ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996

Seria: ELEKTRYKA z. 149 Nr kol. 1321

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

Adam KURZYŃSKI
Zakład Pomiarowo-Badawczy Energetyki
Energopomiar-Elektryka, Gliwice

O MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA FUNKCJI WALSHA DWÓCH ZMIENNYCH DO OPISU PÓL MAGNETYCZNYCH W SZCZELINIE POWIETRZNEJ MASZYN ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. W artykule 2-wymiarowe funkcje Walsha wykorzystano do analizy rozkładów czasowo-przestrzennych pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyn elektrycznych. Zaproponowano graficzną reprezentację pola magnetycznego w postaci wykresów płaszczyznowych.

POSSIBILITY OF APPLYING 2 - DIMENSIONAL WALSH FUNCTIONS TO DESCRIPTION OF MAGNETIC FIELDS IN THE AIR GAP OF ELECTRICAL MACHINES

Summary. In the paper 2-dimensional Walsh functions have been applied to analyse space-time distribution of magnetic field in the air gap of an electricl machine. A graphic representation of magnetic field in form of the so - called plane pattern has been proposed.

1. FUNKCJE WALSHA I ICH WŁASNOŚCI

Każdą funkcję f(x) całkowalną z kwadratem o okresie T można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu funkcji, tworzących ortonormalną rodzinę zupełną. Jedną z takich rodzin zupełnych stanowi rodzina funkcji Walsha. Tworzy je ciąg fal prostokątnych

o jednakowych wysokościach, określonych wartością (+1) lub (-1). Przebieg kilku początkowych funkcji Walsha w tzw. uporządkowaniu sekwencyjnym (lub inaczej - w uporządkowaniu wg Walsha) przedstawiono na rys 1.

Funkcję f(x) rozwija się w szereg Walsha w następujący sposób:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, wal(m,x) \tag{1}$$

gdzie: m - wskaźnik uporządkowania funkcji Walsha.
Współczynnik a_m dla m-tej funkcji Walsha oblicza się wg wzoru:

$$a_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) wal(m,x) dx \, . \tag{2}$$

Zbiór tych współczynników dla $m = 0,1,2,3,\ldots$ tworzy tzw. widmo sekwencyjne.

Funkcje Walsha zapisuje się często, rozdzielając je na dwie podgrupy. Pierwsza podgrupa, obejmująca funkcje nieparzyste, oznaczana jest symbolem $sal(k,x)$, natomiast druga podgrupa, składająca się z funkcji parzystych - symbolem $cal(k,x)$. Pomiędzy tymi dwoma formami zapisu zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} sal(k,x) &= wal(2k-1,x) \\ cal(k,x) &= wal(2k,x) \end{aligned} \tag{3}$$

Taka możliwość zapisu i porządkowania funkcji Walsha, akcentująca ich własność parzystości bądź nieparzystości, została również uwidoczniona na rys 1.

Rozwijanie funkcji okresowych w szereg Walsha nosi nazwę analizy sekwencyjnej. W odniesieniu do funkcji z nieciągłościami I rodzaju, a zwłaszcza do często spotykanych w technice funkcji odcinkami stałych, prostokątnych, schodkowych itp., otrzymuje się, w porównaniu z analizą harmoniczną, widma rzadsze i szybciej zbieżne, a czasami - nawet widma skończone. W przypadku ciągłych funkcji $f(x)$, dla których charakterystyczne są nieskończone widma, częstokroć dokonuje się ograniczenia nieskończonych szeregów do szeregów o skończonej liczbie wyrazów, co w interpretacji geometrycznej oznacza aproksymację funkcji ciągłej funkcją schodkową (o nieciągłości I rodzaju).

Interesującą własnością funkcji Walsha jest to, że iloczyn dwóch funkcji spośród nich jest równy jednej tylko funkcji Walsha, a mianowicie:

$$wal(m,x)\,wal(n,x) = wal(m \oplus n, x), \tag{4}$$

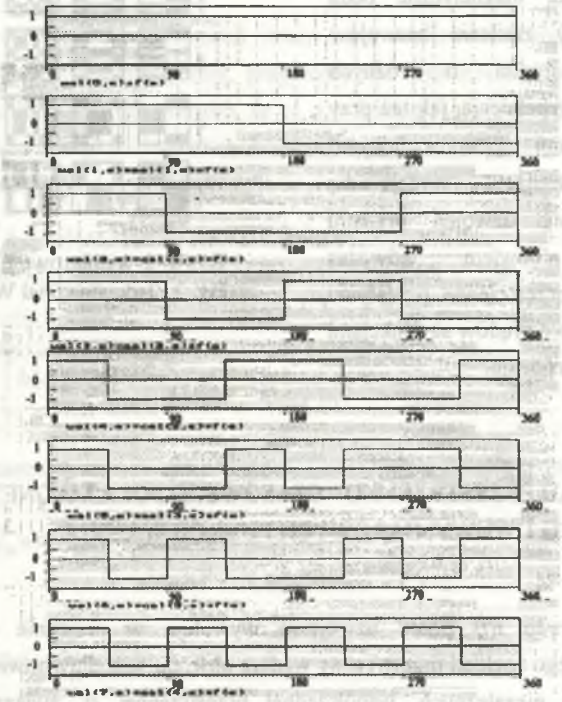
gdzie symbol $\oplus$ oznacza dodawanie binarne (dwójkowe bez przenoszenia).
Własność ta wydaje się być obiecująca przy analizie pola magnetycznego w szczelinie maszyny przy uwzględnieniu niesymetrii magnetycznej szczeliny (np. użłobkowanie, ekscentryczność), albowiem określenie rozkładu pola magnetycznego wymaga w takim przypadku mnożenia

funkcji przepływu i funkcji przewodności magnetycznej. Niekorzystną cechą jest natomiast to, że suma dwóch funkcji Walsha nie jest funkcją Walsha.

Powyższe dwie własności funkcji Walsha stanowią jak gdyby "przeciwieństwo" własności funkcji harmonicznych, w przypadku których suma dwóch funkcji jest również funkcją harmoniczną, natomiast ich iloczyn - nie jest funkcją harmoniczną (tylko - sumą dwóch funkcji harmonicznych o różnych częstotliwościach).

Funkcje Walsha mogą być również funkcjami dwóch zmiennych niezależnych: x,y (lub większej ich liczby). Przyjęło się zapisywać je w postaci podobnej do iloczynu:

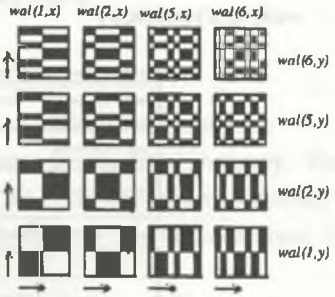
$$wal(m,x)wal(n,y) \tag{5}$$



Rys.1. Przebieg początkowych funkcji Walsha
Fig.1. Distribution of initial Walsh functions

Określają one na płaszczyźnie (x,y) pola kwadratowe, z którymi wiążą się wartości +1 lub (-1). Kilka początkowych dwuwymiarowych funkcji Walsha przedstawiono na rys 2. Taką geometryczną reprezentację rozwinięcia funkcji dwóch zmiennych w dwuwymiarowe funkcje Walsha - nazywać będziemy wykresem płaszczyznowym.

W niniejszej pracy dwuwymiarowe funkcje Walsha zostały zastosowane do analizy czasowo-przestrzennych rozkładów pól magnetycznych, wytworzonych przez pojedynczy zezwój lub grupę zezwojów średnicowych w szczelinie powietrznej maszyny elektrycznej. Analiza ta zostanie przeprowadzona przy założeniu gładkiej i równomiernej szczeliny powietrznej oraz założeniu nieskończonej wartości przenikalności magnetycznej żelaza. Przy przyjętych założeniach rozkład przestrzenny pola magnetycznego uzależniony jest wyłącznie od rozkładu przestrzennego uzwojeń. Rozkład ten - przy założeniu skupienia okładów prądowych w osi żłobków (w postaci funkcji Diraca) - ma charakter funkcji prostokątnych lub schodkowych. Pola magnetyczne będą rozpatrywane przy zasilaniu zezwojów prądami prostokątnymi o różnych współczynnikach wypełnienia, jak też przy zasilaniu prądami sinusoidalnymi. Szczególnie interesujący wydaje się przypadek zasilania uzwojeń prądami prostokątnymi, albowiem wówczas zarówno funkcje przestrzenne przepływu, jak i funkcje czasowe prądów są funkcjami z nieciągłościami I rodzaju.



Rys 2. 2-wymiarowe funkcje Walsha
Fig. 2. 2-dimensional Walsh functions

2. ROZKŁAD PRZESTRZENNO - CZASOWEGO POLA MAGNETYCZNEGO W SZEREG DWUWYMIAROWYCH FUNKCJI WALSHA

Przepływ prądu $i(t)$ przez uzwojenie wywołuje w maszynie elektrycznej pole magnetyczne, którego rozkład przestrzenny wzdłuż obwodu szczeliny powietrznej jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych: współrzędnej przestrzennej α, związanej z rozkładem przestrzennym uzwojenia, oraz współrzędnej czasowej t, związanej z przebiegiem czasowym prądu zasilającego. Rozkład przestrzenno-czasowy indukcji magnetycznej można zapisać w postaci iloczynu dwóch funkcji:

$$B(\alpha,t)=b_w(\alpha)\,i(t) \tag{6}$$

gdzie: $b_w(\alpha)$ - funkcja uzwojeniowa odpowiadająca rozkładowi przestrzennemu indukcji magnetycznej przy zasilaniu uzwojenia jednostkowym prądem stałym.

Dogodnie jest wprowadzić pojęcie unormowanej funkcji uzwojeniowej *b(α)* odniesionej do maksymalnej indukcji, jaką może wytworzyć uzwojenie przy zasilaniu jednostkowym prądem stałym. Jeśli maksymalna wartość indukcji magnetycznej wytworzonej przez uzwojenie zasilane jednostkowym prądem stałym wynosi *B*, normowanie funkcji uzwojeniowej przeprowadza się wg wzoru:

$$b(\alpha)=\frac{1}{B}b_w(\alpha), \tag{7}$$

a wzór (6) przyjmuje postać:

$$B(\alpha,t)=B\,b(\alpha)\,i(t) \tag{8}$$

Ze względu na to, że w niniejszej pracy będą analizowane wyłącznie uzwojenia wielobiegunowe o budowie symetrycznej, przyjmijmy, że współrzędna przestrzenna α jest kątem elektrycznym. Umówmy się ponadto, że oś $\alpha = 0$ odpowiada lewemu bokowi zezwoju, a w przypadku grupy zezwojów - lewemu bokowi pierwszego zezwoju.

Rozwijając funkcję *b(α)* w szereg Walsha w przedziale $(0..2\pi)$ można zapisać:

$$b(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m wal(m,\alpha) \qquad \text{dla } \alpha\in(0..2\pi), \tag{9}$$

gdzie:

$$b_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}b(\alpha)wal(m,\alpha)d\alpha \tag{10}$$

Analogicznie dla czasowego przebiegu prądu zasilającego *i(t)* o okresie *T* mamy:

$$b(t)=\sum_{n=0}^{\infty}I_n wal(n,t) \quad \text{dla: } t\in(0..T), \tag{11}$$

gdzie:

$$I_n=\frac{1}{T}\int_0^{T}i(t)wal(n,t)dt \tag{12}$$

Wprowadzając zależności (9) i (11) do (8) otrzymujemy:

$$B(\alpha,t)=B\sum_{m=0}^{\infty}b_m wal(m,\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}I_n wal(n,t)=B\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}b_m I_n wal(m,\alpha)wal(n,t), \tag{13}$$

a oznaczając:

$$a_{m,n}=B\,b_m I_n$$

możemy uprościć zapis równania (13) do postaci:

$$B(\alpha,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}wal(m,\alpha)wal(n,t) \tag{14}$$

Zgodnie z (5) wyrażenia typu: $wal(m,\alpha)wal(n,t)$ określają funkcje Walsha dwóch zmiennych.

Reasumując, rozkład przestrzenno-czasowy pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny może być opisany szeregiem dwuwymiarowych funkcji Walsha, a to oznacza, że może być również graficznie opisany i scharakteryzowany za pomocą wykresów płaszczyznowych (rys. 2).

3. ANALIZA SEKWENCYJNA POLA MAGNETYCZNEGO ZEZWOJU ŚREDNICOWEGO

Prześledźmy powyższą możliwość na przykładzie pola magnetycznego wytworzonego przez zezwój średnicowy, a następnie przez grupę zezwojów średnicowych zasilanych odpowiednio: prądem stałym, prądem prostokątnym, prądem prostokątnym o współczynniku wypełnienia $w<1$ oraz prądem sinusoidalnym.

Przepływ prądu $i(t)$ przez pojedynczy zezwój średnicowy o liczbie zwojów N powoduje powstanie pola magnetycznego opisanego funkcją (8), gdzie:

$$B=\frac{\mu_0 N}{2\delta_{ef}}, \tag{15}$$

δ_{ef} - zastępcza grubość szczeliny,

zaś:

$$b(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{gdy } 0<\alpha<\pi\\ -1 & \text{gdy } \pi<\alpha<2\pi\end{cases} \tag{16}$$

Funkcja $b(\alpha)$ odpowiada dokładnie funkcji $wal(1,\alpha)$, a więc:

$$b(\alpha)=b_1\,wal(1,\alpha) \tag{17}$$

gdzie: $b_1=1$.

Zasilając dany zezwój prądem stałym:

$$i(t)=I_0=const, \tag{18}$$

otrzymujemy stałe pole magnetyczne. Przebieg prądu zasilającego można wyrazić poprzez funkcję Walsha rzędu zerowego:

$$i(t) = I_0 wal(0,t) \ , \tag{19}$$

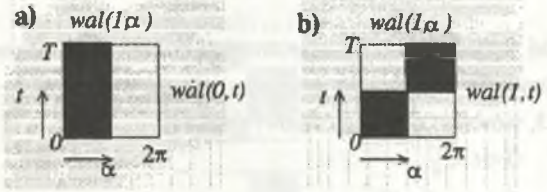
a więc rozkład przestrzenno-czasowy pola magnetycznego zezwoju średnicowego zasilanego prądem stałym opisuje pojedyncza dwuwymiarowa funkcja Walsha:

$$B(\alpha, t) = B\, b_1\, I_0 wal(1,\alpha)\, wal(0,t) = a_{1,0} wal(1,\alpha)\, wal(0,t) \tag{20}$$

gdzie:

$$a_{1,0} = \frac{\mu_0 N}{2\delta_{ef}} I_0 \tag{21}$$

Rozkład pola magnetycznego wzdłuż obwodu szczeliny w przedziale kąta $(0..2\pi)$ i w przedziale czasu $(0..T)$ charakteryzuje wykres płaszczyznowy na rys. 3a. Pola zaczernione odpowiadają wartości ($+a_{1,0}$), zaś pola jasne - wartościom ($-a_{1,0}$).



Rys. 3. Wykres płaszczyznowy pola magnetycznego wytworzonego przez zezwój średnicowy zasilany prądem stałym (a) i prądem o przebiegu prostokątnym (b)

Fig. 3. Plane pattern of magnetic field generated by full-pitch coil carrying constant current (a) and rectangular - wave current (b)

Zasilając ten sam zezwój średnicowy przebiegami prostokątnymi o współczynniku wypełnienia $w = 1$, amplitudzie I i okresie T (rys. 4):

$$i(t) = \begin{cases} +I & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -I & \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \tag{22}$$

czyli przebiegiem:

$$i(t) = I_1 wal(1,\alpha); \tag{23}$$

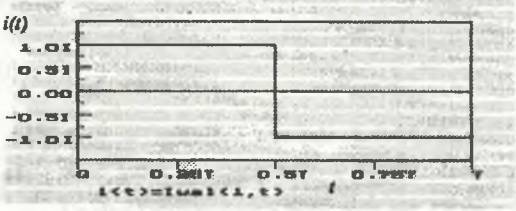
gdzie: $I_1 = I$,

otrzymamy pole magnetyczne przemienne, którego rozkład przestrzenno-czasowy opisuje wyrażenie:

$$B(\alpha,t)=B\,b_1\,I_1 wal(1,\alpha)\,wal(1,t)=\;a_{1,1}wal(1,\alpha)\,wal(1,t) \tag{24}$$

gdzie: $$a_{1,1}=\frac{\mu_0 N}{2\delta_{ef}}I_1\;, \tag{25}$$

a wykres płaszczyznowy przedstawia rys. 3b. Pola zaczernione odpowiadają wartości ($+a_{1,1}$), zaś pola jasne - wartościom ($-a_{1,1}$).



Rys. 4. Prąd o przebiegu prostokątnym (współczynnik wypełnienia $w=1$)
Fig. 4. Rectangular - wave current (filling coefficient $w=1$)

Rozważmy, jaki wpływ na rozkład czasowo-przestrzenny pola magnetycznego wywiera zmniejszenie współczynnika wypełnienia przebiegu prostokątnego prądu zasilającego. Jeśli przykładowo $w = 0.5$, wówczas przebieg czasowy (rys. 5a):

$$i(t)=\begin{cases}+I & 0<t<\frac{T}{4}\\ 0 & \frac{T}{4}<t<\frac{T}{2};\ \frac{3T}{4}<t<T\,,\\ -I & \frac{T}{2}<t<\frac{3T}{4}\end{cases} \tag{26}$$

można przedstawić za pomocą następujących funkcji Walsha (rys. 5b):

$$i(t)=I_1 wal(1,t)+I_2 wal(2,t) \tag{27}$$

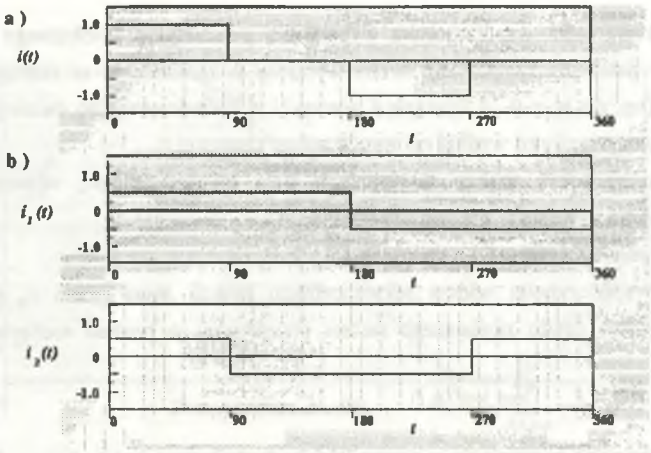
gdzie: $I_1=I_2=\frac{1}{2}I$.

Przy takim zasilaniu rozkład przestrzenno-czasowy pola magnetycznego przybiera postać:

$$\begin{aligned}B(\alpha,t)&=B b_1 wal(1,\alpha)\{I_1 wal(1,t)+I_2 wal(2,t)\}=\\&=a_{1,1}wal(1,\alpha)\,wal(1,t)+a_{1,2}wal(1,\alpha)\,wal(2,t)\end{aligned}\;, \tag{28}$$

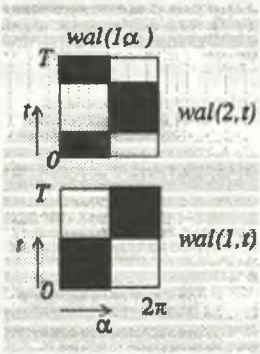
gdzie: $$a_{1,1}=a_{1,2}=\frac{\mu_0 N}{2\delta_{ef}}I\quad, \tag{29}$$

zaś wykres płaszczyznowy rozkładu przestrzenno-czasowego pola magnetycznego rozbudowuje się do postaci przedstawionej na rys. 6.



Rys. 5. Prąd o przebiegu prostokątnym (współczynniku wypełnienia $w=0.5$ - (a)) oraz jego rozkład na funkcje Walsha (b)

Fig. 5. Rectangular - wave current (filling coefficient $w=0.5$ - (a)) and its decomposition into Walsh functions (b)



Rys. 6. Wykres płaszczyznowy w przypadku zasilania zezwoju prądem o przebiegu prostokątnym o współczynniku wypełnienia $w=0.5$

Fig. 6. Plane pattern of single coil supplied by rectangular - wave current with filling coefficient $w=0.5$

Zmniejszenie o połowę wypełnienia przebiegu prądu prostokątnego spowodowało pojawienie się nowej sekwencji czasowej w rozwinięciu w szereg Walsha funkcji prądu, a w konsekwencji - drugiej dwuwymiarowej funkcji Walsha w rozkładzie przestrzenno-czasowym pola, oraz drugiego kwadratu na wykresie płaszczyznowym wzdłuż osi współrzędnej czasowej t. W pierwszym kwadracie (w pierwszym wierszu i w pierwszej kolumnie) pola zaczernione odpowiadają wartości ($+a_{1,1}$), a pola jasne wartości ($-a_{1,1}$). W drugim kwadracie (drugi wiersz - pierwsza kolumna) pola zaczernione odpowiadają wartościom ($+a_{1,2}$), a pola jasne - wartościom ($-a_{1,2}$).

Zmiana wartości współczynnika wypełnienia przebiegu prostokątnego (np.: $w=0.25$) prowadzi do dalszego zwiększenia liczby wyrazów w rozwinięciu w szereg Walsha prądu zasilającego (np. dla $w = 0.25$ wystąpią 4 wyrazy) i w konsekwencji do dalszego rozciągnięcia wykresu płaszczyznowego wzdłuż osi współrzędnej czasowej t.

Dokonajmy teraz analizy sekwencyjnej pola magnetycznego, wytworzonego przez zezwój średnicowy, zasilany prądem sinusoidalnym:

$$i(t) = I_{mx} \sin \omega t \tag{30}$$

Oznaczając współczynniki widma sekwencyjnego funkcji *sinus* przez c_n ($n = 1,5,9....$), przebieg czasowy prądu zasilającego można przedstawić w postaci następującego szeregu Walsha:

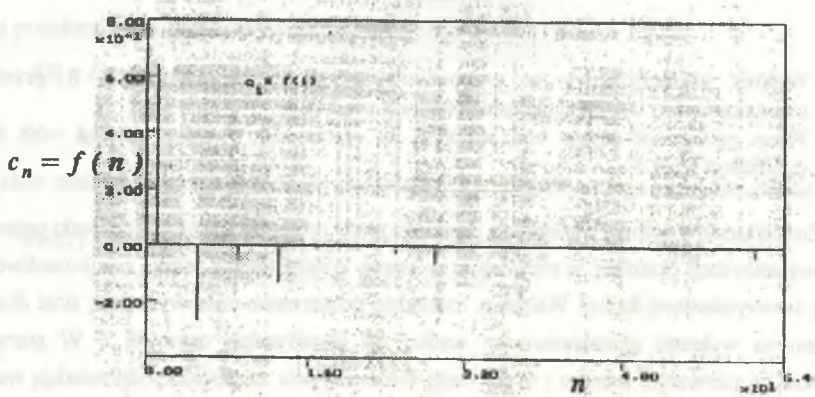
$$i(t) = I_{mx} \sum_{n=1,5,9,..} c_n wal(n,t) \tag{31}$$

Widmo sekwencyjne rozwinięcia w szereg Walsha funkcji *sinus* (wartości współczynników c_n) przedstawiono na rys. 7. Dla zobrazowania szybkości zbieżności szeregu Walsha i scharakteryzowania możliwości zastosowania szeregu Walsha do aproksymacji funkcji ciągłych zestawiono na rys. 8 funkcję *sinus* z jej rozwinięciem, ograniczonym do 4 pierwszych wyrazów szeregu (c_n dla $n=1,5,9,13$). Na podstawie wzorów (13), (14) i (31) rozwinięcie rozkładu przestrzenno-czasowego pola magnetycznego zezwoju średnicowego, zasilanego prądem sinusoidalnym w szereg Walsha przyjmuje postać:

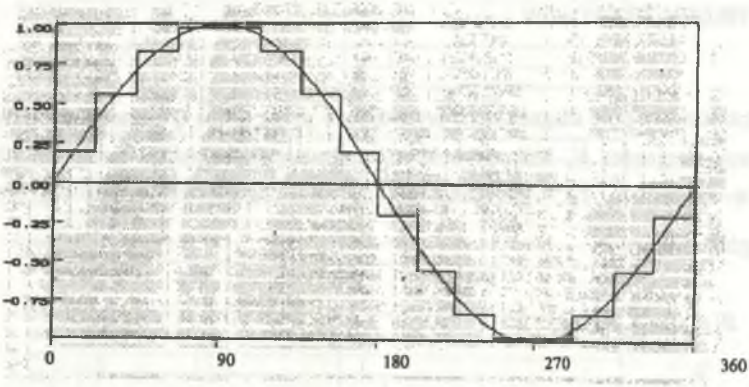
$$B(\alpha,t) = \sum_{n=1,5,9...} a_{1,n} wal(n,t)\, wal(1,\alpha) \tag{32}$$

gdzie:

$$a_{1,n} = \frac{\mu_0 N}{2\delta_{ef}} I_{mx} c_n \tag{33}$$

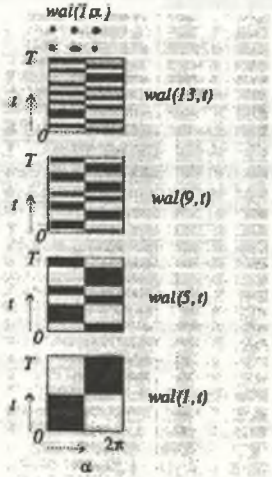


Rys. 7. Widmo sekwencyjne rozwinięcia funkcji sinus
Fig. 7. Sequential spectrum of sine function



Rys. 8. Aproksymacja funkcji sinus czterema funkcjami szeregu Walsha
Fig. 8. Approximation of sine function by of four functions of Walsh series

Ze względu na to, że rozwinięcie funkcji sinus w szereg Walsha zawiera nieskończenie wiele wyrazów, wykres płaszczyznowy pola magnetycznego zostaje rozciągnięty wzdłuż współrzędnej czasowej do nieskończoności (rys. 9). Pola zaczernione w n-tym wierszu l-szej kolumny odpowiadają wartości $(+a_{l,n})$, zaś pola jasne - wartości $(-a_{l,n})$.



Rys. 9. Wykres płaszczyznowy indukcji magnetycznej wytworzonej przez pojedynczy zezwój średnicowy zasilany prądem sinusoidalnym

Fig. 9. Plane pattern of magnetic field generated by single full - pitch coil carrying sine - wave current

4. ANALIZA SEKWENCYJNA POLA MAGNETYCZNEGO GRUPY ZEZWOJÓW

Przedstawmy pole magnetyczne wytworzone przez grupę q zezwojów średnicowych o jednakowej zwojności N, których boki są przesunięte względem siebie na obwodzie o podziałkę żłobkową $\tau_S = \frac{2\pi}{Q}$, jako sumę pól magnetycznych wytworzonych przez poszczególne zezwoje:

$$B(\alpha,t) = \sum_{i=1}^{q} B_i(\alpha,t) \tag{34}$$

Przyjmijmy, że oś $\alpha=0$ układu współrzędnych, wspólnego dla wszystkich zezwojów, odpowiada lewemu bokowi pierwszego zezwoju. W indywidualnych układach współrzędnych, w których oś $\alpha_i=0$ usytuowano w lewym boku i-tego zezwoju, pola magnetyczne poszczególnych zezwojów opisuje wzór:

$$B(\alpha_i, t) = B\, b(\alpha_i)\, i(t) \tag{35}$$

gdzie: $b(\alpha_i) = b_1 wal(1, \alpha_i)$.

Pomiędzy poszczególnymi układami współrzędnych zachodzą związki:

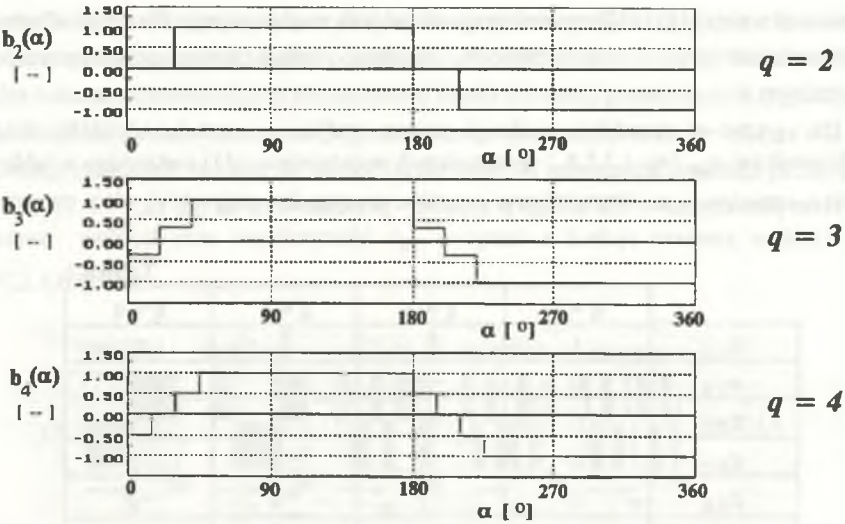
$$\alpha_i = \alpha - (i-1)\,\tau_S \tag{36}$$

Wprowadzając wzory (35) i (36) do (34) oraz uwzględniając, że przy zasilaniu grupy q zezwojów średnicowych jednostkowym prądem stałym - jest wytwarzane pole magnetyczne o amplitudzie qB (tzn. q razy większej od amplitudy pola magnetycznego wytworzonego przez pojedynczy zezwój) otrzymamy:

$$B(\alpha,t) = qB\, b_q(\alpha)\, i(t) \tag{37}$$

gdzie: $$b_q(\alpha) = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} b(\alpha - (i-1)\,\tau_S) \tag{38}$$

$b_q(\alpha)$ - jest unormowaną funkcją uzwojenia dla grupy zezwojów.



Rys. 10. Rozkład przestrzenny funkcji $b_q(\alpha)$ dla uzwojeń o różnej liczbie zezwojów w grupie
Fig. 10. Space distribution of function $b_q(\alpha)$ for windings including different number of coils in a group

Wykres funkcji uzwojenia $b_q(\alpha)$ dla uzwojeń o różnej liczbie zwojów w grupie ($q=1,2,3,4$) przedstawiono na rys. 10. Przy rozwinięciu funkcji $b_q(\alpha)$ w szereg Walsha otrzymuje się widmo sekwencyjne zawierające funkcje *wal* o rzędach 1,2,5,6,9,10,.....

$$b_q(\alpha)=\sum_{m=1,2,5,6..} b_m wal(m,\alpha) \tag{39}$$

Podstawiając (39) do (37) i rozwijając ponadto przebieg czasowy prądu zasilającego uzwojenia według wzoru (10) otrzymujemy wyrażenie na rozkład przestrzenno-czasowy pola magnetycznego w postaci szeregu Walsha:

$$B(\alpha,t)=qB\sum_{m=1,2,5,6...} b_m wal(m,\alpha)\sum_{n=0,1,2...} I_n wal(n,t) \tag{40}$$

a po zgrupowaniu współczynników widm sekwencyjnych w przebiegach czasowych i przestrzennych - w postaci:

$$B(\alpha,t)=\sum_{m=1,2,5,6..}\sum_{n=0,1,2..} a_{m,n} wal(m,\alpha) wal(n,t) \tag{41}$$

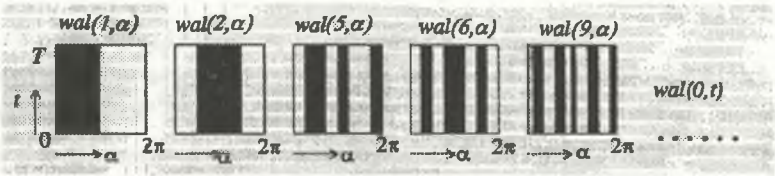
gdzie: $a_{m,n}=qBb_m I_n$ (42)

W oparciu o wzory (41) i (42) wyznaczono rozkład pola magnetycznego dla grupy składającej się odpowiednio z 2, 3 i 4 zezwojów i zasilanej prądem stałym, prostokątnym oraz sinusoidalnym.

Dla grupy q zezwojów zasilanej prądem stałym o wartości I_0 (18) wartość współczynników $a_{m,0}$ ($m=1,2,5,6..$) występujących w rozwinięciu (41) zestawiono w tablicy 1, zaś wykres płaszczyznowy dla takiego przypadku - przedstawiono na rys. 11.

Tablica 1

	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
$a_{1,0}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3
$a_{2,0}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1
$a_{5,0}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1
$a_{6,0}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1
$a_{9,0}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{3}$
$a_{10,0}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{3}$



Rys. 11. Wykres płaszczyznowy pola magnetycznego wytworzonego przez grupę zezwojów zasilanych prądem stałym

Fig. 11. Plane pattern of magnetic field generated by a group of coils carrying constant current

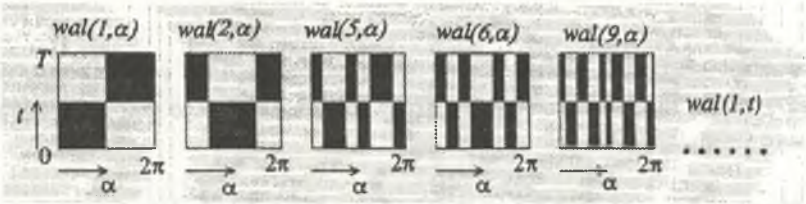
Wprowadzenie w miejsce pojedynczego zezwoju - grupy zezwojów prowadzi do pojawienia się nowych sekwencji przestrzennych, a w konsekwencji - nowych dwuwymiarowych funkcji Walsha w rozkładzie przestrzenno-czasowym pola magnetycznego i nowych kwadratów na wykresie płaszczyznowym wzdłuż osi współrzędnej przestrzennej α. Pola zaczernione w kwadracie położonym w pierwszym wierszu m-tej kolumny odpowiadają wartości ($+a_{m,0}$), zaś pola jasne - wartości ($-a_{m,0}$).

W przypadku zasilania uzwojenia przebiegiem prostokątnym o amplitudzie I_0 (wzór (22)) w rozwinięciu (41) niezerowe wartości przyjmują współczynniki $a_{m,1}$. Ich wartości są identyczne jak wartości współczynników $a_{m,0}$ w tablicy 1:

$$a_{m,1} = a_{m,0} \,. \tag{43}$$

Dla zasilania prostokątnego wykres płaszczyznowy pola magnetycznego jest nadal wykresem o jednym wierszu, odpowiadającym pojedynczej sekwencji czasowej *wal(1,t)* i o nieskończonej liczbie kolumn odpowiadającym nieskończonej liczbie sekwencji przestrzennych (rys. 12).

Przy zasilaniu uzwojenia przebiegiem prostokątnym o wypełnieniu $w=0.5$ (rys. 4a) liczba sekwencji czasowych wzrasta do dwóch (wzór (27)). W rozwinięciu rozkładu przestrzenno-czasowego pola (41) różne od zera są wówczas współczynniki $a_{m,1}$ związane z funkcją czasową *wal(1,t)* oraz współczynniki $a_{m,2}$ związane z funkcją czasową *wal(2,t)* (gdzie m=1,2,5,6,9,10..).



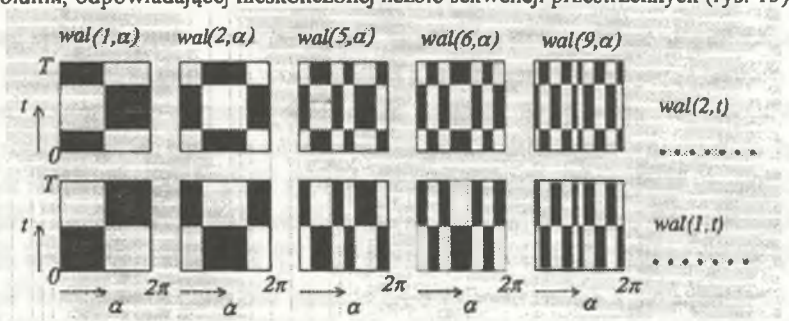
Rys. 12. Wykres płaszczyznowy pola magnetycznego wytworzonego przez grupę zezwojów zasilanych prądem o przebiegu prostokątnym (współczynnik wypełnienia $w=1$)

Fig. 12. Plane pattern of magnetic field generated by a group of coils carrying rectangular-wave current (filling coefficient $w=1$)

Można wykazać, że przy takiej samej amplitudzie prądu zasilającego I_0 wartości współczynników $a_{m,1}$ i $a_{m,2}$ są 2-krotnie mniejsze od współczynników $a_{m,0}$ przedstawionych w tablicy 1, czyli zachodzi:

$$a_{m,1} = a_{m,2} = \tfrac{1}{2} a_{m,0} \quad \text{dla} \quad m = 1,2,5,6,9,10,..... \tag{44}$$

Wykres płaszczyznowy rozkładu przestrzenno-czasowego składa się wówczas z dwóch wierszy, związanych z dwoma sekwencjami czasowymi *wal(1,t)* i *wal(2,t)* oraz z nieskończonej liczby kolumn, odpowiadającej nieskończonej liczbie sekwencji przestrzennych (rys. 13).



Rys. 13. Wykres płaszczyznowy pola magnetycznego wytworzonego przez grupę zezwojów zasilanych prądem o przebiegu prostokątnym (współczynnik wypełnienia $w=0.5$)

Fig. 13. Plane pattern of magnetic field generated by a group of coils carrying rectangular-wave current (filling coefficient $w=0.5$)

Pola zaczernione w kwadracie położonym w pierwszym wierszu m-tej kolumny odpowiadają wartości ($+a_{m,1}$), zaś pole jasne wartości ($-a_{m,1}$). Pola zaczernione w kwadracie położonym w drugim wierszu m-tej kolumny odpowiadają wartości ($+a_{m,2}$), zaś pola jasne - wartości ($-a_{m,2}$). W przypadku sinusoidalnego zasilania grupy zezwojów wykres płaszczyznowy będzie zawierał nieskończoną liczbę wierszy i nieskończoną liczbę kolumn.

5. ZASTĘPCZE DWUFAZOWE UZWOJENIA SEKWENCYJNE

Posługując się notacją funkcji Walsha opartą na funkcjach *sal* i *cal* i korzystając ze wzorów (3), można rozkład czasowo-przestrzenny pola magnetycznego grupy zezwojów (43) zapisać w następującej postaci:

$$B(\alpha,t)=\sum_{k=1,3,5..} sal(k,\alpha)\sum_{n=0,1,2..} a^{s}_{k,n}\,wal(n,t)+\sum_{k=1,3,5..} cal(k,\alpha)\sum_{n=0,1,2..} a^{c}_{k,n}\,wal(n,t) \tag{45}$$

gdzie:
$$a^{s}_{k,n}=a_{2k-1,n}$$
$$a^{c}_{k,n}=a_{2k,n} \tag{46}$$

Rozwinięcie to zawiera wyłącznie funkcje *sal* i *cal* o rzędach nieparzystych. Warto zauważyć, że funkcje *sal* i *cal* o rzędach nieparzystych spełniają relację:

$$sal(k,\alpha)=cal(k,\alpha\pm\tfrac{\pi}{2}) \tag{47}$$

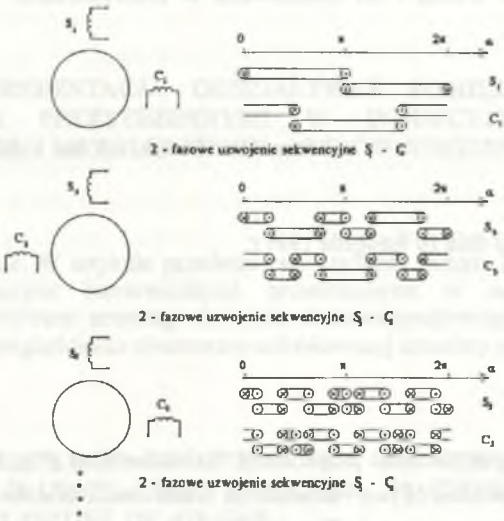
przy czym: znak " - " występuje dla k=1,5,9,13....
znak " + " występuje dla k=3,7,11,15....

Powyższa własność matematyczna oznacza, że funkcja *sal* o nieparzystym rzędzie jest równa funkcji *cal* tego samego rzędu, przesuniętej o kąt $\pm\pi/2$.

Własność ta pozwala na ciekawą interpretację fizyczną otrzymanych wyników. Ze względu na to, że w równaniach (45) występują tylko funkcje *sal* i *cal* rzędu nieparzystego, rozkład przestrzenny pola magnetycznego wytworzony przez grupę zezwojów może być przedstawiony jako suma pól magnetycznych wytworzonych przez szereg zastępczych, symetrycznych uzwojeń dwufazowych, o fazach S_k i C_k. Zastępcze symetryczne uzwojenia 2-fazowe składają się z dwóch uzwojeń o takiej samej budowie i przesuniętych wzajemnie względem siebie na obwodzie o kąt $\pm\pi/2$ (a więc z uzwojeń prostopadłych), a ich przestrzenne rozłożenie odpowiada funkcjom *sal* (faza S_k) i *cal* (faza C_k) o kolejnych nieparzystych rzędach $k=1,3,5..$. Te zastępcze 2-fazowe uzwojenia S_k - C_k o rozłożeniu przestrzennym, odpowiadającym funkcjom *sal* i *cal* nieparzystych rzędów, nazywać będziemy uzwojeniami

sekwencyjnymi. Z własności ortogonalności funkcji Walsha wynika, że uzwojenia te nie sprzęgają się elektromagnetycznie.

Powyższy wniosek można sformułować jeszcze inaczej: uzwojenie generujące pole magnetyczne, zawierające sekwencje przestrzenne *sal* i *cal* o rzędach nieparzystych, może być dla poszczególnych sekwencji rozłożone na dwa wzajemnie prostopadłe uzwojenia symetryczne. Ideę tę ilustruje rys. 14.



Rys. 14. Zastępcze 2-fazowe uzwojenia sekwencyjne odpowiadające funkcjom Walsha
Fig. 14. Equivalent 2-phase sequential windings corresponding to Walsh functions

6. PODSUMOWANIE

Wykazano, że jest możliwa analiza sekwencyjna pól magnetycznych w szczelinie powietrznej maszyny elektrycznej oparta na szeregach dwuwymiarowych funkcji Walsha. Rozkłady przestrzenno - czasowe pól magnetycznych mogą być graficznie przedstawione za pomocą wykresów płaszczyznowych.

Stosowanie analizy sekwencyjnej jest szczególnie dogodne w przypadku zasilania uzwojeń przebiegami prostokątnymi.

Analiza sekwencyjna pozwala na rozkład uzwojenia na dwa wzajemnie prostopadłe i magnetycznie odsprzężone zastępcze uzwojenia 2 - fazowe.

LITERATURA

1. Drygajło A., Pietraszek S.: Uporządkowanie naturalne,diadytyczne i sekwencyjne w algorytmach szybkiego przekształcenia Walsha. Archiw. Automatyki i Telemechaniki 3/81.
2. Drygajło A., Rumatowski K.: Analiza sekwencyjnościowa układów liniowych. PWN, 1990.
3. Harmuth H.: Sequency theory foundations and applications. Academic Press, 1977.
4. Kulesza W.: Systemy widmowej analizy danych cyfrowych. WKiŁ, Warszawa 1984.
5. Wajs K.: Funkcje Walsha i ich zastosowanie w elektrotechnice. Przegląd Elektrotech. 11/76.

Recenzent: Dr hab. inż. Jan Rusek, prof. AGH Kraków

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 listopada 1995 r.

Abstract

In the first chapter the basic properties of Walsh functions (Fig. 1) have been described and graphical representation of two - dimensional Walsh functions in the form of the so - called plane pattern has been presented (Fig. 2). Then, it has been shown that space - time distribution of magnetic field along the periphery of the air - gap of an electricl machine (Eq. 16) can be expressed by two - dimensional Walsh functions (Eq. 14). In such a way the magnetic fields generated by single full - pitch coil carrying constant current (Eq. 18), rectangular - wave current (Eq. 22 and Fig. 4), rectangular - wave current with filling coefficient equal to 0.5 ($w=0.5$, Eq. 26 and Fig. 5) and sinusoidal current (Fig. 8) have been analysed applying two - dimensional Walsh functions. The results of the Walsh analysis have been presented graphically in Figs. 3a, 3b, 6 and 9, respectively.

Next, the space - time distribution of magnetic fields produced by a group consisting of two ($q=2$), three ($q=3$) and four ($q=4$) coils have been considered (Fig. 10 and Table 1). Plane pattern of magnetic field generated by a group of coils carrying constant current, rectangular - wave current and rectangular - wave current with filling coefficient equal to 0.5 ($w=0.5$) have been presented in Figs 11, 12 and 13, respectively.

In the last chapter it has been shown that each group of coils can be replaced by the equivalent 2-phase orthogonal winding consisting of the so - called sequential windings corresponding to consecutive Walsh functions (Fig. 14), connected in series.