ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: AUTOMATYKA z. 116 Nr kol. 1296

Tadeusz PUCHAŁKA
Politechnika Poznańska

GENERACJA STATYSTYCZNIE OPTYMALNEJ DECYZJI ADAPTACYJNEJ W PROCESACH DYSKRETNYCH

Streszczenie. Sterowanie adaptacyjne jest wykorzystywane w wielu procesach dyskretnych. Przedmiotem pracy jest dyskretne sterowanie adaptacyjne ze statystycznie określoną regułą decyzyjną. W artykule dokonano: 1) sformułowania statystycznie optymalnej decyzji adaptacyjnej, 2) skonstruowania reguł decyzyjnych w dwóch przypadkach: braku (istnienia) kontrowersji między sterowaniem i procesem uczenia się. Zamieszczono przykład prostego dyskretnego procesu adaptacji.

GENERATION OF STATISTICALLY OPTIMAL ADAPTIVE DECISION IN DISCRETE PROCESSES

Summary. The adaptive control is used in many discrete processes. In the paper is considered discrete adaptive control with statistically defined decision rule. The main obtained results are: 1) definition of statistically optimal adaptive decision, 2) determination of decision rules in two cases: without (with) controversion between control and learning. The example of simple discrete adaptive process is given.

ERZEUGUNG VON STATISTISCH OPTIMALEN ENTSCHEIDUNGSREGELN IN DISKRETEN PROZESSEN

Zusammenfassung. Die adaptive Steuerung wird in zahlreichen diskreten Prozessen benutzt. Eine diskrete adaptive Steuerung mit statistisch bestimmter Entscheidungsregel wird als Ziel des vorliegenden Beitrags bestimmt. Es werden folgende Probleme gelöst: 1) Formulierung einer statistisch optimalen Entscheidungsregel, 2) Ermittlung der Entscheidungsregel in zwei konkreten Fällen: Existenz/Fehlen eines Widerspruchs zwischen der Steuerung und dem Lernprozess. Ein Beispiel des elementaren diskreten Adaptierung Prozesses wird dargestellt.

1.Oznaczenia i założenia

1.1. Oznaczenia

Y - zbiór możliwych sygnałów wyjściowych procesu,

M - zbiór funkcji korzyści, określony na zbiorze Y,

$M = \{\mu(y) | y \in Y\}$,

Z - iloczyn kartezjański $Z = S \times Z'$, gdzie:

S - zbiór możliwych stanów procesu,

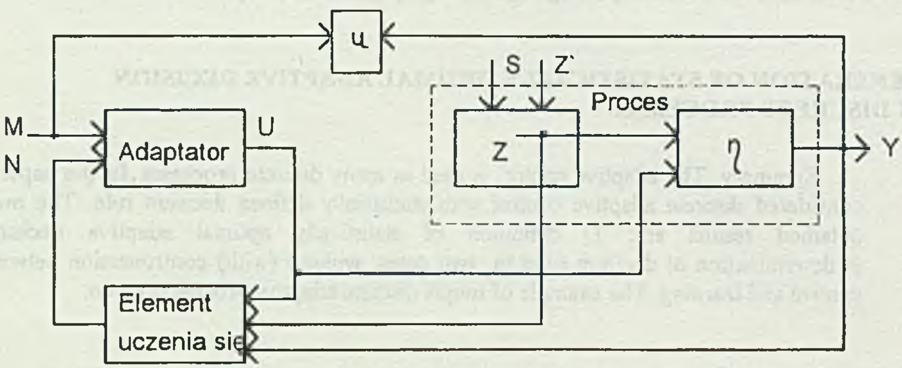
Z' - zbiór możliwych zakłóceń,

U - skończony zbiór sygnałów sterujących,

N - zbiór dyrektyw uczenia się systemu.

1.2. Założenia

Schemat blokowy systemu przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys.1. Schemat blokowy dyskretnego, adaptacyjnego systemu
Fig.1. Block-scheme of discrete adaptive system

- M jest dane dla systemu, który w każdej chwili czasu zna aktualne μ,
- a priori znany jest rozkład prawdopodobieństwa $\xi(z)$, określony na zbiorze Z (w przypadku niepełnej jego znajomości ma miejsce proces uczenia się),
- przebieg dyskretnego procesu określony jest przez rozkład warunkowego prawdopodobieństwa η

$$(z,u_i) \in Z \times U \Rightarrow \eta(y / z, u_i) : y \in Y .$$

Zbiór rozkładów prawdopodobieństwa η implikowany przez $Z \times U$ oznaczamy jako H.

W tak określonym systemie istnieją równolegle: adaptacja sterowania u ze względu na $z \in Z$ i proces uczenia się systemu.

2. Proces adaptacji w systemie

Proces adaptacji jest rozumiany jako podział Π na zbiorze Z, tj.:

$$\Pi = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$$
$$Z_i \cap Z_j = \begin{cases} \phi, & i \neq j \\ Z_i, & i = j \end{cases} \tag{1}$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} Z_i = Z.$$

Klasę wszystkich możliwych podziałów na Z oznaczamy przez Π. Przynależność $z \in Z_i$ definiuje sterowanie u jako $u_i \in U$. Określenia $\Pi \in \pi$ dokonuje się zgodnie z zasadą wyboru strategii Bayesa.

Dla danego $z \in Z$ poszukujemy:

$$k(z) = \max_{u_i \in U} \int_y \mu(y) \eta(y/z, u_i) dy. \tag{2}$$

Biorąc pod uwagę, iż rozkład $\xi(z)$ jest a priori znany, możemy wprowadzić nowe uśrednienie funkcji korzyści:

$$k_i(\Pi) = \iint_{Z_i U} \mu(y) \eta(y/z, u_i) \xi(z) dy dz, \tag{3}$$

gdzie: $Z_i \in \Pi$.

Poszukując maksymalnej wartości uśrednionej funkcji korzyści znajdujemy $\Pi \in \pi$ jako spełnienie warunku:

$$K = \max_{\Pi \in \pi} \sum_{i=1}^{n} k_i(\Pi). \tag{4}$$

Znaleziony na tej drodze optymalny podział Π jest optymalną decyzją statystyczną.

Adaptacja może mieć również miejsce ze względu na $(\mu, z) \in M \times Z$. W rozważaniach przyjmujemy, iż w analizowanym przedziale czasu $\mu = const$.

3. Proces uczenia się w systemie

3.1. System bez kontrowersji między sterowaniem a procesem uczenia się

W rozważanej klasie systemów proces uczenia się podporządkowany jest procesowi adaptacji. Jako podstawę wprowadza się za Bushem Mostellerem [2] stochastyczny model uczenia się wykorzystywany przez Bellmana i Sakaguchiego w procesach adaptacyjnych.

Przedmiotem procesu uczenia się są rozkłady prawdopodobieństwa $\eta(y/z, u_t)$, tj. cała klasa H.

Struktura procesu uczenia się może być określona jako ciąg klas rozkładów prawdopodobieństwa:

$$L_H = (H_t)_{t=1}^{N}. \tag{5}$$

Statystyczna decyzja w procesie uwzględniającym proces uczenia się określona jest odpowiedniością:

$$\Pi_t \hat{=} \max_{\Pi \in \pi} \sum_{i=1}^{n} k_{t,i}(t), \tag{6}$$

gdzie:

$$k_{t,i} = \iint_{Z,Y} \mu(y)\,\eta_t(y/u_i z)\,\xi(z)\,dy\,dz. \tag{7}$$

Dla całego procesu dyskretnego struktura decyzyjna ma postać:

$$(\Pi_t)_{t=1}^{N} \hat{=} \left(\max_{\Pi \in \pi} \sum_{i=1}^{n} k_{t,i} \right)_{t=1}^{N}. \tag{8}$$

3.2. System z istnieniem kontrowersji między sterowaniem a procesem uczenia się

Przy założenia istnienia kontrowersji między sterowaniem a procesem uczenia się problem sprowadza się, przy ograniczeniu do N kroków, do wprowadzenia średniej ważonej funkcji korzyści na zbiorze U.

Dla danego $z \in Z$ istnieje rozkład funkcji korzyści $\mu_c(u_i), u_i \in U$ ze względu na wyrażenie:

$$\int_Y \mu(y/z, u_i)dy.$$

Istnieje również drugi rozkład funkcji korzyści $\mu_l(u_i)$ ze względu na informację otrzymywaną w procesie uczenia się przy wykorzystaniu sterowania u_i. Funkcje μ_c i u_l skonstruowane są na tym samym zbiorze U. Można więc wprowadzić ogólną funkcję korzyści $\mu(u)$ sumującą bezwzględne wartości korzyści, co w zapisie symbolicznym można ująć:

$$\mu(u_i) = \mu_c(u_i) + \mu_l(u_i). \tag{9}$$

W tej sytuacji wybór optymalnego podziału П jest statystyczną decyzją:

$$\Pi \hat{=} \max_{\Pi \in \pi} \sum_{i=1}^{n} k_i(\Pi), \tag{10}$$

gdzie:

$$k_i(\Pi) = \int_{Z_i} \mu(u_i)\xi(z)dz.$$

Analogicznie sformułowany jest problem dla całego procesu dyskretnego t=1, ..., N.

Po określeniu procesu uczenia się można zdefiniować wektor $\overline{N}(H_t, z_t)$ jako sygnał wyjściowy elementu uczenia się, przy czym H_t reprezentuje proces uczenia się.

4. Przykład prostego procesu adaptacji

W celu uproszczenia egzemplifikacji zakłada się, iż w systemie (por. rys.1) nie ma elementu uczenia się, tzn. sygnały Y,Z i $\mu(y)$ doprowadzane są bezpośrednio na wejście adaptatora, a sygnały U z niego wyprowadzane sterują procesem.

Załóżmy, iż:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\},\ Z' = \{z_1', z_2'\}, \tag{11}$$

czyli:

$$
\begin{array}{cccccccc}
Z = \{(s_1, z_1'), & (s_1, z_2'), & (s_2, z_1'), & (s_2, z_2'), & (s_3, z_1'), & (s_3, z_2'), & (s_4, z_1'), & (s_4, z_2')\} \\
z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8
\end{array}
\tag{12}
$$

Przyjmujemy, że:

$$U = \{u_1, u_2, u_3\} \tag{13}$$

Zbiór rezultatów Y określamy następująco: (14)

$$
\begin{array}{lccccccccl}
 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7 & Y_8 & \\
Y(z_1) = & \{(z_1, z_1), & (z_1, z_2), & (z_1, z_3), & (z_1, z_4), & (z_1, z_5), & (z_1, z_6), & (z_1, z_7), & (z_1, z_8)\} = & z_1 \times Z \\
Y(z_2) = & \{(z_2, z_1), & (z_2, z_2), & (z_2, z_3), & (z_2, z_4), & (z_2, z_5), & (z_2, z_6), & (z_2, z_7), & (z_2, z_8)\} = & z_2 \times Z \\
Y(z_3) = & \{(z_3, z_1), & (z_3, z_2), & (z_3, z_3), & (z_3, z_4), & (z_3, z_5), & (z_3, z_6), & (z_3, z_7), & (z_3, z_8)\} = & z_3 \times Z \\
Y(z_4) = & \{(z_4, z_1), & (z_4, z_2), & (z_4, z_3), & (z_4, z_4), & (z_4, z_5), & (z_4, z_6), & (z_4, z_7), & (z_4, z_8)\} = & z_4 \times Z \\
Y(z_5) = & \{(z_5, z_1), & (z_5, z_2), & (z_5, z_3), & (z_5, z_4), & (z_5, z_5), & (z_5, z_6), & (z_5, z_7), & (z_5, z_8)\} = & z_5 \times Z \\
Y(z_6) = & \{(z_6, z_1), & (z_6, z_2), & (z_6, z_3), & (z_6, z_4), & (z_6, z_5), & (z_6, z_6), & (z_6, z_7), & (z_6, z_8)\} = & z_6 \times Z \\
Y(z_7) = & \{(z_7, z_1), & (z_7, z_2), & (z_7, z_3), & (z_7, z_4), & (z_7, z_5), & (z_7, z_6), & (z_7, z_7), & (z_7, z_8)\} = & z_7 \times Z \\
Y(z_8) = & \{(z_8, z_1), & (z_8, z_2), & (z_8, z_3), & (z_8, z_4), & (z_8, z_5), & (z_8, z_6), & (z_8, z_7), & (z_8, z_8)\} = & z_8 \times Z
\end{array}
$$

Zakładamy wartości funkcji korzyści $\mu(y)$ wg tabeli:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
z_1	4	3	0	1	6	5	3	0
z_2	3	4	1	4	1	2	1	3
z_3	2	1	2	3	4	3	4	2
z_4	2	0	3	2	3	4	2	4
z_5	0	3	4	1	2	1	0	3
z_6	1	2	1	5	1	3	1	2
z_7	3	1	2	3	4	0	4	1
z_8	1	4	3	2	1	2	1	0

(15)

oraz rozkłady prawdopodobieństw $\eta\left(y/z,u_i\right)$ wg tabel:

u_1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
z_1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
z_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
z_3	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
z_4	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
z_5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
z_6	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
z_7	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
z_8	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0

u_2	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
z_1	0	0	1	0	0	0	0	0
z_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
z_3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0
z_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
z_5	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0
z_6	0	1	0	0	0	0	0	0
z_7	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
z_8	0	0	0	0	0	1	0	0

(16)

u_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8
z_1	1	0	0	0	0	0	0	0
z_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
z_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0
z_4	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
z_5	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
z_6	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
z_7	0	0	0	1	0	0	0	0
z_8	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Dla przypadku dyskretnego zależność całkową określoną wzorem (2) możemy zapisać jako zależność sumową:

$$k^{*} = \max_{u_k} \sum_{i=1}^{8} y(Y_i/z_j)\eta(Y_i/z_j, u_k) = \max_{u_k} k(z_j, u_k). \tag{17}$$

Odpowiednio dla poszczególnych z_j otrzymujemy:

dla z_1

$u_1 \hat{=} k(z_1, u_1) = 4\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot \frac{1}{2} + 1\cdot 0 + 6\cdot \frac{1}{2} + 5\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot 0 = 3$

$u_2 \hat{=} k(z_1, u_2) = 0$

$u_3 \hat{=} k(z_1, u_3) = 4$

dla z_2

$u_1 \hat{=} k(z_2, u_1) = 3\frac{2}{3}$

$u_2 \hat{=} k(z_2, u_2) = 3$

$u_3 \hat{=} k(z_2, u_3) = 2\frac{1}{2}$

dla z_3

$u_1 \hat{=} k(z_3, u_1) = 2\frac{1}{4}$

$u_2 \hat{=} k(z_3, u_2) = 2\frac{2}{3}$

$u_3 \hat{=} k(z_3, u_3) = 2\frac{1}{4}$

dla z_4

$u_1 \hat{=} k(z_4, u_1) = 3$

$u_2 \hat{=} k(z_4, u_2) = 2\frac{1}{2}$

$u_3 \hat{=} k(z_4, u_3) = 3$

wybieramy u_1

dla z_5

$u_1 \hat{=} k(z_5, u_1) = 1\frac{1}{2}$

$u_2 \hat{=} k(z_5, u_2) = 1\frac{2}{3}$

$u_3 \hat{=} k(z_5, u_3) = 1\frac{1}{3}$

dla z_6

$u_1 \hat{=} k(z_6, u_1) = 1$

$u_2 \hat{=} k(z_6, u_2) = 2$

$u_3 \hat{=} k(z_6, u_3) = 1$

dla z_7

$u_1 \hat{=} k(z_7, u_1) = 2\frac{1}{3}$

$u_2 \hat{=} k(z_7, u_2) = 1\frac{3}{4}$

$u_3 \hat{=} k(z_7, u_3) = 3$

dla z_8

$$u_1 \hat{=} k(z_8, u_1) = 1\tfrac{3}{4}$$
$$u_2 \hat{=} k(z_8, u_2) = 2$$
$$u_3 \hat{=} k(z_8, u_3) = \tfrac{2}{3}$$

Optymalny podział Π jest więc następujący:

$$\Pi = \{\underset{\substack{Z_1 \\ (u_1)}}{(z_2, z_4)}; \underset{\substack{Z_2 \\ (u_2)}}{(z_3, z_5, z_6, z_8)}; \underset{\substack{Z_3 \\ (u_3)}}{(z_1, z_7)}\}. \tag{18}$$

W procesie uczenia się należy określić rozkłady $\eta(y/z,u)$ obiektywnie istniejące, lecz nie znane a priori systemowi. W punkcie wyjścia należy przyjąć rozkład najbardziej pesymistyczny, tzn. równomierny, $\eta(Y_i/z_j,u_k) = const$ *dla* $i = 1,\ldots,8, j = 1,\ldots,8, k = 1,2,3.$

LITERATURA

[1] Bellman R.: Adaptive control processes. A Guided Tour. Princeton University, Princeton, New Yersey 1961.

[2] Bush R.R., Estes W.K.(editors): Studies in mathematical learning theory. University Press, Stanford, California 1959.

[3] Puchałka T., Knast R.: Proste adaptacyjne procesy decyzyjne. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XI, zeszyt 2 (1966), ss. 177-188.

[4] Sakaguchi M.: Information pattern, learning structure and optimal decision rule. Information and Control. No 6 (1963), ss. 218-229.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1995 r.

Abstract

In the paper an adaptive process is defined as a partition of the set with respect to which an adaptation is performed. The partition represents an optimal statistical decision. The learning process is based on Bush's and Mosteller's stochastic model of learning. The block-scheme of discrete adaptive system is shown on Fig.1.

The main assumptions are: 1) M is done for system, which knows in each time actual μ, 2) distribution probability $\xi(z)$, defined on the set Z, is known a priori 3) probability of process is defined as follows: $(z,u_i)\in Z\times U \Rightarrow \eta(y/z,u_i): y\in Y$.

The optimal statistical decision for adaptive process is realizing the condition:

$$K=\max_{1\le\pi}\sum_{i=1}^{n}k_i(\Pi),$$

where:

$$k_i(\Pi)=\iint_{Z_iY}\mu(y)\,\eta(y/z,u_i)\,dy\,dz\,.$$

The statistical decision for adaptive process, respecting learning process (without controversion between control and learning), is defined:

$$\Pi_t \hat{=} \max_{\Pi\in\pi}\sum_{i=1}^{n}k_{t,i}(\Pi),$$

where:

$$k_{t,i}=\iint_{Z_iY}\mu(y)\,\eta_t(y/z,u_i)\,dy\,dz\,,$$

$$\eta_t\in H_t\,/\,H_t-\text{class of distributions }\eta\text{ at }t/.$$

In the case of controversion between control and learning the optimal partition Π is statistical decision:

$$\Pi \hat{=} \max_{\Pi\in\pi}\sum_{i=1}^{n}k_i(\Pi),$$

where:

$$k_i(\Pi)=\int_{Z_i}\mu(u_i)\,\xi(z)\,dz,$$

$$\mu(u_i)=\mu_c(u_i)+_b u_l(u_i),$$

$\mu_c(u_i)$ – gain function for control process,

$\mu_l(u_i)$ – gain function for learning process.