ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: AUTOMATYKA z. 116 Nr kol. 1296

Adam JANIAK
Politechnika Wrocławska

JEDNOMASZYNOWY PROBLEM SZEREGOWANIA Z OGRANICZENIAMI KOLEJNOŚCIOWYMI I ZASOBOWYMI[1]

Streszczenie. W pracy zbadano jednomaszynowy problem szeregowania zadań z dowolnymi ograniczeniami kolejnościowymi. Rozpatrywano go przy założeniu, że terminy dostępności zadań są jednakowymi liniowymi funkcjami zasobów. Wykazano, że problem ten jest silnie NP-zupełny. Podano algorytm aproksymacyjny jego rozwiązania wraz z analizą najgorszego przypadku.

SINGLE MACHINE SCHEDULING PROBLEM WITH PRECEDENCE AND RESOURCE CONSTRAINTS

Summary. In this paper we have examined single machine scheduling problem with precedence constraints. The problem has been considered under the assumption that job release dates are identical linear functions of resources. It has been proved strong NP-completeness of the problem. An approximate algorithm with the worst case analysis has been also given.

EINMASCHINENPROBLEM DER EINORDNUNG MIT REIHENFOLGE - BESCHRÄNKUNGEN UND BESTANDBESCHRÄNKUNGEN

Zusammenfassung. In diesem Aufsatz untersuchen wir das Einmaschinenproblem der Einordnung mit beliebigen Reihenfolgebeschränkungen. Wir nähmen an, daß die Termine von den Jobserreichbarkeit sind dieselbe lineare Funktionen von den Bestände. Wir beweisen, daß das Problem ist stark NP-komplet. Wir geben auch einen aproximatiren Algorithmus zusammen mit der Analyse von den schlimmsten Fall an.

1. Wprowadzenie. Przegląd literaturowy

W wielu procesach produkcyjnych występują problemy rozdziału różnorodnych zasobów pomiędzy operacje technologiczne, które są zwykle uwarunkowane czasowo, a często nawet przestrzennie. Problemy takie były rozpatrywane przy różnorodnych założeniach i ograniczeniach technologicznych w licznych pracach, najciekawsze z nich to: [6, 7, 10, 11, 12, 37, 42, 45, 48, 58, 66, 67, 71, 73, 74, 75, 86, 92, 93, 94, 96, 97, 98]. Często też występują

[1]Praca była finansowana przez Grant z KBN-u Nr 3P40600305.

różnorodne problemy szeregowania operacji technologicznych na różnych urządzeniach, maszynach, robotach, procesorach. W szczególności występują one w tak zwanych dyskretnych procesach przemysłowych. Problemy te były rozpatrywane przy różnorodnych założeniach, ograniczeniach i funkcjach kryterialnych w licznych pracach, np. najciekawsze z nich to: [2, 3, 4, 5, 8, 9, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 76, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 91]. Kolejne próby podsumowania wyników uzyskanych dla problemów szeregowania zadań można znaleźć w pracach: [16, 1, 6, 22, 81, 7, 89, 90].

Bardzo często problemy szeregowania zadań (operacji technologicznych) na maszynach (robotach) występują równocześnie z problemami rozdziału różnorodnych zasobów. Problemy te również, w pewnym ograniczonym zakresie, były już rozpatrywane w literaturze, i tak np. przy modelach operacji wyrażających zależność prędkości zmiany stanu operacji od ilości przydzielonego zasobu były rozpatrywane w [94, 95, 26]. Podsumowanie dotychczasowych rezultatów uzyskanych dla problemów szeregowania zadań ze statycznymi modelami operacji, wyrażającymi zależność czasu trwania operacji od ilości przydzielonego zasobu można znaleźć w monografii [26], a także częściowo w [6, 7].

Ponieważ w niniejszej pracy zajmiemy się nowym, dotychczas jeszcze nie rozpatrywanym w literaturze problemem szeregowania zadań z równoczesnym rozdziałem zasobów, obecnie dokonamy nieco bardziej szczegółowego przeglądu tych zagadnień.

W wielu dyskretnych procesach produkcyjnych występuje często tylko jedna maszyna krytyczna, na której problem szeregowania zadań (i rozdziału zasobów) jest istotnym i dość trudnym problemem. Natomiast problemy szeregowania zadań na pozostałych maszynach, z punktu widzenia rozpatrywanych kryteriów optymalizacji, są mniej istotne, a maszyny te można rozpatrywać jako maszyny o nieograniczonej przepustowości. Można zatem w wielu praktycznych przypadkach ograniczyć się tylko do jednej maszyny, a czasy obróbki rozpatrywanych elementów na maszynach poprzedzających (w sensie technologicznych uwarunkowań) maszynę krytyczną uwzględnia się w terminach dostępności danych elementów do obróbki na rozpatrywanej maszynie krytycznej. Czasy obróbki na maszynach występujących po maszynie krytycznej uwzględnia się w tak zwanych czasach dostarczania zadań (te czasy nie będą uwzględnione w tej pracy).

Terminy dostępności zadań, jako czasy wykonywania tychże zadań na maszynach poprzedzających maszynę krytyczną, mogą być z góry ustalone lub mogą zmieniać się w sposób ciągły w określonych granicach, zależąc od przydzielonego im zasobu. Podobna sytuacja może być z czasami wykonywania zadań i czasami dostarczania zadań. Przykładowo, jednomaszynowe problemy szeregowania z ustalonymi terminami dostępności i czasami wykonywania zadań były rozpatrywane np. w pracach [21, 24, 25, 80, 85, 87, 88].

Wielomaszynowe problemy szeregowania zadań z ustalonymi czasami wykonywania zadań były rozpatrywane np. w pracach [3, 23, 82, 84], natomiast z czasami zależnymi od zasobów np. w pracach [30, 31, 35, 36, 38, 39, 44, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 59, 63, 64, 67, 68,

69, 70, 71, 72]. Różnorodne jednomaszynowe problemy szeregowania z czasami wykonywania zadań zależnymi od zasobów były rozpatrywane np. w pracach [16, 17, 18, 19, 91, 28, 29, 32, 40, 41, 46, 47, 52, 61, 62, 65]. Jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z terminami dostępności zadań zależnymi od zasobów badano natomiast w [28, 33, 34, 43, 49, 50,60].

W niniejszej pracy zajmiemy się tymi ostatnimi problemami, ale przy założeniu, że zadane są dodatkowe ograniczenia kolejnościowe pomiędzy zadaniami.

Praktycznym przykładem takiego problemu może być proces produkcyjny występujący w hutach stali na odcinku produkcyjnym stalownia konwertorowa-walcarka-zgniatacz, który zostanie pokrótce omówiony w następnym rozdziale.

Precyzyjne sformułowanie rozpatrywanego w pracy problemu znajduje się w rozdziale 3. W rozdziale 4 wykazano silną NP-zupełność badanego problemu. Rozdział 5 poświęcony jest wielomianowemu algorytmowi aproksymacyjnemu, który rozwiązuje w sposób przybliżony badany problem. Zamieszczono tam również analizę najgorszego przypadku tego algorytmu. W rozdziale 6 zamieszczono pewne uwagi końcowe.

2. Przykład zastosowań

W niniejszym rozdziale rozpatrzymy proces produkcyjny występujący w hutach stali na odcinku produkcyjnym stalownia konwertorowa-walcarka-zgniatacz, polegający na podgrzewaniu wlewków za pomocą gazu w piecach wgłębnych, a następnie walcowaniu tych wlewków na walcarce zgniataczu.

Proces ten krótko można scharakteryzować w następujący sposób [99, 78]. Po zakończeniu cyklicznego procesu wytapiania stali w jednym z konwertorów (zwykle jest kilka konwertorów), płynny metal wlewany jest do kadzi, a następnie do wlewnic (specjalnych form), gdzie krzepnie i później zastyga. Wlewnice znajdują się na tzw. zestawach kołowych, na torach krystalizacji. Stygnięcie i starzenie się wlewków trwa od kilku do kilkudziesięciu godzin. Następnie po procesie stryperowania wlewki stygną na wolnym powietrzu, a później są odpowiednio segregowane na zestawy i transportowane do właściwej baterii pieców wgłębnych w celu ich podgrzania do wymaganej temperatury. Każdy zestaw wlewków składa się z kilku wlewków zazwyczaj o podobnej temperaturze, zbliżonym formacie i rodzaju materiału, z którego są zrobione. Każdy zestaw wlewków jest podgrzewany za pomocą gazu w oddzielnym piecu wgłębnym. Wygrzewanie wsadu wlewków w piecu wgłębnym trwa od kilku do kilkunastu godzin. Poszczególne piece wgłębne mogą być dostępne do podgrzewania w różnych momentach czasu (cykliczny proces). Następnie , poszczególne zestawy wlewków – po osiągnięciu pożądanej temperatury – są wyjmowane z pieców wgłębnych i wlewki po kolei za pomocą specjalnej suwnicy są dostarczane do walcarki zgniatacza, gdzie są walcowane na gorąco. Jeden wlewek jest walcowany około kilku minut i następnie w postaci

płyty jest przekazywany do dalszej obróbki na wydział walcowni. Ze względu na dalszą obróbkę na wydziale walcowni między poszczególnymi zestawami wlewków mogą występować zależności kolejnościowe, które muszą być przestrzegane podczas procesu walcowania na walcarce-zgniataczu. Zwykle jest tylko jeden zgniatacz w całej linii produkcyjnej, ponieważ jest on urządzeniem bardzo drogim (znacznie droższym niż wszystkie piece wgłębne). Z powyższego powodu może on być traktowany jako maszyna krytyczna w tej linii produkcyjnej. Piece wgłębne można tutaj praktycznie potraktować jako maszyny o nieograniczonej przepustowości. Czas podgrzewania każdego zestawu wlewków w każdym z pieców wgłębnych jest odwrotnie proporcjonalny do ilości spalonego w nim gazu. Czas ten także zależy od liczby, formatu i typu surówki wlewków w rozpatrywanym zestawie, zależy on również od stanu technicznego rozpatrywanego pieca wgłębnego. Te ostatnie zależności są zwykle uwzględniane w stałych parametrach modelu czasu podgrzewania wlewków. Każdy zestaw wlewków, podgrzewanych w oddzielnym piecu wgłębnym, tworzy oddzielne zadanie produkcyjne. Czas walcowania (na gorąco) każdego zestawu wlewków może być różny dla różnych zestawów wlewków, ponieważ zależy on od liczby, formatu, temperatury i gatunku stali wlewków w zestawie. Jednakże można go z góry łatwo ustalić i dla każdego zestawu wlewków przyjmuje się, że jest on zadany. Czas podgrzewania każdego zestawu wlewków (z uwzględnieniem czasu dostępności rozpatrywanego pieca wgłębnego oraz czasu zakrzepnięcia wlewków z rozpatrywanego zestawu, liczonych od chwili rozpoczęcia optymalizacji badanego procesu produkcyjnego) można potraktować jako termin (czas) dostępności rozpatrywanego zestawu wlewków (zadania) na walcarkę zgniatacz (w celu walcowania jej na gorąco). Maksymalne natężenie przepływu gazu, dostarczanego zarówno do każdego pieca wgłębnego, jak i do całej piecowni, jest ograniczone.

Problem tutaj polega na znalezieniu takiej kolejności walcowania wlewków z rozpatrywanych zestawów wlewków na walcarce zgniataczu i takiego rozdziału natężenia przepływu gazu (lokalnie i globalnie ograniczonego) pomiędzy rozpatrywane piece wgłębne w piecowni, aby przestoje walcarki zgniatacza były minimalne.

Można pokazać [26], że minimalizacja przestojów dowolnej maszyny jest równoważna minimalizacji czasu zakończenia wykonywania zadań na tej maszynie.

Łatwo zauważyć, że problem ten można sprowadzić do jednomaszynowego problemu szeregowania zadań na walcarce zgniataczu z opóźnieniami kolejnościowymi i z terminami dostępności zadań zależnymi od ilości przydzielonego do pieców wgłębnych podzielnego w sposób ciągły zasobu (gazu).

Z punktu widzenia procesów zachodzących w hutach jest to bardzo istotny problem, bowiem – jak wcześniej już wspomniano – walcarka zgniatacz jest bardzo drogim urządzeniem i przestoje w jego pracy są niesłychanie kosztowne. Godzina jego postoju kosztuje wiele milionów złotych, bowiem przestoje zgniatacza są tutaj równoznaczne z bezczynnością całej walcowni z wyjątkiem wykańczalni i pieców wgłębnych. Według zbiorczych statystyk [26]

prowadzonych przez huty ponad 50% postojów zgniatacza jest spowodowanych okresowym brakiem odpowiednio podgrzanych wlewków. Przestoje z winy pieców wgłębnych wynoszą od 20 do 50 godzin miesięcznie. Niewielkie nawet usprawnienia w sterowaniu tym procesem mogą przynieść znaczne efekty ekonomiczne, bowiem wielkość strumienia przepływającego w tym procesie materiału wynosi w ciągu roku kilka milionów ton stali. Podejmowano już wiele różnych prób rozwiązania tego problemu, i tak np. pewne metody symulacyjne przedstawiono w [78], natomiast algorytmy suboptymalne proponowano w [98]. Niestety żadna z tych prób nie dała w pełni zadowalających rezultatów.

Podobne problemy pojawiają się także na innych wydziałach hut, np. na wydziale kuźniczym.

Niniejsza praca poświęcona jest właśnie wyżej wspomnianemu problemowi szeregowania zadań na jednej maszynie z ograniczeniami kolejnościowymi, przy założeniu że terminy dostępności zadań na tę maszynę liniowo zależą od podzielnych w sposób ciągły ograniczonych zasobów. Założymy ponadto, że liniowe modele terminów dostępności zadań są identyczne dla wszystkich zadań, co można w przybliżeniu zrobić, gdy stany techniczne pieców wgłębnych są podobne. Głównym zagadnieniem będzie minimalizacja czasu zakończenia wszystkich zadań na tej maszynie (równoważna minimalizacji przestojów tej maszyny).

Badanie tego problemu istotne jest nie tylko z praktycznego punktu widzenia, ale również i z teoretycznego punktu widzenia, bowiem problemy takie pojawiają się w kontekście wyznaczenia dolnych oszacowań przy rozwiązywaniu wielomaszynowych problemów szeregowania zadań i rozdziału zasobów [26].

3. Sformułowanie problemu

W niniejszym rozdziale precyzyjnie sformułujemy problem przedstawiony w sposób opisowy w rozdziałach 1 oraz 2.

Dany jest zbiór n zadań $J_1,\ldots,J_n$, które mają być wykonywane za pomocą jednej maszyny np. stanowiącej gniazdo krytyczne. Dane są dowolne ograniczenia kolejnościowe "$<$" pomiędzy zadaniami za pomocą zbioru P_0 wszystkich zadanych ograniczeń kolejnościowych.

Ponadto zakłada się, że:

(i) zadania są niepodzielne,

(ii) maszyna w danej chwili może wykonywać co najwyżej jedno zadanie,

(iii) każde zadanie J_j, $j=1,2,\ldots,n$, może być wykonywane po upływie jego terminu dostępności r_j, który zależy od ilości przydzielonego zasobu u_j i opisany jest modelem:

$$r_j \overset{\Delta}{=} f(u_j) \overset{\Delta}{=} b - au_j, \tag{1}$$

gdzie a, b są zadanymi parametrami technologicznymi przyjętego modelu. Ponadto zakładamy, że:

$$\alpha \le u_j \le \beta,$$

gdzie α, β $(0 \le \alpha \le \beta \le b/a)$ są lokalnymi (dolnymi i górnymi) ograniczeniami technologicznymi na ilość zasobu przydzielonego dla zadania j lub do maszyny (poprzedzającej rozpatrywaną maszynę krytyczną), na której zadanie to jest wcześniej przed maszyną krytyczną realizowane.

Ponadto dalej w pracy będziemy zakładać, że dla rozpatrywanych liniowych modeli terminów dostępności zadań $\alpha = 0$, ponieważ przypadek z $\alpha > 0$ można łatwo sprowadzić do przypadku z $\alpha = 0$ poprzez odpowiednią modyfikację parametrów b oraz β, tj.: $b := b - a\alpha$, $\beta := \beta - \alpha$.

Zadane jest również ograniczenie $\hat{R}$ na globalną ilość zasobu dysponowaną do rozdziału.

Zbiór U wszystkich dopuszczalnych rozdziałów u zasobu jest następujący:

$$U \stackrel{\Delta}{=} \left\{ u \in R_+^n : u \stackrel{\Delta}{=} [u_1, \ldots, u_n],\ \ 0 \le u_j \le \beta,\ \ j = 1, \ldots, n,\ \ \sum_{j=1}^{n} u_j \le \hat{R} \right\}$$

(iv) czas wykonywania każdego zadania J_j jest stały i wynosi p_j, $j = 1, \ldots, n$.

Niech Π będzie zbiorem wszystkich dopuszczalnych uszeregowań zadań (permutacji) π, tzn. spełniających zadane ograniczenia kolejnościowe, a U zbiorem wszystkich dopuszczalnych rozdziałów zasobu $u = [u_1, \ldots u_n]$.

Dla zadanego sterowania dopuszczalnego, tzn. zadanej dopuszczalnej kolejności wykonywania zadań (permutacji indeksów zadań), $\pi \in \Pi$ oraz zadanego dopuszczalnego rozdziału zasobu $u \in U$, czas zakończenia $C_{\pi(j)}(\pi, u)$ zadania $J_{\pi(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ w uszeregowaniu π można zdefiniować w następujący sposób:

$$C_{\pi(1)}(\pi, u) \stackrel{\Delta}{=} b - a\,u_{\pi(1)} + p_{\pi(1)},$$

$$C_{\pi(j)}(\pi, u) \stackrel{\Delta}{=} \max\left[b - a\,u_{\pi(j)}, C_{\pi(j-1)}(\pi, u)\right] + p_{\pi(j)},\quad j = 2, \ldots, n.$$

Zatem czas zakończenia wykonywania zadania $J_{\pi(j)}$ można także wyznaczyć w następujący sposób:

$$C_{\pi(j)}(\pi, u) \stackrel{\Delta}{=} \max_{1 \le i \le j}\left[b - a\,u_{\pi(i)} + \sum_{l=i}^{j} p_{\pi(l)}\right],\quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A więc łatwo zauważyć, że czas zakończenia wykonywania wszystkich zadań $C_{\max}(\pi, u)$ dla $\pi \in \Pi$ i $u \in U$ można wyznaczyć w następujący sposób:

$$C_{\max}(\pi,u)\overset{\Delta}{=}\max_{1\le j\le n}\left[b-au_{\pi(j)}+\sum_{l=j}^{n}p_{\pi(l)}\right].$$

Należy znaleźć takie sterowania (π^*, u^*), $\pi^*\in\Pi$, $u^*\in U$ dla rozpatrywanego problemu (który będziemy symbolicznie oznaczali $1|<, \quad r_j=b-au_j, \quad \sum u_j\le\hat{R}\,|\,C_{\max}$), tzn. taką dopuszczalną kolejność wykonywania zadań $\pi^*\in\Pi$ oraz taki dopuszczalny rozdział zasobu $u^*\in U$, aby czas zakończenia wykonywania wszystkich zadań $C_{\max}(\pi,u)$ był minimalny, tzn.:

$$\min_{\pi\in\Pi}\min_{u\in U}C_{\max}(\pi,u)\overset{\Delta}{=}C_{\max}(\pi^*,u^*).$$

4. Złożoność obliczeniowa problemu

W niniejszym rozdziale wykażemy, że rozpatrywany problem jest silnie NP-trudny, tzn. pokażemy, że decyzyjna wersja (oznaczona DFP) rozpatrywanego problemu (optymalizacyjnego) jest silnie NP-zupełna, przy czym DFP jest sformułowane następująco:

DFP: Dany jest jednomaszynowy problem szeregowania n niepodzielnych zadań z dowolnymi ograniczeniami kolejnościowymi " < ", z czasami wykonywania zadań $p_j, j = 1, 2, \dots, n$, oraz modelami (1) terminów dostępności zadań z parametrami a, b, $\alpha=0$, β oraz dane są wielkości $\hat{R}$, y. Zakłada się przy tym, że n, b, β, p_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ są nieujemnymi liczbami wymiernymi.

Pytanie: Czy istnieje sterowanie (π, u), $\pi\in\Pi$ i $u\in U$, takie że $C_{\max}(\pi,u)\le y$?

Twierdzenie 1

Decyzyjna wersja DFP problemu $1|<, \quad r_j=b-au_j, \quad \sum u_j\le\hat{R}\,|\,C_{\max}$ *jest silnie NP-zupełna.*

Dowód:

Oznaczmy przez $DF\left(1|<|\sum C_i\right)$ decyzyjną wersję klasycznego jednomaszynowego problemu szeregowania zadań z ograniczeniami kolejnościowymi i z kryterium sumy terminów zakończenia wykonywania zadań.

Silna NP-zupełność DFP będzie dowodzona poprzez wykazanie, że $DF\left(1|<|\sum C_i\right)$ (będąca silnie NP-zupełną – Lawler [80], Lenstra i Rinnooy Kan [83]) jest pseudowielomianowo-transformowalna do DFP. Rozważmy $DF\left(1|<|\sum C_i\right)$:

Dany jest jednomaszynowy problem szeregowania m niepodzielnych zadań z dowolnymi ograniczeniami kolejnościowymi ' < ", z czasami wykonywania zadań p'_j, $i = 1, 2, \dots, m$, oraz liczbą x (gdzie m, x, p'_j, $i = 1, 2, \dots, m$, są nieujemnymi liczbami całkowitymi).

Pytanie: Czy istnieje uporządkowanie π' zadań $J_1,\ldots,J_m$ takie, że

$$\sum_{j=1}^{m} C_{\pi'(j)} \le x\ ?$$

Odpowiednia instancja DFP jest zdefiniowana następująco:

$$n=m,\ p_j=p'_j,\ b=\sum_{j=1}^{m} p'_j,\ \beta=\sum_{j=1}^{m} p'_j,\ a=1,\ \hat{R}=x,\ y=\sum_{j=1}^{m} p'_j,$$

ograniczenia kolejnościowe pomiędzy zadaniami w $1|<, r_j=b-au_j, \sum u_j \le \hat{R}|C_{\max}$ należy przyjąć dokładnie odwrotnie niż w $1|<|\sum C_i$.

Obecnie pokażemy, że dla DFP zachodzi $C_{\max}(\pi,u)\le y$ $(\pi\in\Pi,\ u\in U)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla $DF\left(1|<|\sum C_i\right)$ można znaleźć uporządkowanie zadań π' takie, że zachodzi $\sum_{i=1}^{n} C_i \le x$.

1. Jeżeli dla pewnego π zachodzi $\sum_{i=1}^{n} C_i \le x$, tzn. jeżeli $DF\left(1|<|\sum C_i\right)$ ma rozwiązanie, to kolejność wykonywania zadań $\hat{\pi}\in\Pi$ oraz rozdział zasobu $\hat{u}\in U$, przy którym dla DFP zachodzi $C_{\max}(\hat{\pi},\hat{u})\le y$, są następujące:

$$\hat{\pi}(i)=\pi'\left(n-(i-1)\right), \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{2}$$

$$\hat{u}_{\hat{\pi}(1)}=\sum_{i=1}^{m} p'_{\pi'(i)},\ \hat{u}_{\hat{\pi}(i)}=\sum_{j=1}^{m-i+1} p'_{\pi'(j)}, \qquad i=2,3,\ldots,n,$$

każdą uporządkowaną parę zadań $J_i<J_j$ w problemie $1|<|\sum C_i$ zamieniamy na przeciwną, tzn. $J_j<J_i$ w problemie $1|<, r_j=b-au_j, \sum u_j\le\hat{R}|C_{\max}$.

Przy czym łatwo zauważyć, że dla sterowania $(\hat{\pi},\hat{u})$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_{\pi(i)}=\sum_{j=1}^{m}\left(m-(j-i)\right)p_{\pi'(i)}\le x \text{ oraz } C_{\max}(\hat{\pi},\hat{u})=\sum_{i=1}^{n} p_i=\sum_{i=1}^{m} p'_i=y$$

i rozdział zasobu $\hat{u}$ jest optymalny dla permutacji $\hat{\pi}$, tzn. $\hat{u}=\hat{u}^*_{\hat{\pi}}$. Powyższe rozważania mówią o tym, że jeśli można znaleźć taką permutację zadań π', że zachodzi $\sum_{i=1}^{n} C_i\le x$, to oznacza to, że można znaleźć taką permutację $\hat{\pi}$ (dokładnie odwrotną niż π') i wyznaczyć

dla niej optymalny rozdział zasobu pomiędzy terminy dostępności w taki sposób, że globalna ilość zasobu $\hat{R} = x$ wystarczy na to, aby zaszło $C_{\max}(\hat{\pi}, \hat{u}) = y$.

2. Jeżeli $DF(1|<|\sum C_i)$ dla wszystkich dopuszczalnych π' nie ma rozwiązania, tzn. jeżeli $\sum C_{\pi'(i)} > x$, to – jak pokażemy – dla każdego uporządkowania π postaci (2) (które wyczerpuje wszystkie możliwe dopuszczalne uporządkowania zadań) i dla każdego dopuszczalnego rozdziału zasobu $u \in U$ zachodzi $C_{\max}(\pi, u) > y$.

   Nie trudno dostrzec, że dla każdego dopuszczalnego uszeregowania π (powstałego z π' w sposób (2)) globalna ilość zasobu, która zapewni spełnienie warunku:

$$C_{\max}(\pi, u) \le y \tag{3}$$

   musi być rozdysponowana w sposób następujący:

$$u'_{\pi(1)} = \sum_{i=1}^{m} p'_{\pi'(i)}, \quad u'_{\pi(i)} = \sum_{j=1}^{m-i+1} p'_{\pi'(j)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

   (Oczywiste jest, że dla u'_π zachodzi: $C_{\max}(\pi, u'_\pi) = \sum_{i=1}^{n} p_\pi = y$.)

   Dla każdego π minimalna globalna ilość zasobu R rozdysponowana pomiędzy zadania, która zapewni spełnienie (3), wynosi:

$$R = \sum_{i=1}^{n} u'_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{m} C_{\pi'(i)}.$$

   Ponieważ z założenia wynika, że dla każdego uszeregowania π' zachodzi

$$\sum_{i=1}^{m} C_{\pi'(i)} > x,$$

   więc u'_π nie jest dopuszczalnym rozdziałem zasobu, gdyż $R > x = \hat{R}$. Stąd dla każdego dopuszczalnego π i $u \in U$ zachodzi $C_{\max}(\pi, u) > y$.

Więc zostało pokazane, że $DF(1|<|\sum C_i)$ jest pseudowielomianowo transformowalna do DFP (wykazanie, że wszystkie warunki pseudowielomianowej transformacji są spełnione i przynależność do klasy NP jest trywialne).

5. Algorytm aproksymacyjny i analiza najgorszego przypadku

W niniejszym rozdziale zostanie przedstawiony wielomianowy algorytm aproksymacyjny rozwiązujący problem $1|<, r_j = b - a u_j, \sum u_j \le \hat{R}|C_{\max}$. Algorytm ten można podzielić na dwie części. W pierwszej tworzone będzie uporządkowanie π zadań, natomiast

w części drugiej będą rozdzielone (dla uzyskanego uporządkowania) w sposób optymalny zasoby. Przez u_π^*, $u_\pi^* \in U$, oznaczony będzie optymalny rozdział zasobu dla ustalonej dopuszczalnej kolejności wykonywania zadań π (tzn. taki rozdział, przy którym $C_{\max}(\pi, u)$, osiąga wartość minimalną, tj.:

$$C_{\max}(\pi, u_\pi^*) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u \in U} C_{\max}(\pi, u)).$$

Algorytm aproksymacyjny (A)

Krok 1. *(tworzenie uporządkowania π)*

Uporządkowanie (permutację) π utwórz w dowolny sposób, ale tak, by były spełnione zadane ograniczenia kolejnościowe pomiędzy zadaniami.

Krok 2. *(optymalny rozdział zasobu dla permutacji π)*

1) Jeżeli maksymalna ilość zasobu, którą można przydzielić do terminu dostępności pierwszego zadania w permutacji π, tzn. $u_{\pi(1)} = \min\{\hat{R}, \beta\}$, jest tak mała, że zachodzi następująca nierówność:

$$f(u_{\pi(1)}) + \sum_{i=1}^{n} p_{\pi(i)} \geq b + \sum_{i=2}^{n} p_{\pi(i)}, \text{ to } u_{\pi(1)}^* = \min\{\hat{R}, \beta\} \text{ i } u_{\pi(j)}^* = 0 \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

2) Jeżeli natomiast zachodzi:

$$f(u_{\pi(1)}) + \sum_{i=1}^{n} p_{\pi(i)} < b + \sum_{i=2}^{n} p_{\pi(i)}, \quad \text{to} \quad u_{\pi(j)}^* = (1/a)\left(\sum_{i=j}^{k} p_{\pi(i)} + d\right), \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

$u_{\pi(k+1)}^* = (d/a)$, $u_{\pi(j)}^* = 0$ dla $j = k+2, k+3, \ldots, n$, gdzie: k jest maksymalną naturalną liczbą spełniającą następujące nierówności:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot p_{\pi(i)} / a \leq \hat{R} \text{ i } \sum_{i=1}^{k} p_{\pi(i)} / a \leq \beta, \text{ podczas gdy}$$

$$d = \min\left\{\left(\hat{R} - \sum_{i=1}^{k} i \cdot p_{\pi(i)} / a\right) \cdot a / (k+1), \left(\beta - \sum_{i=1}^{k} p_{\pi(i)} / a\right) \cdot a\right\}$$

(natomiast $\sum_{i=1}^{k} i \cdot p_{\pi(i)} / a$ jest ilością zasobu, dla której $C_{\max}(\pi, u^*) = b + \sum_{i=k+1}^{n} p_{\pi(i)}$).

Łatwo sprawdzić, że przedstawiony algorytm ma złożoność obliczeniową $O(n^2)$.

Analiza najgorszego przypadku:

Dla pewnej instancji problemu $1|<, r_j = b - a u_j, \sum u_j \leq \hat{R} | C_{\max}$ niech:

$C^A_{\max}$ oznacza wartość $C_{\max}\left(\pi^A, u^*_\pi\right)$ otrzymaną za pomocą powyższego algorytmu A, a $C^*_{\max}$ oznacza optymalną wartość $C_{\max}$, tzn. $C_{\max}\left(\pi^*, u^*\right)$.

Twierdzenie 2

Dla powyższego algorytmu A zachodzi:

$$C^A_{\max} / C^*_{\max} \le 2$$

i ograniczenie to jest najlepsze z możliwych.

Dowód:

Dla każdej instancji rozpatrywanego problemu zachodzą następujące nierówności:

$$C^A_{\max} \overset{\wedge}{=} C_{\max}\left(\pi^A, u^*_\pi\right) \le C_{\max}\left(\pi^A, u^*\right) \le \left(\max_{1\le i\le n} f\left(u^*_i\right) + \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \le 2C_{\max}\left(\pi^*, u^*\right)$$

(oczywiste jest, że zachodzi: $\max_{1\le i\le n} f\left(u^*_i\right) \le C_{\max}\left(\pi^*, u^*\right)$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i \le C_{\max}\left(\pi^*, u^*\right)$).

Dla wspomnianego algorytmu można znaleźć łatwo przykład osiągalności podanego w Tw. 2 współczynnika najgorszego przypadku, tzn. można pokazać, że ograniczenie to jest możliwe z najlepszych.

Dla bardziej sensownego algorytmu wyboru permutacji π w Kroku 1 Algorytmu A, np. takiego, który na pierwszym miejscu ustawia zadanie o najdłuższym czasie trwania, ale takie, które nie ma poprzedników (lub którego poprzedniki zostały już ustawione) itd., współczynnik najgorszego przypadku wynosi też 2 i ograniczenie to jest najlepsze z możliwych.

6. Uwagi końcowe

Łatwo zauważyć, że dla przypadku, gdy wszystkie czasy wykonywania zadań p_i są równe, powyższy silnie NP-trudny problem redukuje się do problemu wielomianowo-rozwiązywalnego. W przypadku tym bowiem problem ten można rozwiązać w $O\left(n^2\right)$ krokach szeregując zadania dowolnie (ale zgodnie z technologicznymi uwarunkowaniami kolejnościowymi) i rozdzielając zasoby zgodnie z zaproponowanym algorytmem (Krok 2 Algorytmu A), który można w tym przypadku uprościć.

Podsumowując uzyskane rezultaty w niniejszym artykule, a także rezultaty uzyskane w pracach [28,33,43], należy podkreślić, że klasyczny (tzn. z ustalonymi zadanymi terminami dostępności i czasami wykonywania zadań) jednomaszynowy problem kolejnościowy z ograniczeniami kolejnościowymi (lub bez nich) jest wielomianowo-rozwiązywalny za pomocą algorytmu Jacksona [24]. Ten sam problem, ale z czasami wykonywania zadań

zależnymi od zasobów jest nadal wielomianowo-rozwiązywalny. Natomiast problem ten, ale bez ograniczeń kolejnościowych, z ustalonymi czasami wykonywania zadań i z liniowymi modelami terminów dostępności zadań jest już silnie NP-zupełny. Ten ostatni problem, ale z identycznymi liniowymi modelami terminów dostępności zadań redukuje się do wielomianowo-rozwiązywalnego problemu. Jednakże dodanie ograniczeń kolejnościowych do tego ostatniego przypadku powoduje, że staje się on silnie NP-zupełny – co właśnie wykazaliśmy w niniejszej pracy.

LITERATURA

[1] Baker, K.R.: Introduction to Sequencing and Scheduling. John Wiley, New York 1974.

[2] Baker, K.R., Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G.: Preemptive scheduling of a single machine to minimize maximum cost subject to release dates and precedence constraints. Oper. Res. 31, 1983, 381-386.

[3] Balas, E.: Machine sequencing via disjunctive graphs-An implicit enumeration algorithm. Oper. Res. 17, 1969, 941-957.

[4] Błażewicz, J., Drabowski, M., Węglarz, J.: Scheduling independent 2-processor tasks to minimize schedule length. Information Processing Letters, Vol. 18, No 5, 1984, 267-273.

[5] Błażewicz, J., Drabowski, M., Węglarz, J.: Scheduling multiprocessor tasks to minimize schedule lenght. IEEE Trans. Comput., Vol. 35, No 5, 1986, 389-393.

[6] Błażewicz, J., Cellary, W., Słowiński, R., Węglarz, J.: Scheduling under Resource Constraints: Deterministic Models. J.C. Baltzer, Basel 1986.

[7] Błażewicz, J., Ecker, K., Schmidt, G., Węglarz, J.: Scheduling in Computer and Manufacturing Systems. Springer-Verlag, Berlin 1993.

[8] Błażewicz, J.: Aelected topics in scheduling theory. Annals of Discrete Mathematics 31, 1987, 1-60.

[9] Brucker, P.: Complexity results for shop problem. in: Mathematical Programming, North-Holland, Amsterdam 1984, 43-52.

[10] Bubnicki, Z.: Optimal control of complex of operations with random parameters. Podstawy Sterowania 1, No 1, 1971, 3-10.

[11] Bubnicki, Z.: Problemy optymalnego sterowania kompleksami operacji. w: Informatyka i Automatyzacja Kompleksowa, mat. konf. Problemy automatyki i informatyki, Gliwice 1973, 145-164.

[12] Burkov, V.N.: Optimal project control. 4-th Congrss IFAC, Technical Session, 35, 1969, 46-57.

[13] Campbell, H.G., Dudek, R.A., Smith, M.L.: A heuristic algorithm for the n job, m machine sequencing problem. Mgmt. Sci., No 16, 1970.

[14] Carlier, J., Pinson, E.: An algorithm for solving the job-shop problem. Mgmt. Sci., No 35, 1989, 164-176.

[15] Cheng, T.C.E., Gupta, M.C.: Survey of scheduling research involving due date determination decisions. European J. Oper. Res., Vol. 38, 1989, 156-166.

[16] Conway, R.W., Maxwell, W.L., Miller, L.W.: Theory of Scheduling. Addison-Wesley, Reading Mass. 1967.

[17] Daniels, R.L.: A multi-objective approach to resource allocation in single machine scheduling. European J. Oper. Res., No 2, 1990.

[18] Daniels, R.L., Sarin, R.K.: Single machine scheduling with controllable processing times and number of job tardy. Oper. Res., No 37, 1989, 981-984.

[19] Daniels, R.L. and Mazzola, J.B.: Flow shop scheduling with resource flexibility. Operations Research 48, 3, 1994, 504-522.

[20] Donnenbring, D.G.: An evaluation of flow-shop sequencing heuristics. Mgmt. Sci, No 23, 1977, 1174-1182.

[21] Du, J., Leung, J.Y.-T.: Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard. Math. Oper. Res., 1989.

[22] French, S.: Sequencing and Scheduling: An introduction to the Mathematics of the Job-Shop. Horwood, Chichester 1982.

[23] Gonzalez, T., Sahni, S.: Flowshop and jobshop schedules: complexity and approximation. Oper. Res. 26, 1978, 36-52.

[24] Jackson, J.R.: Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. Research Report 43, Management Science Research Project, University of California, Los Angeles 1955.

[25] Jackson, J.R.: An extension of Johnson's results on job lot scheduling. Naval Res. Logist. Quart. 3, 1956, 201-203.

[26] Janiak, A.: Exact and Approximate Algorithms of Job Sequencing and Resource Allocation in Discrete Manufacturing Precesses. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1991.

[27] Janiak, A., Kovalyov, M.Y.: Single Machine Group Scheduling with Ordered Criteria. to appear in: Mathematics of Industrial Systems, 1995.

[28] Cheng, T.C.E., Janiak, A.: Resource Optimal Control in Some Single-Machine Scheduling Problems. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39, No 6, 1994, 1243-1246.

[29] Janiak, A., Li, C.-L.: Scheduling to minimize the Total Weighted Completion Time with a Constraint on the Release Time Resource Consumption. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 20, No 2, 1994, 53-58.

[30] Janiak, A., Szkodny, T.: Job-Shop Scheduling with Convex Models of Operations. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 20, No 2,1994, 59-68.

[31] Janiak, A., Kobylański, P.: Genetic Algorithm for Permutation Flow-Shop Problem with Resource. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnic, s. Automatics, No14, 1994, 99-109 (in Polish).

[32] Janiak, A., Grygo, W., Chudzik, K.: Single Machine Scheduling with Penalties for Earliness and Tardiness and Amount of Resources. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnic, s. Automatics, No14, 1994, 85-97 (in Polish).

[33] Janiak, A.: Single machine scheduling problem with a common deadline and resource dependent release dates. European Journal of Operational Research, Vol. 53, No 3, 1991, 317-325.

[34] Janiak, A.: Scheduling Independent One-Processor Tasks with Linear Models of Release Dates under a Given Maximum Schedule Length to Minimize Resource Consumption. Intern. J. Systems Analysis Modelling and Simulation, Vol. 7, No 11/12, 1990, 885-890.

[35] Janiak, A.: Minimization of Resource Consumption under a Given Deadline in Two-Processor Flow-Shop Scheduling Problem. Information Processing Letters, Vol. 32, No 2, 1988, 101-112.

[36] Janiak, A.: General Flow-Shop Scheduling with Resource Constraints. International Journal of Production Research, Vol. 26, No 6, 1988, 1089-1103.

[37] Janiak, A., Stankiewicz, A.: On Time-Optimal Control of a Sequence of Projects of Activities under Time-Variable Resource. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, No 3, 1988, 313-316.

[38] Janiak, A.: Minimization of the Total Resource Consumption in Permutation Flow-Shop Sequencing Subject to a Given Makespan. Modelling, Simulation and Control, C, Vol. 13, No 2, 1988, 1-11.

[39] Grabowski, J., Janiak, A.: Job-Shop Scheduling with Resource-Time Models of Operations. European Journal of Operational Research, Vol. 28, No1, 1987, 58-73.

[40] Janiak, A.: One-machine scheduling problems with allocation of continuously-divisible resource and with no precedence constraints. Kybernetika, Vol. 23, No 4, 1987, 289-293.

[41] Janiak, A.: Minimization of the Maximum Tardiness in One-machine Scheduling Problem subject to Precedence and Resource Constraints. Int. J. Systems Analysis, Modelling and Simulation, Vol. 4, No 6, 1987, 549-556.

[42] Janiak, A.: Time-optimal Control of a Sequence of Projects of Activities. Int. J. Systems Analysis, Modelling and Simulation, Vol. 4, No 1, 1987, 43-52.

[43] Janiak, A.: Time-optimal control in a single machine problem with resource constraints. Automatica, Vol. 22, No 6, 1986, 745-747.

[44] Grabowski, J., Janiak, A.: Sequencing Problem with Resource Constraints. Cybernetics and Systems Research, Vol. 2, 1984, 329-333.

[45] Janiak, A., Stankiewicz, A.: The Equivalence of Local and Global Time-optimal Control of a Complex of Operations. International Journal of Control, Vol. 38, No 6, 1983, 1149-1165.

[46] Janiak, A.: Single Machine Sequencing with Linear Models of Jobs subject to Precedence Constraints. Arch. Automat. & Telemech., Vol. XXXIII, No 2, 1988, 203-210.

[47] Janiak, A.: On a Single Machine Sequencing to Minimize the Maximum Job Cost Subject to Resource and Precedence Constraints. Arch. Automat. & Telemech., Vol. XXXI, No 4, 1986, 415-417.

[48] Janiak, A.: Time-optimal Control of a Sequence of Complexes of Independent Operations with Concave Models. System Science, Vol. 4, No 4, 1978, 325-337.

[49] Janiak, A.: Minimization of the Blooming Mill Standstills – Mathematical Model Suboptimal Algorithms. Scientific Bulletins of University of Mining & Metallurgy, s. Automatics, Vol. 8, No 2, 1989, 37-49.

[50] Janiak, A.: Machine Standstill Minimization Problem subject to Job Release Dates dependent on resources. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 100, 1990, 61-77 (in Polish).

[51] Janiak, A.: Permutation Flow-Shop Problem with Linear Models of Operations. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 94, 1988, 125-138 (in Polish).

[52] Janiak, A.: Single-Machine Scheduling Problems with Allocation of Resources. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 84, 1986, 81-91 (in Polish).

[53] Janiak, A.: Non-permutation Sequencing Problem with Allocation of Constrained Resources. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 74, 1984, 107-114 (in Polish).

[54] Janiak, A.: Some Sequencing Problem with Resource Constraints. Scientific Bulletins of University of Mining & Metallurgy, s. Automatics, No 34, 1983, 215-222 (in Polish).

[55] Janiak, A.: Some Scheduling Problem with Parallel Machines and Resource Constraints. Scientific Bulletins of University of Mining & Metallurgy, s. Automatics, No 32, 1982, 339-350 (in Polish).

[56] Janiak, A.: Job-shop Problem with Resource Allocation. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 63, 1982, 29-39 (in Polish).

[57] Janiak, A., Grabowski, J.: Sequencing Problem with Resource Allocation in Descrete Manufacturing Processes. Scientific Bulletins of University of Mining & Metallurgy, s. Automatics, No 146, 1981, 209-218 (in Polish).

[58] Janiak, A.: Time-Optimization of Sequence of Complexes of Operations in Control of Descrete Manufacturing Processes. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 54, 1980, 57-65 (in Polish).

[59] Janiak, A., Grabowski, J.: Optimization of a Sequence of Operations with Resource Allocation in Descrete Manufacturing Processes. Scientific Bulletins of Silesian Polytechnics, s. Automatics, No 54, 1980, 67-74 (in Polish).

[60] Janiak, A.: Resource Minimization in Single Machine Scheduling with a Completion Time Constraint. Proceed. of the Inter. Conf. on Industrial and Production Management, Marrakech, April 4-7, 1995, 393-401.

[61] Cheng, T.C.E., Janiak, A.: Scheduling Problem in Some Production Processes. in: Robotics & Factories of the Future, ed. F. Vernadat, ELSEVIER, 1993, 257-264.

[62] Cheng, T.C.E., Janiak, A.: Scheduling and Resource Allocation Problem in Some Manufacturing Systems. Proceed. of the 8th Internat. Conference on CAD/CAM, Robotics and Factories of the Future, Metz, France, August 17-19, 1992, 1657-1671.

[63] Janiak, A.: Scheduling and Resource Allocation Problems in Some Flow Type Manufacturing Processes. in: Modern Production Concepts, eds. G. Fandel, G. Zapfel, Springer Verlag, Berlin 1991, 404-415.

[64] Janiak, A.: Flow Shop Scheduling with Controllable Operation Processing Times. in: Large Scale Systems: Theory and Applications, Preprints of the 4-th IFAC/IFORS Symposium, Pergamon Press, eds. H.P. Geering and M. Mansour, Zurich, Switzerland, 26-29 August 1986, Pergamon Press, Vol. 2, 602-605.

[65] Janiak, A.: One-machine Scheduling Problem with Resource Constraints. in: Lecture Notes in Control and Information Sciences, eds. A. Prekopa, J. Szelezan and B. strazicky, Vol. 84, Springer Verlag, Berlin 1986, 358-364.

[66] Janiak, A., Stankiewicz, A.: Global and Local Time-optimal Resource Allocation in a Sequence of Projects. in: System Analysis and Simulation 1985, Theory and Foundations, Proceed. of the Internat. Symposium, Barlin, August 26-31, 1985, eds. A. Sydow, M. Thoma and R. Vichnevetsky, Academie Verlag, Berlin, 408-413.

[67] Janiak, A., Grabowski, J.: Job-shop Problem with Resource Constraints. in: Large Scale Systems: Theory and Applications 1983, Proceed. of the IFAC-IFORS Symposium, Warsaw, Poland, July 11-15, 1983, ed. A. Straszak, Pergamon Press, 1984, 475-480.

[68] Grabowski, J., Janiak, A., : On Job Scheduling with Resources Constraints. in: Lecture Notes in Control and Information Sciences, eds. A.V. Balakrishnan and M. Thoma, Springer-Verlag, Berlin 1984, Vol. 59, 193-200.

[69] Janiak, A.: Job-shop scheduling with resource constraints. in: Proceed. of the Internat. AMSE Conference, Paris, July 1-3, 1982, ed. G. Mesnard, AMSE Press, Vol. 2, 1982, 97-101.

[70] Janiak, A., Grabowski, J.: Optimal sequencing of Computer Programs with Memory Allocation in Multiprocessor Systems. in: Computer Applications in Industry, Proceed. of the 2nd National Conference, September 17-18, 1981, Vol. 1, 34-43.

[71] Janiak, A.: Time-optimal Control of a Sequence of Complexes of Operations in Random Conditions. in: Proceed. of the 8-th National Conference on Automatic Control Engineering, Szczecin, September 16-17, 1980, Vol. 1, 509-515 (in Polish).

[72] Janiak, A., Grabowski, J.: Optimization of Operation Sequencing Problem with Resource Allocation in Discrete Manufacturing Systems. in: Proceed. of the 7-th Polish-Bulgarian Symposium, Warsaw, April 1980, Vol. 2, 129-138 (in Russian).

[73] Janiak, A.: Time-optimal Control of a Sequence of Complexes of Independent Operations. in: System-Modelling-Control, Proceed. of the Internat. Symposium, Zakopane, Poland, October 8-13, 1979, Vol. 2, 76-81 (in Russian).

[74] Janiak, A.: Time-optimal Control of a Sequence of Technological Operations. in: Control Systems - State of the Art, Proceed. of the National Conference SYSTER'79, Katowice 1979, 327-338.

[75] Janiak, A.: Optimal Control of Sequence of Complexes of Technological Operations with Concave Models. in: Proceed. of the 7-th National Conference on Automatic Control Engineering, Rzeszów, September 15-17, 1977, Vol. 2, 149-158.

[76] Johnson, L.M.: Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included. Naval Res. Logist. Quart. 1, 1954, 61-68.

[77] Kowalowski, H. (praca zbiorowa pod kierunkiem): Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych. WNT, Warszawa 1984.

[78] Lawler, E.L.: A pseudopolynomial algorithm for sequencing jobs to min total tardiness. Ann. Discr. Math. 1, 1974, 331-342.

[79] Lawler, E.L.: Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints. Ann. Discr. Math. 2, 1978, 75-90.

[80] Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G., Shmoys, D.B.: Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity. S.C. Graves et al., Eds., Handbooks in OR and MS, Vol. 4, 1993, 445-521.

[81] Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G., Brucker, P.: Complexity of machine scheduling problems. Ann. Discr. Math. 1, 1977, 343-362.

[82] Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G.: Complexity of scheduling under precedence constraints. Oper. Res. 26, 1978, 22-35.

[83] Nawaz, M., Enscore, E.E.Jr., Ham, I.: A heuristic algorithm for the m-machine n-job flow-shop sequencing problem. Omega 11, 1983, 91-95.

[84] Potts, C.N., Van Wassenhove, L.N.: Dynamic programming and decomposition approaches for the single machine total tardiness problem. Europ. J. Oper. Res. 32, 1987, 405-414.

[85] Słowiński, R.: Multiobjective project scheduling under multiple-category resource constraints. in: Advances in Project Scheduling edited by R. Słowiński and J. Węglarz, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1989.

[86] Smith, W.E.: Various optimizers for single-stage production. Naval Res. Logistic Quart. 3, 1956, 59-66.

[87] Szwarc, W.: Dominance conditions for the three-machine flow-shop problem. Oper. Res. 26, 1978, 203-206.

[88] Tanaev, V., Gordon, V., Shafransky, Y.: Scheduling Theory. Single-Stage Systems. Kluwer Academic Publishers Group, 1994.

[89] Tanaev, V., Sotskov, Y., Strusevich, V.: Scheduling Theory. Multi-Stage Systems. Kluwer Academic Publishers Group, 1994.

[90] Van Wassenhove, L.N., Baker, K.R.: A bicriterion approach to time cost trade-offs in sequencing. European J. Oper. Res., No 1, 1982, 48-54.

[91] Węglarz, J.: Minimalno-czasowe sterowanie rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji w warunkach deterministycznych. Rozprawy Nr 78, Wyd. Uczel. Polit. Poznan., Poznań 1976.

[92] Węglarz, J.: Time-optimal control of resource allocation in a complex of operations framework. IEEE Trans. Syst. Man Cyber. SMC-6, No 11, 1976, 783-788.

[93] Węglarz, J.: Project scheduling with discrete and continuous resources. IEEE Trans. Syst. Man and Cyber. SMC-9, No 10, 1979, 644-650.

[94] Węglarz, J.: Multiprocessor scheduling with memory allocation - a deterministic approach. IEEE Trans. Comput., Vol. C-29, No 8, 1980, 708-709.

[95] Węglarz, J.: Project scheduling with continuously-divisible, doubly constrained resources. Mgmt. Sci., Vol. 27, No 3, 1981, 1040-1052.

[96] Węglarz, J.: Scheduling under continuous performing speed vs. resource amount activity models. in: Advances in Project Scheduling edited by R. Słowiński and j. Węglarz, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1989.

[97] Węglarz, J.: Synthesis Problems in Allocating Continuous, Doubly Constrained Resources among Dynamic Activities. in: Operational Research'90, ed. H.E. Bradley, Pergamon Press PLC, Oxford 1990, 715-724.

[98] Williams, T.J. (ed.): Analysis and design of hierarchical control systems: with special reference to steel plant operations, North-Holland, 1986.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1995 r.

Abstract

In this paper we make a survey of resource allocation problems, scheduling and sequencing problems and sequencing problems with resource constraints. A practical example describing technological process between converter plants and blooming mill in steel mill is given. The problem appearing during this process is modelled by some new single machine scheduling problem with precedence constraints. This problem is considered under the assumption that job release dates are identical linear functions of resour ces. It has been proved that the problem under consideration is strongly NP-hard. An approximate algorithm with the worst case analysis is presented. Some concluding remarks summarizing the results obtained up to now are given as well.