \frac{z_n}{z_1} i_n = \sum_{n=2}^{m} i'_n . \tag{37}$$

Dla transformatora dwuuzwojeniowego ($m = 2$, $k = 2$), korzystając z zależności (24), (25), (32), (33), (37), otrzymuje się

$$i_1 = i'_2 = i , \tag{38}$$

$$u_1 - u'_2 = R_1 i_1 + L_{t1} \frac{di}{dt} + R'_2 i + L'_{t1} \frac{di}{dt} + R_z i + L_z \frac{di}{dt} , \tag{39}$$

przy czym

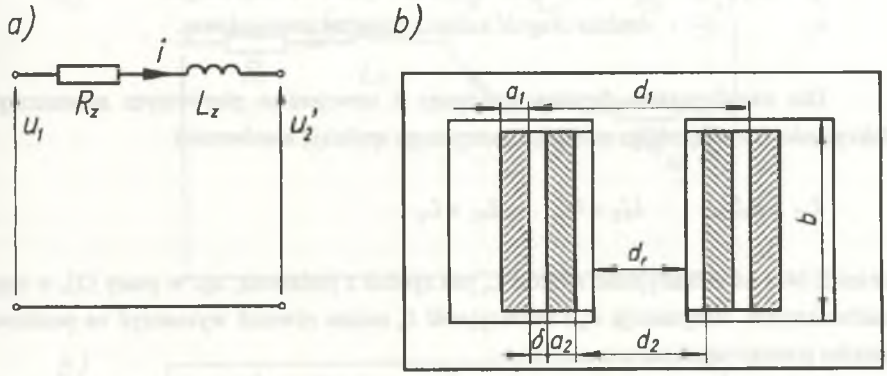
$$R'_2 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 R_2 , \qquad L'_{2\sigma} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 L_{2\sigma} , \qquad i'_2 = \frac{z_2}{z_1} i_2 , \tag{40}$$

$$L_{t1} = L_{1\sigma} - \frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} , \qquad L'_{t2} = L'_{2\sigma} - \frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} , \tag{41}$$

$$R_z = R_1 + R'_2 \quad \text{- rezystancja zwarcia,} \tag{42}$$

$$L_z = L_{t1} + L'_{t2} = L_{1\sigma} + L'_{2\sigma} - 2\frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} \quad \text{- indukcyjność zwarcia.} \tag{43}$$

Równaniom (37), (38) odpowiada schemat zastępczy przedstawiony na rys. 3a.



Rys. 3. Transformator dwuuzwojeniowy: a) uproszczony schemat zastępczy, b) wymiary geometryczne uzwojeń i rdzenia magnetycznego

Fig. 3. Two-winding transformers: a) simplified equivalent circuit, b) dimensions of windings and a magnetic core

Przyjmując dla transformatora dwuuzwojeniowego oznaczenia wymiarów geometrycznych uzwojeń i rdzenia magnetycznego jak na rys. 3 b i korzystając z zależności (4), (5), (8), (9a), (41), (43), po uwzględnieniu, że

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) = a_2 l_2 + \delta l_\delta$$

otrzymuje się

$$L_{r1} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_1 l_1}{3} + \frac{a_2 l_2}{2} + \delta l_\delta - \frac{\pi}{6}(a_1^2 - d_2^2)\right],$$

$$L'_{r2} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left(\frac{a_2 l_2}{6}\right) < 0, \tag{44}$$

$$L_z = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_1 l_1}{3} + \frac{a_2 l_2}{3} + \delta l_\delta - \frac{\pi}{6}(a_1^2 - a_2^2)\right],$$

przy czym:

a_1, a_2 - podano na rys. 3 b,

$l_1 = \pi(d_1 + a_1)$ - średnia długość zwoju uzwojenia zewnętrznego (pierwotnego),

$l_2 = \pi(d_2 + a_2)$ - średnia długość zwoju uzwojenia wewnętrznego,

l_δ - średnia długość szczeliny międzyuzwojeniowej.

Dla transformatora dwuuzwojeniowego z uzwojeniem pierwotnym zewnętrznym indukcyjności uproszczonego schematu zastępczego spełniają nierówności

$$L_{t1} > |L'_{t2}|, \qquad L'_{t2} < 0, \qquad L_{t1} > L_z.$$

Zależność (44) na indukcyjność zwarcia L_z jest zgodna z podawaną, np. w pracy [2], w teorii transformatorów. Rezystancję R_z i indukcyjność L_z można również wyznaczyć na podstawie wyników pomiarowych stanu zwarcia.

Dla transformatora trójuzwojeniowego (m =3, k = 2, 3), korzystając z zależności (25), (33), (37) otrzymuje się:

$$i_1 = i'_2 + i'_3, \tag{45}$$

$$e_1 = (\frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma} - \frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma}) \frac{di'_2}{dt},$$

$$e_2 = (\frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} - \frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma}) \frac{di_1}{dt}, \tag{46}$$

$$e_3 = 0.$$

Po wprowadzeniu zależności (45), (46) do równań (24), (32) różnica napięć

$$u_1 - u'_2 = R_1 i_1 + L_{t1} \frac{di_1}{dt} + L'_{t2} \frac{di'_2}{dt} + R'_2 i'_2, \tag{47}$$

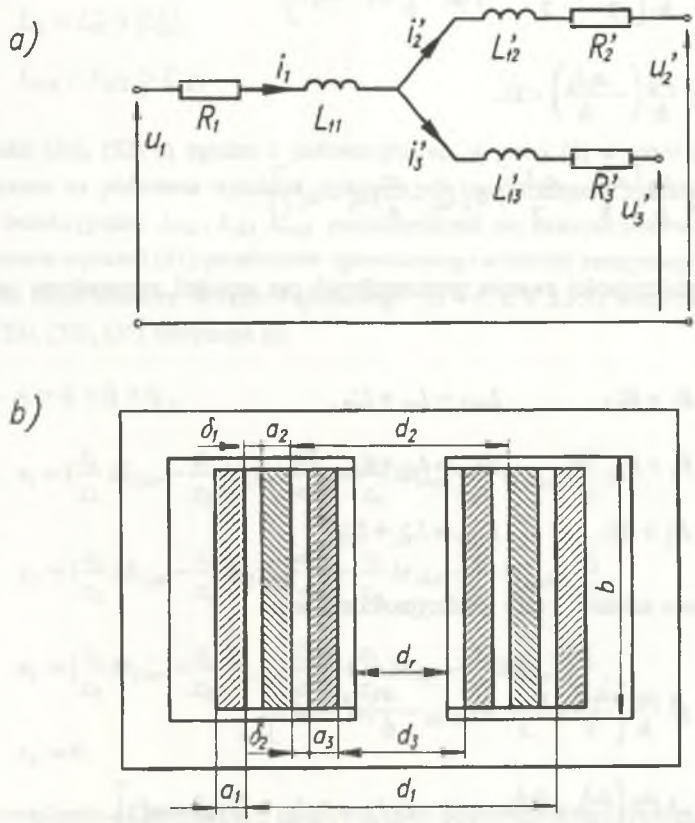
$$u_1 - u'_3 = R_1 i_1 + L_{t1} \frac{di_1}{dt} + L'_{t3} \frac{di'_3}{dt} + R'_3 i'_3, \tag{48}$$

przy czym

L_{t1}, L'_{t2} - określa zależność (41),

$$L'_{t3} = L'_{3\sigma} + \frac{z_1}{z_2} M_{12} - 2\frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma}. \tag{49}$$

Równaniom (45), (47), (48) odpowiada schemat zastępczy przedstawiony na rys. 4 a.



Rys. 4. Transformator trójuzwojeniowy: a) uproszczony schemat zastępczy, b) wymiary geometryczne uzwojeń i rdzenia magnetycznego

Fig. 4. Three-winding transformer: a) simplified equivalent circuit, b) dimensions of windings and a magnetic core.

Przyjmując oznaczenia wymiarów geometrycznych uzwojeń i rdzenia magnetycznego jak na rys. 4 b i korzystając z zależności (4), (5), (8), (9), (41), (49), po uwzględnieniu, że

$$\frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2) = a_2 l_2 + \delta_1 l_{\delta 1},$$

$$\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_3^2) = a_3 l_3 + \delta_2 l_{\delta 2},$$

otrzymuje się:

$$L_{t1} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_1 l_1}{3} + \frac{a_2 l_2}{2} + \delta_1 l_{\delta 1} - \frac{\pi}{6}(a_1^2 - a_2^2)\right],$$

$$L'_{t2} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left(-\frac{a_2 l_2}{6}\right) < 0, \tag{50}$$

$$L_{t3} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_3 l_3}{3} + \frac{a_2 l_2}{2} + \delta_2 l_{\delta 2} - \frac{\pi}{6}(a_2^2 - a_3^2)\right].$$

Rezystancje i indukcyjności zwarcia poszczególnych par uzwojeń sprowadzone na stronę pierwotną

$$R_{z12} = R_1 + R'_2, \qquad L_{z12} = L_{t1} + L'_{t2},$$

$$R_{z13} = R_1 + R'_3, \qquad L_{z13} = L_{t1} + L'_{t3}, \tag{51}$$

$$R_{z23} = R'_2 + R'_3, \qquad L_{z23} = L'_{t2} + L'_{t3},$$

a po uwzględnieniu zależności (50) indukcyjności zwarcia

$$L_{z12} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_1 l_1}{3} + \frac{a_2 l_2}{3} + \delta_1 l_{\delta 1} - \frac{\pi}{6}(a_1^2 - a_2^2)\right],$$

$$L_{z13} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_1 l_1}{3} + \frac{a_3 l_3}{3} + a_2 l_2 + \delta_1 l_{\delta 1} + \delta_2 l_{\delta 2} - \frac{\pi}{6}(a_1^2 - a_3^2)\right], \tag{52}$$

$$L_{z23} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_2 l_2}{3} + \frac{a_3 l_3}{3} + \delta_2 l_{\delta 2} - \frac{\pi}{6}(a_2^2 - a_3^2)\right],$$

przy czym:

a_3, δ_1, δ_2 - podano na rys. 4 b,

$l_3 = \pi(d_3 + a_3)$ - średnia długość zwoju uzwojenia wewnętrznego,

$l_{\delta 1}$, $l_{\delta 2}$ - średnia długości szczelin międzyuzwojeniowych.

Dla transformatora trójuzwojeniowego indukcyjność $L'_{t2} < 0$, a ponadto indukcyjności uproszczonego schematu zastępczego spełniają nierówności

$$L_{t1} > L'_{t3} > |L'_{t2}|,$$

$$L_{z13} > L_{z12} > L_{z23}.$$

Zależności (50), (52) są zgodne z podawanymi np. w pracy [2] w teorii transformatorów. Wyznaczone na podstawie wyników pomiarowych stanów zwarcia rezystancje R_{z12}, R_{z13}, R_{z23}, i indukcyjności L_{z12}, L_{z13}, L_{z23} poszczególnych par uzwojeń pozwalają na obliczenie na podstawie wyrażeń (51) parametrów uproszczonego schematu zastępczego.

Dla transformatora czterouzwojeniowego (m = 4, k = 2,3,4) korzystając z zależności (10b), (25), (33), (37) otrzymuje się

$$i_1 = i'_2 + i'_3 + i'_4, \tag{53}$$

$$e_1 = (\frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma} - \frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma}) \frac{di'_2}{dt} + (\frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma} - \frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma}) \frac{di'_3}{dt},$$

$$e_2 = (\frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} - \frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma}) \frac{di_1}{dt} + (\frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma} - \frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma}) \frac{di'_3}{dt}, \tag{54}$$

$$e_3 = (\frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma} - \frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma}) \frac{di_1}{dt} + (\frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma} - \frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma}) \frac{di'_3}{dt},$$

$$e_4 = 0.$$

Po wprowadzeniu zależności (41), (49), (53), (54) do równań (24), (32) różnica napięć

$$u_1 - u'_2 = R_1 i_1 + L_{t1} \frac{di_1}{dt} + L'_{t2} \frac{di'_2}{dt} + R'_2 i'_2, \tag{55}$$

$$u_1 - u'_3 = R_1 i_1 + L_{t1} \frac{di_1}{dt} + L'_{t3} \frac{di'_3}{dt} + R'_3 i'_3 + e'_4, \tag{56}$$

$$u_1 - u'_4 = R_1 i_1 + L_{t1} \frac{di_1}{dt} + L'_{t4} \frac{di'_4}{dt} + R'_4 i'_4 + e'_3, \tag{57}$$

przy czym L_{t1}, L'_{t2}, L'_{t3} - określają zależności (41), (49), (50).

$$L'_{t4} = L'_{4\sigma} + \frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} - 2\frac{z_1}{z_4} M_{14\sigma}, \tag{58}$$

$$e'_3 = M'_\sigma \frac{di'_3}{dt}, \tag{59}$$

$$e'_4 = M'_\sigma \frac{di'_4}{dt}, \tag{60}$$

$$M' = \frac{z_1}{z_2} M_{12\sigma} - \frac{z_1}{z_3} M_{13\sigma}. \tag{61}$$

Równaniom (53), (55), (56), (57) odpowiada schemat zastępczy przedstawiony na rys. 5 a.

Przyjmując oznaczenia wymiarów geometrycznych uzwojeń i rdzenia magnetycznego jak na rys. 5 b i korzystając z zależności (4), (5), (8), (9a), (58), (61), po uwzględnieniu, że

$$\frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_4^2) = a_3 l_3 + a_4 l_4 + \delta_2 l_{\delta 2} + \delta_3 l_{\delta 3}.$$

otrzymuje się:

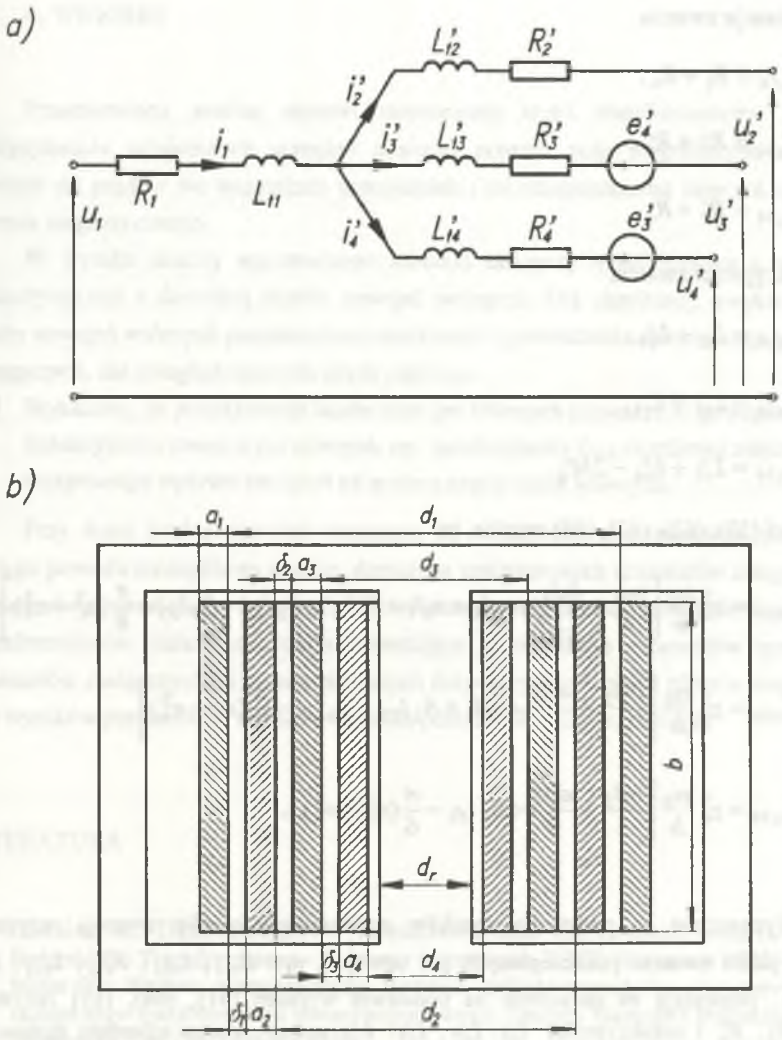
$$L'_{t4} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_4 l_4}{3} + \frac{a_2 l_2}{2} + a_3 l_3 + \delta_2 l_{\delta 3} + \delta_3 l_{\delta 3} - \frac{\pi}{6}(a_2^2 - a_4^2)\right], \tag{62}$$

$$M'_\sigma = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_2 l_2}{2} + \frac{a_3 l_3}{3} + a_3 l_3 + \delta_2 l_{\delta 2} - \frac{\pi}{6}(a_2^2 - a_3^2)\right]. \tag{63}$$

Dla transformatora czterouzwojeniowego indukcyjność $L'_{t2} < 0$, a ponadto indukcyjności uproszczonego schematu zastępczego spełniają nierówności

$$L_{t1} > L'_{t3} > L'_{t4} > |L'_{t2}|,$$

$$L_{z13} > L_{z12} > L_{z23}.$$



Rys. 5. Transformator czterouzwojeniowy: a) uproszczony schemat zastępczy, b) wymiary geometryczne uzwojeń i rdzenia magnetycznego

Fig. 5. Four-winding transformer: a) simplified equivalent circuit, b) dimensions of windings and a magnetic core

Dla transformatora czterouzwojeniowego obowiązują zależności (51), (52), natomiast dla pozostałych par uzwojeń sprowadzone na stronę pierwotną

– rezystancje zwarcia

$$R_{z14} = R_1 + R_4',$$

$$R_{z24} = R_2' + R_4', \tag{64}$$

$$R_{z34} = R_3' + R_4',$$

– indukcyjności zwarcia

$$L_{z14} = L_{t1} + L_{t4}',$$

$$L_{z24} = L_{t2}' + L_{t4}', \tag{65}$$

$$L_{z34} = L_{t3}' + L_{t4}' - 2M_{\sigma}'.$$

Z zależności (50), (62), (63), (65) wynika, że

$$L_{z14} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_1 l_1}{3} + \frac{a_4 l_4}{3} + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \delta_1 l_{\delta 1} + \delta_2 l_{\delta 2} + \delta_3 l_{\delta 3} - \frac{\pi}{6}(a_1^2 - a_4^2)\right],$$

$$L_{z24} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_2 l_2}{3} + \frac{a_4 l_4}{3} + a_3 l_3 + \delta_2 l_{\delta 2} + \delta_3 l_{\delta 3} - \frac{\pi}{6}(a_2^2 - a_4^2)\right], \tag{66}$$

$$L_{z34} = z_1^2 \frac{\mu_0}{b}\left[\frac{a_3 l_3}{3} + \frac{a_4 l_4}{3} + \delta_3 l_{\delta 3} - \frac{\pi}{6}(a_3^2 - a_4^2)\right].$$

Wyznaczone na podstawie wyników pomiarowych stanów zwarcia rezystancje i indukcyjności zwarcia poszczególnych par uzwojeń, np.: R_{z12}, L_{z12}, R_{z13}, L_{z13}, R_{z14}, L_{z14}, R_{z23}, pozwalają na obliczenie na podstawie wyrażeń (51), (64), (65) rezystancji R_1, R_2', R_3', R_4' i indukcyjności L_{t1}, L_{t2}', L_{t3}', L_{t4}' uproszczonego schematu zastępczego transformatora czterouzwojeniowego.

Jeżeli dodatkowo na podstawie wyników pomiarów w stanie zwarcia zostanie wyznaczona indukcyjność L_{z34}, wówczas przy znanych indukcyjnościach L_{t3}', L_{t4}' można na podstawie zależności (65) określić indukcyjność M_{σ}'. Postępując analogicznie jak w rozpatrywanych przypadkach można określić uproszczone schematy zastępcze oraz ich parametry dla transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń wtórnych.

4. WNIOSKI

Przedstawiona analiza stanowi rozszerzenie teorii transformatorów w zakresie uwzględnienia wzajemnych sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia zależnie od prądów we wszystkich uzwojeniach i od rozmieszczenia uzwojeń na kolumnie rdzenia magnetycznego.

W wyniku analizy wprowadzono schemat zastępczy transformatora z uzwojeniami cylindrycznymi o dowolnej liczbie uzwojeń wtórnych. Dla określonej, zwykle spotykanej liczby uzwojeń wtórnych przedstawiono możliwość wprowadzenia uproszczonych schematów zastępczych, nie uwzględniających prądu jałowego.

Wykazano, że powiększenie liczby uzwojeń wtórnych prowadzi do powiększenia:

- indukcyjności zwarcia par uzwojeń, np.: indukcyjności L_{z14} określonej zależnością (66),
- wzajemnego wpływu obciążeń na zmiany napięć stron wtórnych.

Przy dużej liczbie uzwojeń pogarszają się właściwości eksploatacyjne transformatora i z tego powodu szczegółową analizę, dotyczącą uproszczonych schematów zastępczych i ich parametrów, ograniczono do transformatorów dwu-, trój- i czterouzwojeniowych. Dla tych transformatorów podano zależności pozwalające na określenie parametrów uproszczonych schematów zastępczych na podstawie danych dotyczących uzwojeń i rdzenia magnetycznego lub wyników pomiarów w stanie zwarcia dla poszczególnych par uzwojeń.

LITERATURA

1. Jabłoński M.: Transformatory. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
2. Jezierski E.: Transformatory - podstawy teoretyczne. WNT, Warszawa 1975.
3. Mizia W.: Wpływ rozmieszczenia uzwojeń cylindrycznych na parametry schematu zastępczego transformatora dwuuzwojeniowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" nr 138, Gliwice 1994.
4. Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI Opole

Wpłynęło do Redakcji dnia 1 grudnia 1995 r.

Abstract

The analysis deals with a transformer with any number of cylindtical windings of the same height which are concentrically placed around the magnetic core column. It has been assumed that the outer winding is a primary one and it is supplied. The other windings are secondary ones andthey are loaded. The analysis takes into account mutual linkage by magnetic leakage which depends on currents in all windings and arrangement of windings around the magnetic core column. The equivalent circuit of a transformer with any number of cylindrical windings has been introduced. Its parameters have been determined as well. Simplified equivalent circuits neglecting no-load current for typical number of secondary windings have been presented. It has been proved that increase in number of secondary windings is followed by increase in:

- short-circuit inductance of the pairs of windings,
- mutual influence of loads on changes of the secondary side voltages.

The detailed analysis dealing with simplified equivalent circuits and their parameters has been carried out for two-, three- and four-winding transformers.