

Jerzy KUDEŁA

Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

### **OBLICZENIA NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK SPRĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH POLA GŁÓWNEGO W MASZYNI SYNCHRONICZNEJ CYLINDRYCZNEJ**

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego w maszynie synchronicznej cylindrycznej z obwodami elektrycznymi maszyny w osiach  $d$  i  $q$ , obliczone w oparciu o rozkład przestrzenny pola magnetycznego w szczeliny powietrznej maszyny, wyznaczony metodą elementów skończonych (MES). Przeprowadzono aproksymację tych charakterystyk za pomocą tzw. syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych. Pokazano, że w wyniku istnienia dużego zęba wirnika konieczne jest posługiwanie się co najmniej dwoma takimi charakterystykami w osi  $d$  i  $q$  maszyny.

### **CALCULATION OF NONLINEAR CHARACTERISTICS OF MAIN MAGNETIC FLUX LINKAGES IN A NONSALIENT SYNCHRONOUS MACHINE**

**Summary.** In the paper nonlinear characteristics of main magnetic flux linkages in a nonsalient synchronous machine with machine electric circuits in  $d$  and  $q$  axes have been presented. These characteristics have been calculated basing on the magnetic field 2D distribution in a machine air-gap determined by the finite element method (FEM). Approximation of these characteristics has been made by means of the so-called synthetic characteristics of magnetic linkages. It has been proved that there is necessity to take into account at least two of the above characteristics in  $d$  and  $q$  axes of the machine because of a rotor major tooth.

## 1. WPROWADZENIE

Zjawisko nasycania się rdzenia ferromagnetycznego stojana i odkuwki stalowej wirnika w maszynach synchronicznych cylindrycznych w znacznym stopniu utrudnia sformułowanie poprawnego modelu matematycznego tych maszyn. Najpełniej i najdokładniej można je uwzględnić w tzw. polowych modelach matematycznych, w których stan dynamiczny pola elektromagnetycznego wewnątrz maszyny opisywany jest za pośrednictwem równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, a stan dynamiczny zewnętrznych obwodów elektrycznych za pośrednictwem równań różniczkowych o pochodnych zwyczajnych. Modele polowe ze względu na swą złożoność oraz pracochłonność wykonywanych przy ich użyciu obliczeń wykorzystywane są obecnie w ograniczonym zakresie i praktycznie nie są stosowane w badaniach symulacyjnych złożonych długotrwałych stanów nieustalonych maszyn elektrycznych pracujących w jednomaszynowych oraz wielomaszynowych układach elektromechanicznych i elektroenergetycznych. Z tego też względu od wielu lat prowadzone są prace badawcze [1]...[6], mające na celu przybliżone uwzględnienie tego zjawiska w tradycyjnych obwodowych modelach matematycznych maszyn. W pracach tych zjawisko nasycenia uwzględnia się za pośrednictwem nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych wypadkowego pola magnetycznego maszyny z jej obwodami elektrycznymi [5], bądź też za pośrednictwem nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych oddzielnie wyznaczanych dla pola głównego i pól rozproszonych [1]..[4],[6]. To drugie podejście jest szczególnie przydatne dla maszyn synchronicznych cylindrycznych, w których, obok zjawiska nasycenia układu magnetycznego maszyny, równocześnie występuje zjawisko indukowania się prądów wirowych w litych elementach wirnika, klatce tłumiącej, klinach przewodzących. Łączne uwzględnienie obu zjawisk w obwodowych modelach matematycznych maszyn jest obecnie możliwe tylko dla modeli zlinearyzowanych, obowiązujących dla małych zakłóceń. Przy formułowaniu modeli matematycznych obowiązujących także dla dużych zakłóceń łączne ich uwzględnienie nie jest możliwe, dlatego też oddzielne uwzględnienie zjawiska nasycenia dla pola magnetycznego głównego i pola rozproszenia stojana oraz jego pominięcie przy rozpatrywaniu zjawiska indukowania się prądów wirowych w wirniku jest obecnie jedynym sposobem częściowego udokładnienia modeli matematycznych maszyn synchronicznych cylindrycznych.

W artykule przedstawiono metodykę obliczeń pola magnetycznego głównego w maszynie synchronicznej cylindrycznej, polegającą na numerycznym rozwiązaniu nieliniowego zagadnienia magnetostaticznego przy wykorzystaniu metody elementów skończonych (MES) oraz wyniki obliczeń i analiz nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych tego pola z obwodami elektrycznymi maszyny w osiach  $d$  i  $q$ . Obliczenia szczegółowe przeprowadzono dla generatora synchronicznego TWW-200.

## 2. METODYKA OBLICZEŃ POLA MAGNETYCZNEGO GŁÓWNEGO W MASZYNIE SYNCHRONICZNEJ PRZY WYKORZYSTANIU METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Stosowana w teorii maszyn elektrycznych zasada rozdziału wypadkowego pola magnetycznego w maszynie na pola składowe: pole główne i pola rozproszeń jest zasadą heurystyczną wynikającą z intuicji i praktyki inżynierskiej. Korzystanie z tej zasady wymaga opracowania modeli fizycznych maszyn elektrycznych, w których wspomniane wyżej pola magnetyczne występują samodzielnie albo odgrywają dominującą rolę. Ograniczając rozważania do pola magnetycznego głównego można dla jego wyznaczenia przyjąć model fizyczny maszyny, mający następujące cechy:

- rdzenie ferromagnetyczne stojana i wirnika są względem siebie nieruchome,
- uzwojenia magnesujące, wytwarzające pole magnetyczne główne, umieszczone są w żłobkach stojana i mają te same dane uzwojeniowe co rzeczywiste uzwojenia stojana,
- uzwojenia magnesujące zasilane są prądami fazowymi o wartościach chwilowych wynikających z aktualnej wartości modułu i argumentu wektora przestrzennego prądu magnesującego, co wyrażają następujące relacje:

$$i_{\mu A} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{I_{\mu}\}, \quad i_{\mu B} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{a^2 I_{\mu}\}, \quad i_{\mu C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{a I_{\mu}\} \quad (2.1)$$

- uzwojenia i obwody elektryczne wirnika są otwarte.

W modelu tym, odpowiadającym pod względem struktury geometrycznej i sposobu rozmieszczenia uzwojeń rzeczywistej maszynie elektrycznej, pole magnetyczne główne określa podstawowa harmoniczna przestrzenna składowej promieniowej indukcji magnetycznej, występująca na powierzchni wirnika. W celu jej wyznaczenia należy rozwiązać nieliniowe zagadnienie magnetostatyczne w przekroju płaskim maszyny określone przez równanie

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu(B) \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu(B) \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j \quad (2.2)$$

gdzie:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}, \quad B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

przy uwzględnieniu jednorodnego warunku brzegowego Dirichleta na brzegu zewnętrznym otaczającym przekrój poprzeczny maszyny, warunków symetrii bądź antysymetrii na brzegach wynikających z rozcięcia przekroju poprzecznego na powtarzające się segmenty oraz warunków przejścia na granicy różnych ośrodków materiałowych.

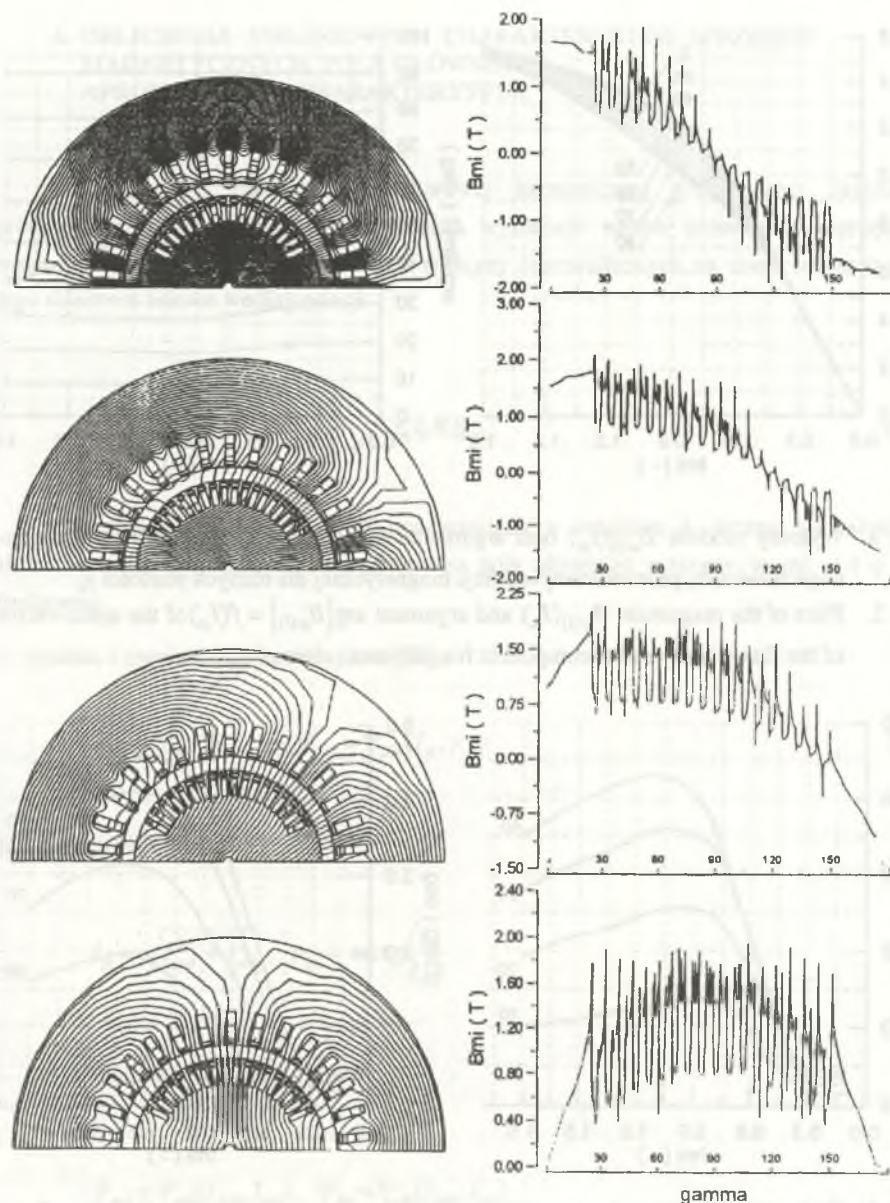
Rozwiązanie równania (2.2) przy uwzględnieniu skomplikowanej struktury geometrycznej maszyny oraz nieliniowych charakterystyk magnesowania rdzeni ferromagnetycznych jest możliwe tylko za pomocą metod numerycznych, wśród których na szczególną uwagę zasługuje metoda elementów skończonych (MES). Obliczenia pola magnetycznego metodą MES przeprowadzono dla generatora synchronicznego TWW-200 zmieniając wartości zarówno modułu, jak i argumentu wektora przestrzennego prądu magnesującego.

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ ROZKŁADU PRZESTRZENNEGO SKŁADOWEJ PROMIENIOWEJ INDUKCJI MAGNETYCZNEJ W SZCZELINIE POWIETRZNEJ MASZINY

Obliczenia rozkładu przestrzennego pola magnetycznego wykonano za pomocą programu "3DFE", opracowanego w Instytucie Maszyn Elektrycznych Uniwersytetu Technicznego w Berlinie, dokonując podziału przekroju poprzecznego maszyny na elementy trójkątne oraz zakładając rozwiązanie pola wewnątrz nich w postaci wielomianu pierwszego stopnia. Do obliczeń przyjęto podział połowki przekroju poprzecznego maszyny na około 40000 elementów trójkątnych z wykorzystaniem adaptacyjnej generacji siatki. Wyniki obliczeń w postaci linii ekwipotencjalnych wektorowego potencjału magnetycznego w przekroju płaskim maszyny oraz rozkładu przestrzennego składowej promieniowej indukcji magnetycznej na powierzchni wirnika dla różnych położań (argumentu) wektora przestrzennego prądu magnesującego przedstawiono na rys. 1.

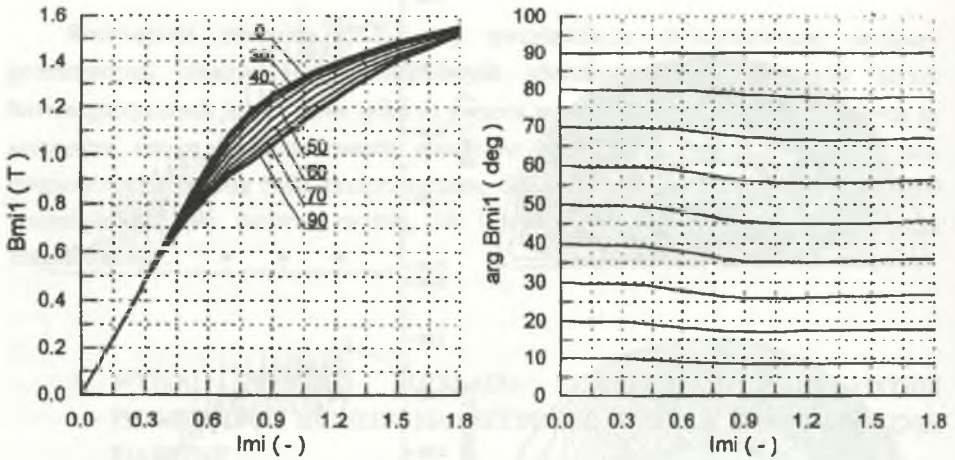
Rozwijając w szereg Fouriera rozkład przestrzenny składowej promieniowej indukcji magnetycznej (rys. 2) otrzymano charakterystyki modułu i argumentu (położenia) podstawowej harmonicznej składowej promieniowej indukcji magnetycznej w zależności od modułu i argumentu wektora przestrzennego prądu magnesującego. Charakterystyki te przedstawiono na rys. 2.

Z przedstawionych charakterystyk wynika, iż w maszynach synchronicznych cylindrycznych w odróżnieniu od maszyn asynchronicznych skutek obecności dużego zęba wektory przestrzenne podstawowej harmonicznej składowej promieniowej indukcji magnetycznej  $\underline{B}_{\mu(1)}$  oraz prądu magnesującego  $\underline{I}_{\mu}$  nie są kolinearne. Różnica pomiędzy obu argumentami zależy od wartości amplitudy prądu  $\underline{I}_{\mu}$  i jego argumentu. Różnica ta zanika dla  $\gamma_{\mu} = 0$  i  $\gamma_{\mu} = 90^{\circ}$  i jest największa dla  $\gamma_{\mu} \in (40^{\circ} + 60^{\circ})$ , wynosząc ok.  $5^{\circ}$ , co pokazano na rys. 3.



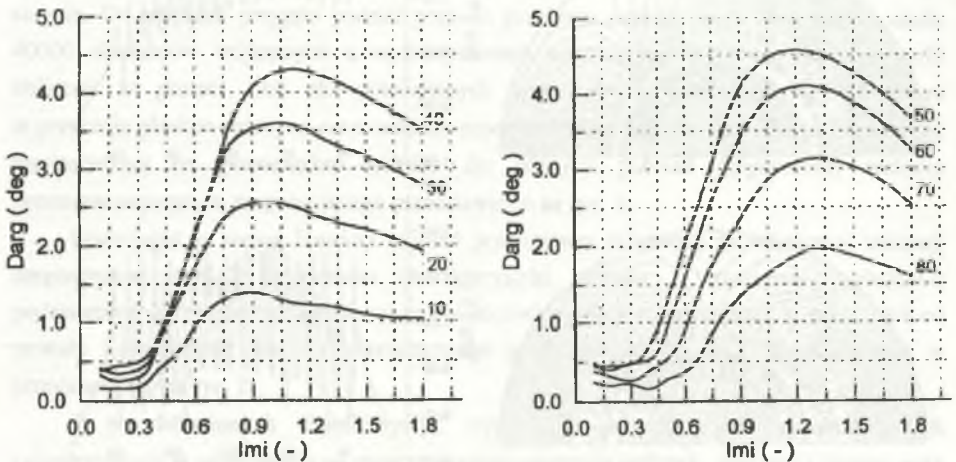
Rys. 1. Linie ekwipotencjalne wektorowego potencjału magnetycznego i rozkład przestrzenny składowej promieniowej indukcji dla  $I_{\mu(r)} = 1,5$ ,  $\gamma_\mu = (0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$

Fig. 1. Isolines of the magnetic vector potential and the distribution of the radial component of the flux density for  $I_{\mu(r)} = 1,5$ ,  $\gamma_\mu = (0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$



Rys. 2. Wykresy modułu  $B_{\mu(1)}(I_{\mu})$  oraz argumentu  $\arg\{B_{\mu(1)}\} = f(I_{\mu})$  wektora przestrzennego składowej promieniowej indukcji magnetycznej dla różnych wartości  $\gamma_{\mu}$

Fig. 2. Plots of the magnitude  $B_{\mu(1)}(I_{\mu})$  and argument  $\arg\{B_{\mu(1)}\} = f(I_{\mu})$  of the space-vector of the flux-density radial component for different values of  $\gamma_{\mu}$



Rys. 3. Wykresy różnicy argumentów wektorów przestrzennych  $\underline{I}_{\mu}$  i  $\underline{B}_{\mu(1)}$   $d \arg = \arg\{I_{\mu}\} - \arg\{B_{\mu(1)}\}$  dla różnych wartości  $\gamma_{\mu}$

Fig. 3. Plots of the argument difference of the space-vectors  $\underline{I}_{\mu}$  i  $\underline{B}_{\mu(1)}$   $d \arg = \arg\{I_{\mu}\} - \arg\{B_{\mu(1)}\}$  for different values of  $\gamma_{\mu}$

#### 4. OBLICZENIA NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK SPRZEŻEŃ MAGNETYCZNYCH POLA GŁÓWNEGO. APROKSYMACJA CHARAKTERYSTYK

Na podstawie obliczonej podstawowej harmonicznej przestrzennej składowej promieniowej indukcji magnetycznej można wyznaczyć wektor przestrzenny sprzężenia magnetycznego obwodów elektrycznych maszyny (sprowadzonych na stronę stojana) oraz jego składowe osiowe według relacji

$$\underline{\Psi}_{\mu} = \Psi_{\mu d} + j\Psi_{\mu q} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{p} \xi_1 z_1 l_l R \underline{B}_{\mu l} \quad (4.1)$$

Uwzględniając charakterystyki przedstawione w rozdziale 3, można zauważyć, że składowe osiowe sprzężenia magnetycznego pola głównego maszyny w osi  $d$  i  $q$  są funkcjami:

– modułu i argumentu prądu magnesującego

$$\Psi_{\mu d} = \Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}), \Psi_{\mu q} = \Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}) \quad (4.2)$$

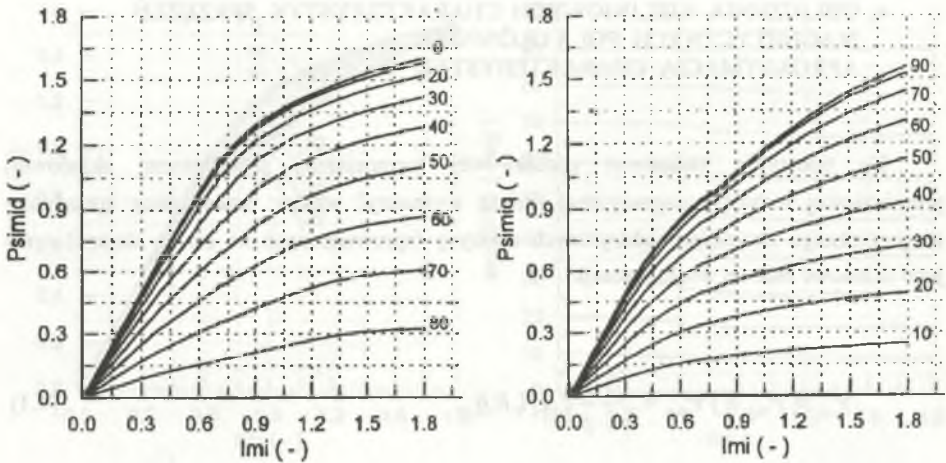
lub, uwzględniając, że

$$I_{\mu} = \sqrt{I_{\mu d}^2 + I_{\mu q}^2}; \gamma_{\mu} = \arctg \frac{I_{\mu q}}{I_{\mu d}} \quad (4.3)$$

– składowych osiowych tego prądu

$$\Psi_{\mu d} = \Psi_{\mu d}(I_{\mu d}, I_{\mu q}), \Psi_{\mu q} = \Psi_{\mu q}(I_{\mu d}, I_{\mu q}) \quad (4.4)$$

Nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego  $\Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$ ,  $\Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$  przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego  $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$ ,  $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$  dla różnych wartości  $\gamma_{\mu}$

Fig. 4. Nonlinear characteristics of the main magnetic flux linkages  $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$ ,  $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$  for different values of  $\gamma_{\mu}$

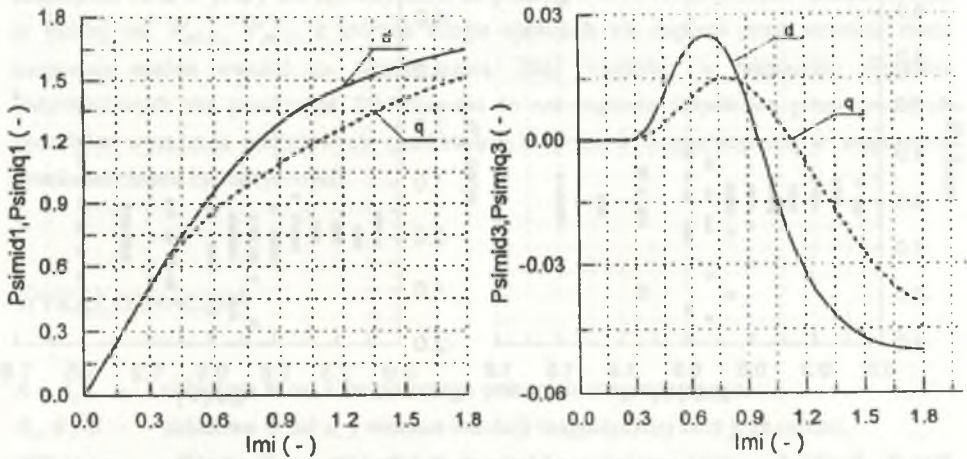
Postępowanie się przedstawionymi wyżej charakterystykami sprzężeń magnetycznych w postaci wykresów lub tabel w obliczeniach stanów ustalonych i nieustalonych maszyn synchronicznych stanowi utrudnienie. Wygodniej jest bowiem korzystać z zależności analitycznych, co wymaga aproksymacji tych charakterystyk. W pracy, bazując na [2], zaproponowano ich aproksymację za pomocą następujących relacji

$$\Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}) = \sum_{i=1,3} \Psi_{\mu di}(I_{\mu}) \cos i\gamma_{\mu} \quad \Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}) = \sum_{i=1,3} \Psi_{\mu qi}(I_{\mu}) \sin i\gamma_{\mu} \quad (4.5)$$

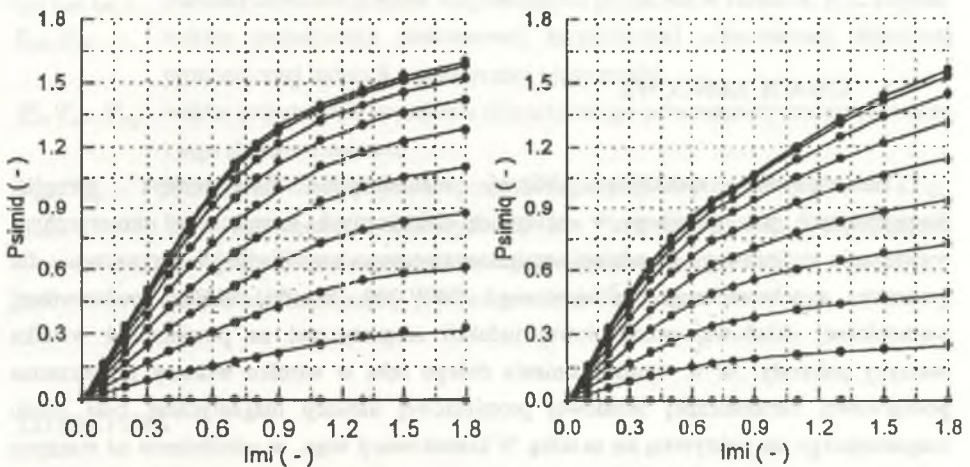
w których charakterystyki  $\Psi_{\mu di}(I_{\mu})$  i  $\Psi_{\mu qi}(I_{\mu})$  nazwano syntetycznymi charakterystykami sprzężeń magnetycznych pola głównego. Syntetyczne charakterystyki wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów minimalizując błąd średniokwadratowy między charakterystykami obliczonymi na podstawie analizy pola magnetycznego a charakterystykami wyrażonymi przez relacje (4.5). Do obliczeń zastosowano metodę Levenberga-Marquardta. Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego w maszynie można z zadowalającą dokładnością aproksymować za pomocą dwóch syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych w osi  $d$  i w osi  $q$ . Wykresy syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych przedstawiono na rys. 5,



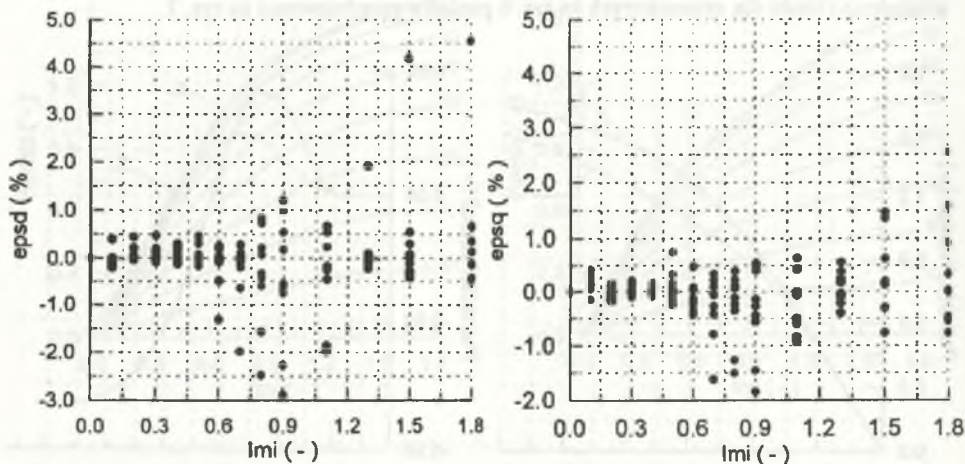
natomiast na rys. 6 porównano charakterystyki obliczone i aproksymowane, zaś rozkład względnego błędu dla zaznaczonych na rys. 6 punktów przedstawiono na rys. 7.



Rys. 5. Syntetyczne charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego w osi  $d$  i  $q$   
 Fig. 5. Synthetic characteristics of the main magnetic flux linkages in the  $d$  and  $q$  axes



Rys. 6. Porównanie charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego  
 ••••• charakterystyki obliczone (MES)  
 — charakterystyki aproksymowane  
 Fig. 6. Comparison between characteristics of the main magnetic flux linkages  
 ••••• characteristics calculated by FEM  
 — characteristics approximated



Rys. 7. Rozkład wartości względnego błędu między charakterystykami obliczonymi (MES) a aproksymowanymi

Fig. 7. Distribution of the relative error between characteristics calculated by FEM and obtained from approximation

## 5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona metodyka obliczeń nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola głównego w maszynach elektrycznych, bazująca na numerycznym rozwiązaniu nieliniowego zagadnienia magnetostatycznego, umożliwiła ich wyznaczenie dla generatora synchronicznego cylindrycznego TWW-200. Wyniki obliczeń podstawowej harmonicznej składowej promieniowej indukcji magnetycznej na powierzchni wirnika maszyny pokazały, że w wyniku istnienia dużego zęba w wirniku wektory przestrzenne podstawowej harmonicznej składowej promieniowej indukcji magnetycznej oraz prądu magnesującego nie pokrywają się ze sobą. W konsekwencji więc, w odróżnieniu od maszyny asynchronicznej, nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola głównego w maszynie synchronicznej cylindrycznej nie można wyrazić za pomocą jednej syntetycznej charakterystyki. Przedstawione wyniki oraz przeprowadzone badania pokazały również, że wyrażenie tych charakterystyk za pomocą dwóch syntetycznych charakterystyk po jednej

w każdej osi odpowiadających nieliniowym charakterystykom sprzężeń magnetycznych wyznaczonych dla kątów  $\gamma_\mu = 0$  i  $\gamma_\mu = 90^\circ$  nie daje w pełni zadowalających wyników. Zaproponowaną w pracy ich aproksymację za pomocą dwóch syntetycznych charakterystyk w każdej osi  $\Psi_{\mu d, q1}$ ,  $\Psi_{\mu d, q3}$ , z których drugie ujawniają się dopiero przy wzroście stanu nasycenia, można uważać za wystarczającą. Błąd względny w większości punktów obliczeniowych nie przekracza 2%. Stanowi to rozszerzenie dotychczas proponowanych sposobów wyrażenia nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych w maszynach synchronicznych cylindrycznych.

## WYKAZ OZNACZEŃ

- $A = A_z$  - składowa w osi z wektorowego potencjału magnetycznego,  
 $B_x, B_y, B$  - składowe w osi  $x, y$  wektora indukcji magnetycznej oraz jego moduł,  
 $\nu$  - odwrotność przenikalności magnetycznej,  
 $\underline{L}_\mu, I_\mu, \gamma_\mu$  - wektor przestrzenny prądu magnesującego, jego moduł i argument (względem osi  $d$  wirnika),  
 $I_{\mu d}, I_{\mu q}$  - składowe osiowe wektora przestrzennego prądu magnesującego,  
 $i_{\mu A}, i_{\mu B}, i_{\mu C}$  - wartości chwilowe prądów magnesujących płynących w fazach  $A, B, C$  stojana,  
 $\underline{B}_{\mu 1}, B_{\mu 1}$  - wektor przestrzenny podstawowej harmonicznej przestrzennej składowej promieniowej indukcji magnetycznej i jego moduł,  
 $\underline{\Psi}_\mu, \Psi_{\mu d}, \Psi_{\mu q}$  - wektor przestrzenny sprzężenia magnetycznego pola magnetycznego głównego i jego składowe osiowe,  
 $\Psi_{\mu d1}, \Psi_{\mu q1}$  - syntetyczne charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego w osi  $d$  i  $q$ ,  
 $z_1, \xi_1$  - liczba szeregowo połączonych zwojów uzwojeń stojana, współczynnik uzwojenia dla podstawowej harmonicznej przestrzennej indukcji,  
 $l_s, R$  - długość idealna maszyny, promień zewnętrzny wirnika.

## LITERATURA

1. de Mello F.P., Hannett L.N.: Representation of saturation in synchronous machines, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRs-1, No 4, November 1986, pp.8-18.
2. Kudła J.: Indukcyjności maszyn elektrycznych prądu przemiennego z nieliniowym obwodem magnetycznym głównym; XVI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, SPETO, Gliwice - Ustroń 1993, Tom II, ss. 369-375.

3. Ramshaw R.S., Xie G.: Nonlinear model of nonsalient synchronous machines, Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-103, No 7, July 1984.
4. Shackhaft G., Henser P.B.: Model of generator saturation for use in power system studies. Proc. IEE, vol. 126, No 8, August 1979, pp. 759-763.
5. Sobczyk T.J., Sobczyk K.: On modelling of electromechanical energy converters with nonlinear magnetic circuit. Proc. of ICEM'90, Cambridge 1990, pp. 1012-1015.
6. Vas P.: Generalized analysis of saturated A.C. machines. Archiv für Elektrotechnik (64) 1981, No. 1, pp. 57-62.

Recenzent: Dr hab. inż. Ernest Mendreła, prof. WSI Opole

Wpłynęło do Redakcji dnia 2 grudnia 1995 r.

### Abstract

The paper presents results of computations and analysis of nonlinear characteristics of main magnetic flux linkages  $\Psi_{\mu d}$ ,  $\Psi_{\mu q}$  in a nonsalient synchronous machine (Fig. 4). These characteristics have been calculated under the assumption that the main magnetic field is represented by a fundamental radial component of a flux density  $B_{\mu r}$  on a rotor surface while magnetizing currents are flowing in stator windings and other rotor circuits are opened. For this case, the nonlinear magnetostatic finite-element method has been applied to find the magnetic field distribution in a cross-section of the machine. Computation results have shown that the space vector  $B_{\mu r}$  magnitude and angle depend on the magnetizing current  $I_{\mu}$  magnitude and argument because of a major tooth of a nonsalient synchronous machine rotor. It is followed by necessity of using the more complex formulas (4,5) to approximate characteristics of the main flux linkages. Investigations have proved that two synthetic characteristics in the  $d$  and  $q$  axes (Fig. 5) represent the saturation phenomenon in a nonsalient synchronous machine.