

nie jest zbyt znaczący. Tworzy się wówczas modele matematyczne, które przyjmują stałą wzdłuż obwodu maszyny grubość szczeliny powietrznej.

Jednak wiele zjawisk elektromagnetycznych istotnych dla właściwej pracy maszyny nie da się uwzględnić przy przyjęciu zbyt daleko idących założeń upraszczających. Przykładem mogą być generowane w maszynie drgania skrętne i wibracje wału oraz korpusu, a także szumy magnetyczne, które są generowane przez elektromagnetyczne momenty pasożytnicze. W modelach matematycznych, których celem jest analiza warunków powstawania momentów pasożytniczych, konieczne jest uwzględnienie wyższych harmonicznych przepływu, jak też należy wziąć pod uwagę obustronne uźłobkowanie szczeliny powietrznej. Obustronne uźłobkowanie szczeliny powietrznej prowadzi do obwodu magnetycznego o zmiennej wraz z kątem obrotu wirnika przewodności magnetycznej. W literaturze światowej spotkać można wiele publikacji opisujących obustronne uźłobkowanie szczeliny powietrznej i jego wpływ na powstawanie wyższych harmonicznych przestrzennych. Celem niniejszej pracy jest graficzna reprezentacja wzajemnego oddziaływania wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu i wyższych harmonicznych przestrzennych powstających wskutek uźłobkowania szczeliny powietrznej oraz określenie warunków, w których generowane są momenty pasożytnicze.

2. INDUKCJA MAGNETYCZNA W SZCZELINIE POWIETRZNEJ

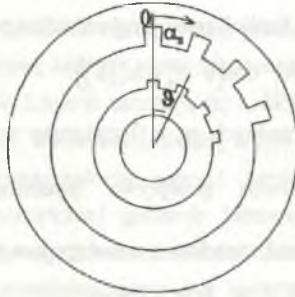
Rozkład przestrzenny składowej promieniowej natężenia pola magnetycznego wzdłuż rozwiniętego obwodu szczeliny powietrznej przy położeniu wirnika, określonym kątem ϑ i przy przyjęciu nieskończonej wartości przenikalności magnetycznej żelaza określa wzór:

$$H(\alpha_s, \vartheta) = \frac{1}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} \cdot (H(0, \vartheta) \cdot \delta(0, \vartheta) + \Theta(\alpha_s, t)), \quad (1)$$

gdzie:

$\Theta(\alpha_s, t)$ - wypadkowy przepływ wytwarzany przez uzwojenie stojana,

$\delta(\alpha_s, \vartheta)$ - funkcja opisująca nierównomierną grubość szczeliny powietrznej.



Rys.1. Układ współrzędnych związany ze stojanem
Fig.1. Coordinate system fixed in stator

Wartość natężenia pola dla początku układu współrzędnych $\alpha_s = 0$, wyznaczona z warunku ciągłości strumienia magnetycznego:

$$\mu_0 \int_0^{2\pi} H(\alpha_s, \vartheta) d\alpha_s = 0 \quad (2)$$

wynosi:

$$H(0, \vartheta) = -\frac{1}{\delta(0, \vartheta)} \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\Theta(\alpha_s, t)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} d\alpha_s}{\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_s}{\delta(\alpha_s, \vartheta)}} \quad (3)$$

Znając rozkład natężenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej wzdłuż rozwiniętego obwodu stojana można wyznaczyć rozkład indukcji w szczelinie powietrznej:

$$B(\alpha_s, \vartheta) = \mu_0 \cdot H(\alpha_s, \vartheta) \quad (4)$$

3. SZEREG FOURIERA ILOCZYNU PRZEPIŹYWU I ODWROTNOŚCI SZCZELINY POWIETRZNEJ

W wyrażeniu (1) opisującym rozkład natężenia pola magnetycznego wzdłuż rozwiniętego obwodu szczeliny powietrznej występuje iloczyn przepływu i odwrotności funkcji opisującej grubość szczeliny powietrznej.

Niechaj uzwojenie umieszczone na obwodzie maszyny wytwarza w danej chwili czasowej t przepływ, który można przedstawić w postaci następującego szeregu Fouriera:

$$\Theta(\alpha_s, t) = \sum_k A_{\Theta k}(t) \sin k\alpha \quad (5)$$

a szereg Fouriera odwrotności funkcji opisującej szczelinę powietrzną ma postać:

$$\frac{1}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} = A_{\frac{1}{\delta}0} + \sum_v A_{\frac{1}{\delta}v} \cos(v \cdot \alpha_s + \alpha_v(\vartheta)). \quad (6)$$

Początek układu współrzędnych $\alpha_s = 0$ związany ze stojanem został tak dobrany, że pokrywa się z osią neutralną przepływu (spełniony warunek $\int_0^{2\pi} \Theta(\alpha_s) d\alpha_s = 0$).

Iloczyn przepływu i odwrotności szczeliny ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha_s, t) \cdot \frac{1}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} = & \sum_k \left\{ A_{ek}(t) A_{\frac{1}{\delta}0} \sin k\alpha_s + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_v A_{ek}(t) A_{\frac{1}{\delta}v} \cos((k-v)\alpha_s - \alpha_v(\vartheta)) + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_v A_{ek}(t) A_{\frac{1}{\delta}v} \cos((k+v)\alpha_s + \alpha_v(\vartheta)) \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Z matematycznego punktu widzenia ze wzoru (7) wynika, że k-ta harmoniczna przestrzenna przepływu działając na uzłobkowaną szczelinę ulega rozszczepieniu na ciągi harmonicznym przestrzennych o rzędach $k+v$ i $k-v$.

Wzór (7) można zinterpretować graficznie budując tabelę, w której wiersze odpowiadają harmonicznym odwrotności funkcji opisującej grubość szczeliny powietrznej, a kolumny - harmonicznym przepływu. Przykład takiej tabeli dla przepływu stojana, zawierającego przykładowo 1 i 7 harmoniczną przestrzenną ($k=1,7$) i dla uzłobkowanej szczeliny, zawierającej składową stałą i wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne ($v=0,1,2,3,\dots$), przedstawiono na rys.2.

		iloczyn przepływu i odwrotności grubości szczeliny →															
		rzęd harmonicznej przestrzennej przepływu Θ →															
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0		•						•								
	1	•		•				•		•							
	2		•		•		•				•						
	3			•		•						•					
	4				•		•						•				
	5			•		•		•						•			
	6		•				•		•							•	
	7	•						•		•							•

Rys.2. Harmoniczne pola magnetycznego wytworzonego przez uzwojenie stojana
Fig.2. Magnetic field space harmonics produced by stator winding

Z tabeli na rys.2 wynika, że każda harmoniczna przestrzenna przepływu w wyniku rozszczepienia generuje harmoniczne, których rzędy wyznaczone są przez regularne krzywe, mające kształt odwróconej litery V. Linie te załamują się („odbijają”) dla harmonicznej rzędu zerowego, czyli dla wartości stałej. Wierzchołek każdej krzywej V odpowiada harmonicznej przepływu, która w wyniku rozszczepienia poprzez harmoniczne odwrotności funkcji opisującej grubość szczeliny powietrznej generuje harmoniczne iloczynu przepływu i odwrotności grubości. Przykładowo, 15 harmoniczna iloczynu, powstała jako wynik rozszczepienia 7 harmonicznej przepływu przez 8-ą harmoniczną odwrotności szczeliny, znajduje się w ósmym wierszu tabeli i na krzywej V, której wierzchołkiem jest 7 harmoniczna.

Powyższa tabela pokazuje także w przejrzysty sposób, że w wyniku rozszczepienia różnych harmonicznych przepływu przez harmoniczne odwrotności funkcji grubości szczeliny mogą powstawać harmoniczne o tych samych rzędach, a więc znajdujące się w tej samej kolumnie. W takim przypadku wypadkowa amplituda jest efektem sumowania. Znając amplitudy poszczególnych składników można wyznaczyć ich wypadkową. Przykładowo, w rozważanym przypadku harmoniczna iloczynu przepływu i odwrotności grubości szczeliny 13 rzędu (13-kolumna tabeli) składa się z dwóch składników. Oznaczając odpowiednio amplitudy poszczególnych elementów przez $A_{7,6,13}$ i $A_{1,12,13}$ (gdzie pierwszy indeks wskazuje na rząd harmonicznej przepływu, a drugi indeks - na rząd harmonicznej grubości szczeliny) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 & A_{7,6,13} \sin(13 \cdot \alpha_s + \alpha_{7,6,13}) + A_{1,12,13} \sin(13 \cdot \alpha_s + \alpha_{1,12,13}) = \\
 & = A_{7,6,13} \sin(13 \cdot \alpha_s) \cos(\alpha_{7,6,13}) + A_{7,6,13} \cos(13 \cdot \alpha_s) \sin(\alpha_{7,6,13}) + \\
 & + A_{1,12,13} \sin(13 \cdot \alpha_s) \cos(\alpha_{1,12,13}) + A_{1,12,13} \cos(13 \cdot \alpha_s) \sin(\alpha_{1,12,13}) = \\
 & = (A_{7,6,13} \cos(\alpha_{7,6,13}) + A_{1,12,13} \cos(\alpha_{1,12,13})) \sin(13 \cdot \alpha_s) + \\
 & + A_{7,6,13} \sin(\alpha_{7,6,13}) + A_{1,12,13} \sin(\alpha_{1,12,13}) \cos(13 \cdot \alpha_s) = \\
 & = A_{\theta_{13}} \sin(13 \cdot \alpha_s + \alpha_{13})
 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 A_{\theta_{13}} &= \sqrt{A_{7,6,13}^2 + A_{1,12,13}^2 + 2A_{7,6,13}A_{1,12,13} \cos(\alpha_{7,6,13} - \alpha_{1,12,13})} \\
 \text{tg } \alpha_{13} &= \frac{A_{7,6,13} \sin(\alpha_{7,6,13}) + A_{1,12,13} \sin(\alpha_{1,12,13})}{A_{7,6,13} \cos(\alpha_{7,6,13}) + A_{1,12,13} \cos(\alpha_{1,12,13})}
 \end{aligned}$$

Jeżeli w widmie harmonicznych przestrzennych przepływu i funkcji odwrotności szczeliny występują harmoniczne o tych samych rzędach, to znaczy spełniona jest zależność:

$$k - v = 0$$

(9)

wówczas w szeregu harmonicznych przestrzennych pojawi się stała - ze względu na współzrzedną przestrzenną α_s funkcja (zależna tylko od chwili czasowej t oraz kąta obrotu wirnika ϑ). Jej wartość w ogólnym przypadku wynosi:

$$A_{\vartheta_0}^{\perp}(\vartheta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=v} A_{ek}(t) A_{\frac{1}{s}v} \sin(\alpha_v(\vartheta)) \quad (10)$$

Przykładowo, dla harmonicznych przepływu rzędu 1 i 7 rozszczepionych odpowiednio przez harmoniczne odwrotności grubości szczeliny tego samego rzędu w kolumnie zerowej pojawiają się dwa elementy (rys.2). Ich suma daje wartość funkcji stałej względem współzrzednej przestrzennej α_s .

Wyrażenie (10) jest cykliczną funkcją kąta obrotu wirnika. Przyjmując na podstawie [4], że obrotowi wirnika o kąt $\vartheta = k(\alpha_{ds} - \alpha_{dr})$, $k \in \mathbb{C}$ (gdzie: α_{ds}, α_{dr} - katowe podziałki żłobkowe odpowiednio stojana i wirnika) odpowiada przesunięcie funkcji opisującej odwrotność grubości szczeliny o kąt:

$$\alpha_{przes} = \alpha_v(\vartheta) = \vartheta \frac{\alpha_{ds} - \alpha_{dr}}{\alpha_{ds} - \alpha_{dr}} \quad (11)$$

oraz uwzględniając (10) można wyznaczyć wartości kąta obrotu wirnika ϑ_0 , dla których wartość stała wynosi zero:

$$\vartheta_0 = k\pi \frac{\alpha_{ds} - \alpha_{dr}}{\alpha_{ds}} \quad k \in \mathbb{C} \quad (12)$$

Pole magnetyczne jest polem bezzródłowym. W rozkładzie przestrzennym natężenia pola magnetycznego wzdłuż obwodu szczeliny (1) nie może wystąpić wartość stała. Zatem funkcja stała szeregu Fouriera iloczynu przepływu wytwarzanego w danej chwili t oraz odwrotności funkcji grubości szczeliny przy danym kącie obrotu wirnika ϑ musi być równoważona przez pierwszy ze składników sumy (1):

$$A_{\vartheta_0}^{\perp}(t, \vartheta) = H(0, \vartheta) \cdot \frac{\delta(0, \vartheta)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} \quad (13)$$

stąd:

$$H(0, \vartheta) = A_{\vartheta_0}^{\perp}(t, \vartheta) \frac{\delta(0, \vartheta)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} = \frac{1}{2} \sum_{k=v} A_{ek}(t) A_{\frac{1}{s}v} \frac{\delta(0, \vartheta)}{\delta(\alpha_s, \vartheta)} \sin(\alpha_v(\vartheta)) \quad (14)$$

W wyrażeniu (6) opisującym widmo harmonicznych odwrotności funkcji opisującej grubość szczeliny powietrznej przyjęto, że zawiera ono kolejne harmoniczne przestrzenne. W widmie opisującym rzeczywistą szczelinę występują tylko harmoniczne o rzędach związanych z liczbą żłobków stojana i wirnika [1],[2]:

$$v = cQ_s, cQ_r, c(Q_s + Q_r), c(Q_r - Q_s) \quad c \in \mathbb{N} \quad (15)$$

4. GRAFICZNE PRZEDSTAWIENIE ODDZIAŁYWANIA POLA MAGNETYCZNEGO STOJANA I WIRNIKA

W rozdziale 3 przedstawiono sposób konstrukcji tabeli określającej rzędy harmonicznych iloczynu przepływu wytwarzanego w danej chwili przez uzwojenie stojana i odwrotności funkcji opisującej grubość szczeliny powietrznej. W podobny sposób można stworzyć tabelę dla wirnika.

Niechaj uzwojenie wirnika wytwarza w danej chwili t wypadkowy przepływ, który w układzie współrzędnych związanych ze stojanem opisuje szereg Fouriera:

$$\Theta_w(\alpha_s, t, \vartheta) = \sum_k A_{ek}(t) \sin(k(\alpha_s + \vartheta)) \quad (16)$$

Zestawiając obie tabelę na wspólnym rysunku dogodnie jest odwrócić tabelę związaną z wirnikiem, tak jak to uczyniono na rys.3.

Takie zestawienie obrazuje wzajemne oddziaływanie pól magnetycznych wytworzonych przez uzwojenie stojana i wirnika. Przykładowo, niech uzwojenie stojana wytwarza pierwszą harmoniczną przepływu ($k_s=1$), a uzwojenie wirnika - pierwszą i siódmą harmoniczną przepływu ($k_r=1,7$). Funkcja odwrotności grubości niech posiada wartość stałą oraz szóstą harmoniczną ($v=0,6$). Pole magnetyczne wytworzone przez stojan posiada wówczas pierwszą, piątą oraz siódmą harmoniczną, zaś wypadkowe pole magnetyczne wytworzone przez uzwojenie wirnika zawiera w swoim widmie harmoniczne rzędu pierwszego, piątego, siódmego i trzynastego. Odpowiednio pierwsze, piąte i siódme harmoniczne obu pól oddziałują wzajemnie na siebie, wytwarzając momenty elektromagnetyczne.

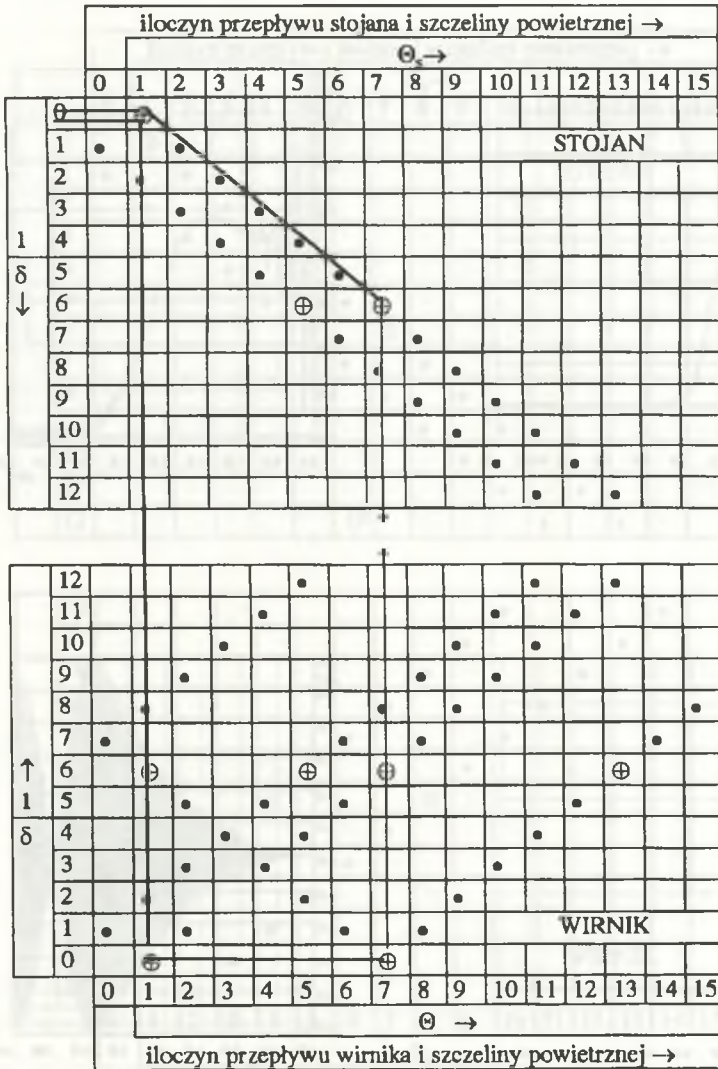
Wypadkowy przebieg momentu elektromagnetycznego podczas rozruchu silnika przedstawiono na rys. 4b. Dla porównania na rys. 4a przedstawiono przebieg momentu elektromagnetycznego podczas rozruchu dla modelu matematycznego silnika posiadającego szczelinę gładką.

Kolejny przykład przedstawia maszynę, w której uzwojenie stojana ($k_s=1$) wytwarza za pośrednictwem nierównomiernej szczeliny ($v=0,6$) pole magnetyczne posiadające harmoniczne rzędu pierwszego, piątego i siódmego, zaś uzwojenie wirnika ($k_r=2$) - pole o harmonicznych rzędu drugiego, czwartego i ósmego (rys. 5). Jak wynika z tabeli, w tym przypadku nie następuje oddziaływanie pomiędzy polem stojana i wirnika. Zatem po załączeniu maszyny do sieci nie jest wytwarzany moment elektromagnetyczny, co obrazuje rys.4c.

W następnym przykładzie (rys.6) pole magnetyczne wytworzone przez stojan ($k_s=1,8$) ($v=0,6,7$) posiada harmoniczne rzędu 1, 3, 5, 7, 8, 14, zaś pole magnetyczne wirnika ($k_r=2$) harmoniczne rzędu 2, 4, 8. Następuje oddziaływanie pomiędzy harmonicznymi polami rzędu ósmego, w efekcie czego po włączeniu maszyny do sieci powstaje wypadkowy moment elektromagnetyczny o przebiegu przedstawionym na rys. 4d.

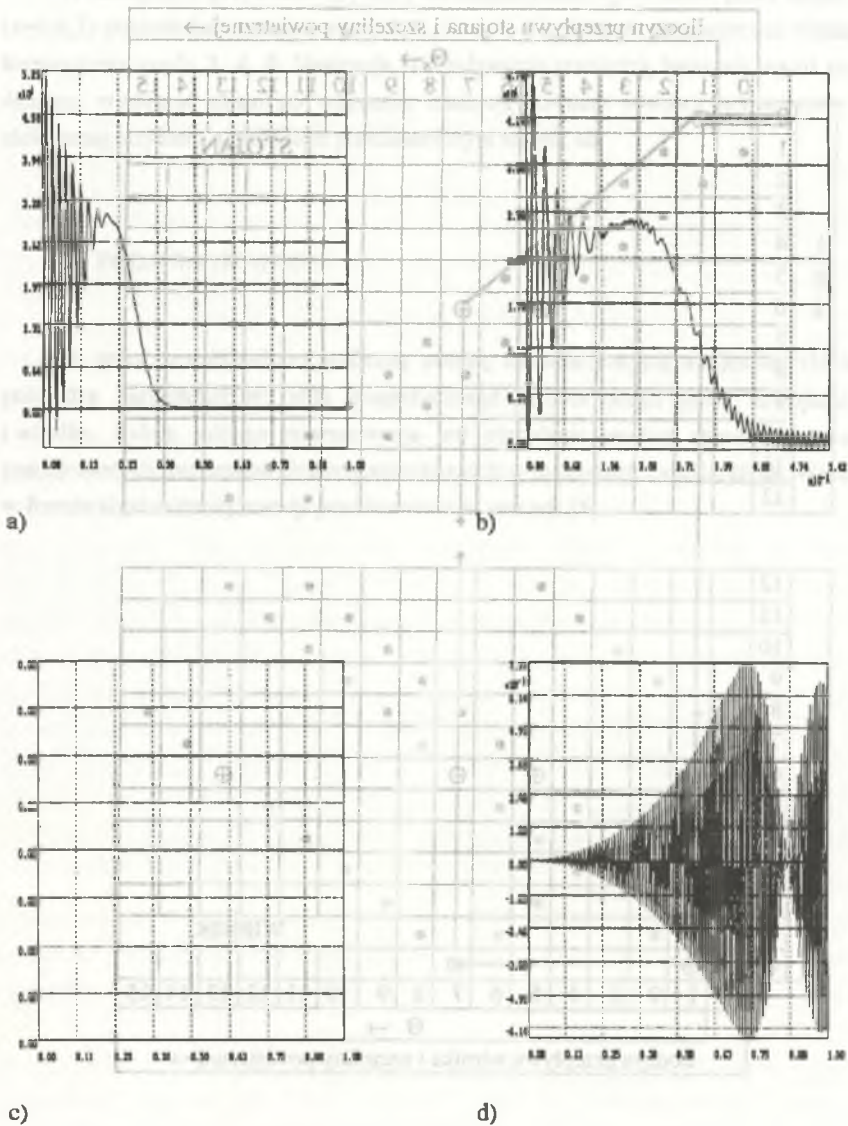
5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono graficzną metodę charakteryzującą wzajemne oddziaływania pomiędzy harmonicznymi polami magnetycznymi wytworzonymi przez uzwojenie stojana i wirnika. Celem takiego zobrazowania jest ułatwienie analizy warunków generowania pasożytniczych momentów elektromagnetycznych w maszynach indukcyjnych. Warunki takie w formie algebraicznej zostały przedstawione w pracach [5].



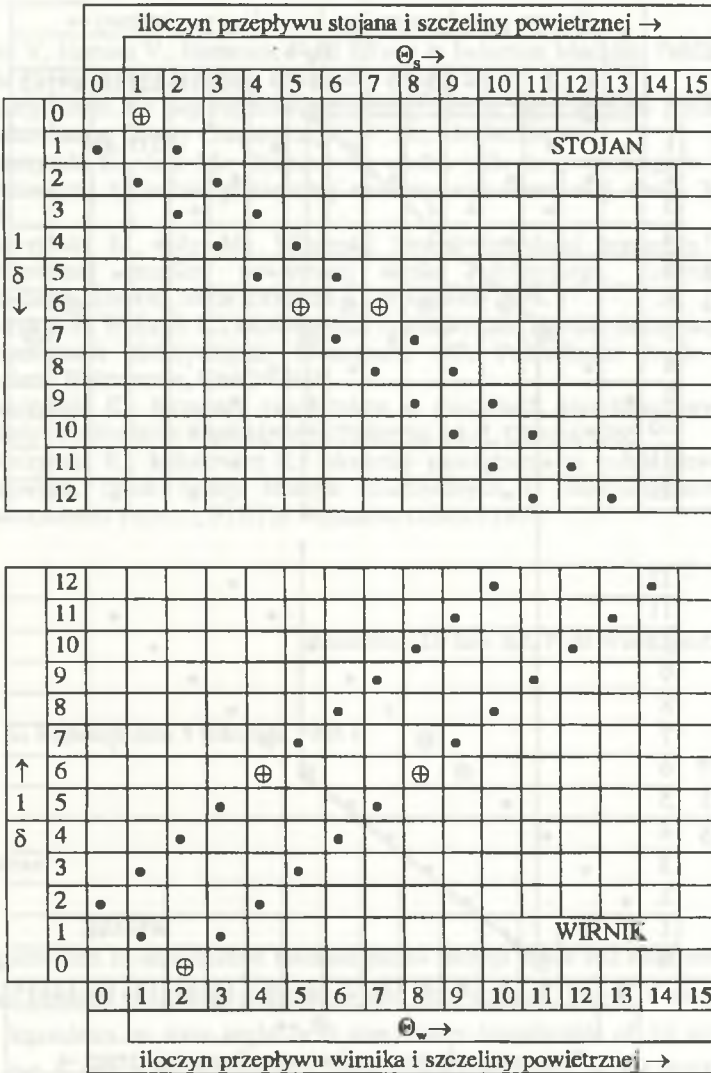
Rys.3. Wzajemne oddziaływania harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego stojana i wirnika, w przypadku gdy: $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0,6$

Fig.3. Mutual interactions among stator and rotor magnetic field space harmonics for the following case: $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0,6$



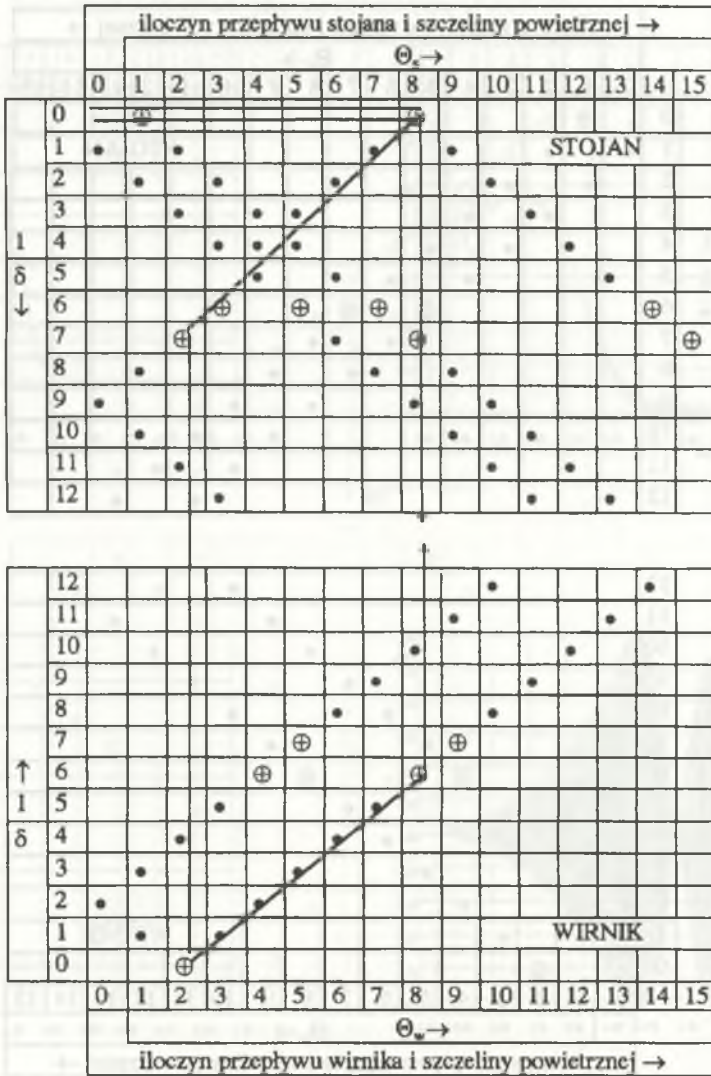
Rys. 4. Przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego podczas rozruchu maszyny indukcyjnej: a) $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0$, b) $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0,6$, c) $k_s=1$ $k_r=2$ $v=0,6$, d) $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0,6,7$

Fig. 4. Electromagnetic torque-time curves at start of an induction machine: a) $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0$, b) $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0,6$, c) $k_s=1$ $k_r=2$ $v=0,6$, d) $k_s=1$ $k_r=1,7$ $v=0,6,7$



Rys. 5. Wzajemne oddziaływania harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego stojana i wirnika, w przypadku gdy: $k_s=1$ $k_r=2$ $v=0,6$

Fig. 5. Mutual interactions among stator and rotor magnetic field space harmonics for the following case: $k_s=1$ $k_r=2$ $v=0,6$



Rys. 6. Wzajemne oddziaływania harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego stojana i wirnika, w przypadku gdy: przy $k_s=1,8$ $k_r=2$ $v=0,6,7$

Fig. 6. Mutual interactions among stator and rotor magnetic field space harmonics for the following case: $k_s=1,8$ $k_r=2$ $v=0,6,7$

LITERATURA

1. Heller V, Hamata V.: Harmonic Field Effects in Induction Machine. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Science, Prague 1977.
2. M.Harry Hesse: Air Gap Permeance in Doubly-Slotted Asynchronous Machines. IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol.7, No,3 September 1992.
3. Kluszczyński K., Johr M.: Harmoniczna analiza pola magnetycznego w obustronnie uźłobkowanej szczelinie powietrznej maszyny asynchronicznej. Prace XVI SPETO 1993
4. Kluszczyński K., Johr M.: Własności funkcji opisującej geometrię obustronnie uźłobkowanej szczeliny powietrznej silnika indukcyjnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Elektryka z.138, Gliwice 1994.
5. Sobczyk T.J., Weinreb K.: Modelowanie matematyczne zjawisk elektromagnetycznych w maszynach elektrycznych. Monografia 169, Politechnika Krakowska, Seria Inżynieria Elektryczna, Kraków 1994.
6. Kluszczyński K.: Momenty pasożytnicze w maszynach asynchronicznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria:Elektryka z 102, Gliwice 1986.
7. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Momenty pasożytnicze w indukcyjnych silnikach klatkowych. Prace Sekcji Maszyn Elektrycznych i Transformatorów, Komitet Elektrotechniki PAN t.I, PTETiS Warszawa-Gliwice 1993.

Recenzent: Dr hab. inż. Piotr Wach, prof. WSI Opole

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 listopada 1995 r.

Abstract

Magnetic flux in an induction machine passes through stator and rotor iron sheets and the air-gap. Because of slotting of the stator and rotor surfaces, length of air-gap varies in time and dependants on rotor angle ϑ . In many cases irregularities of the air-gap can be neglected but if one wants to consider the parasitic phenomena of the machine like the magnetic noise, parasitic torques or vibration of the shafts two-sided slotting of the air-gap has to be account. As a result of irregularities the electromagnetic parasitic torques are generated in the induction machine. The objective of this paper is to present the graphical method to analyse conditions for generating electromagnetic parasitic torques caused by MMF and permeance space harmonics. The orders of magnetic field space harmonics

produced by stator (rotor) winding determined by Eqn.(7) can be found quickly in graphical way with the help of the table which columns correspond to the orders of MMF stator (rotor) space harmonics (Eqn.(5)) and rows-to the orders of permeance (reciprocal of air-gap length) space harmonics of the air-gap, as it shown in Fig. 2. In such a table the orders of magnetic field space harmonics are pointed out by characteristic regular curves having the form of letters V.(Fig. 2)

Putting together in a common figure the table for a stator and the table for a rotor one can easily determine the orders of stator and rotor MMF and permeance space torques as well as can draw the so-called paths of generating parasitic torques. Exemplary paths are presented in Figs. 3 and 6. Results of computer simulations - electromagnetic torque curves at slots - for the different cases presented in Figs. 3, 5 and 6 are given in Fig. 4b,c,d.

Figure 2 shows a grid with columns labeled $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100$ and rows labeled $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$. The grid contains several V-shaped curves representing magnetic field space harmonics.

