ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1995
Seria: AUTOMATYKA z.116 Nr kol. 1296

Jan KAŁUSKI
Politechnika Śląska

O MODELACH DETERMINISTYCZNYCH I PROBABILISTYCZNYCH

Streszczenie. W pracy, wychodząc z ogólnych fizycznych zasad tworzenia modeli matematycznych, omówiono zagadnienia związane z powstawaniem deterministycznych i probabilistycznych modeli zjawisk i procesów. W obu przypadkach ograniczono się do modeli tzw. "ruchu uogólnionego", tzn. "ruchu" systemów, obiektów, elementów i cząstek w wyniku deterministycznego lub losowego oddziaływania. Przedstawiono definicje obu modeli.

ABOUT DETERMINISTIC AND PROBABILISTIC MODELS

Summary. In the paper, basing on universal laws of physics, which are used for constructing mathematical models, problems related to creating deterministic and probabilistic models of occurrences and processes are discussed. Both cases are only reduced to so - called "generalized motion " models, that means motion of systems, objects, elements and small parts caused by deterministic or random influence. Definitions of both models are presented.

ÜBER DETERMINISTISCHE UND PROBABILISTISCHE MODELLE

Zusammenfassung. In der Arbeit, ausgehend von allgemeinen physikalischen Grundsätzen der mathematischen Modellbildung, werden die Probleme der deterministischen und probabilistischen Modellierung der Erscheinungen und Prozessen geschrieben. In beiden Fällen beschränkt man sich auf Modelle der so genannten "verallgemeinerten Bewegung", d.h. "Bewegung" der Systeme, der Objekte, der Elemente und der Teile als Resultat der deterministischen oder stochastischen Einwirkung. Die Beschreibung der beiden Modelle wird dargestellt.

1. Wstęp

Modele matematyczne stosowane dziś powszechnie bodajże w każdej dziedzinie działalności człowieka są nie tylko znamieniem czasu będącego odzwierciedleniem faktu, iż człowiek coraz głębiej przeniknął w obiektywną rzeczywistość otaczającego go świata, nie tylko modą spowodowaną powszechną komputeryzacją, dla której modele matematyczne są wręcz nieodzowne; modele matematyczne są przede wszystkim tą obiektywną rzeczywistością, istniejącą niejednokrotnie niezależnie od nas i wbrew naszym odczuciom w postaci różnych praw fizycznych

Rozum i odczucia człowieka przez tysiąclecia kształtowały i kształtują nadal jego teoretyczne (rozumowe, dedukcyjne) i doświadczalne (odczuciowe) podejście do zjawisk

przyrody. Poza rozumem i odczuciem świat nie istnieje. Można zatem powiedzieć, że liczba modeli matematycznych jest wprost proporcjonalna do naszej wiedzy o otaczającym nas makro- i mikroświecie i stanowi o rzeczywistym wymiarze tego świata.

Wiedza gromadzona w obu tych wręcz antagonistycznych sferach działalności człowieka wydaje się, że w równym stopniu prowadziła i prowadzi obecnie do powstawania różnych modeli matematycznych. Modele te, budowane i postrzegane na różnym poziomie abstrakcji, mogą być odniesione do dwóch zasadniczo odmiennych kategorii. Kryterium podziału jest tzw. determinizm modelu lub jego brak. I tak, na przykład, ruch ciał niebieskich jest całkowicie zdeterminowany, natomiast ruch cząstek gazu doskonałego jest całkowicie niezdeterminowany. Takich przykładów można nieskończenie mnożyć. Stad wniosek, że otaczająca nas rzeczywistość jest tak samo zdeterminowana jak i niezdeterminowana i tylko konkretny cel i potrzeba naszej działalności określa, jakim modelem tej rzeczywistości należy się posługiwać. Obecnie dysponujemy olbrzymią liczbą zarówno deterministycznych, jak i niezdeterminowanych, tzw. probabilistycznych (losowych) modeli matematycznych.

W dalszej części pracy zajmiemy się teoretycznymi i doświadczalnymi zasadami tworzenia modeli matematycznych (punkt 2), zdefiniujemy model deterministyczny i probabilistyczny (punkt 3) oraz omówimy szczegółowo dwa modele, opisujące tzw. "ruch uogólniony" w fizyce, którego przedstawicielami tu będą ruch punktu materialnego oraz ruch Browna (punkt 4).

2. Doświadczenie i teoria, czyli ogólne zasady tworzenia modeli matematycznych

Powszechnie uważa się, że teoretyczne modele mogą powstawać tylko na podstawie solidnego materiału doświadczalnego, w zupełności przedstawiającego właściwości badanego zjawiska czy obiektu. Znana nam historia daje liczne przykłady nie potwierdzające takiej koncepcji. Najbardziej spektakularnym przykładem może tu być ogólna teoria względności. Jak wiadomo, teoria ta powstała w wyniku uogólnienia faktu o tożsamości inercyjnej i grawitacyjnej masy. Doświadczalne potwierdzenie tej teorii można obserwować dopiero dzisiaj, gdy zaplanowano specjalne doświadczenia oparte na nowoczesnej technice pomiarowej. Nawet odkrycie prawa ciążenia powszechnego, które zwykle wiąże się z olbrzymim materiałem doświadczalnym zebranym przez Tycho Brahe'go, a następnie błyskotliwie opracowanym przez Keplera, w rzeczy samej zostało tak naprawdę sformułowane na podstawie właściwie jednego faktu ustanowionego przez Keplera, a mianowicie, na tzw. trzecim prawie określającym prawo podobieństwa orbit planetarnych [1]. A więc do sformułowania tak fundamentalnego prawa być może nie było potrzeby gromadzenia olbrzymiego materiału eksperymentalnego. Rzecz jasna w niczym to nie pomniejsza zasług Tycho Brahe'go i Keplera dla nauki. Ogromna eksperymentalna praca wykonana przez nich ciągle jeszcze dziś potwierdza zasadność przyjętej teorii.[5,7].

Przykładów przytoczonych wyżej można dowolnie mnożyć. Liczba przeprowadzonych dziś eksperymentów w różnych dziedzinach nauki w celu otrzymania dostatecznie pełnych i wiarygodnych teorii do opisu obserwowanych zjawisk, oraz liczba otrzymanych podstawowych praw ważnych dziś już ugruntowanych teorii na podstawie nielicznych doświadczeń, a czasem tylko pojedynczych faktów jest tak duża, że prowadzi to do pewnej oczywistej prawidłowości.

Pobudzającym czynnikiem do formułowania nowej teorii jest zwykle nieduża liczba fundamentalnych faktów. Zwiększenie w tym przypadku liczby doświadczalnych danych niewiele wnosi nowego do formułowanego modelu, a czasami nawet przeszkadza, gdyż zaciemnia obraz idealnego wyobrażenia. Oczywiście nie należy rozumieć, że doświadczenia są niepotrzebne i należy zajmować się tylko pojedynczymi faktami (przebłyskami), dającymi bodziec do formułowania nowej teorii. Chodzi oto, że dla budowy modelu obserwowanego zjawiska liczba eksperymentalnych danych nie ma zasadniczego znaczenia. Można posunąć się jeszcze dalej; same eksperymentalne dane, jak doskonałe one by nie były, nie wystarczą do zbudowania odpowiednio dobrej teorii, tzn. takiej, która by w sposób adekwatny odzwierciedlała rzeczywistość.

Można więc powiedzieć, że w taki sam sposób jak teoria znajduje oparcie w eksperymentalnych danych, tak i doświadczenie zawiera w sobie niezbędną informację o modelu, jeżeli jest przeprowadzone adekwatnie do teoretycznej koncepcji. Przeprowadzenie nawet najbardziej wyrafinowanych doświadczeń bez koncepcji, o jakie dane chodzi, jest tak samo bezproduktywne jak i teoretyzowanie bez uwzględnienia chociażby pojedynczych faktów dotyczących badanego zjawiska.

Eksperyment jako prosty zbiór obserwowanych faktów przy nieprawidłowej koncepcji może zaprowadzić badacza w ślepą uliczkę, co niejednokrotnie w historii miało miejsce. Bezpośrednie obserwacje ciał niebieskich doprowadziły do tego, że ludzkość przez dłuższy czas wyznawała koncepcję geocentryzmu. Bezpośrednia obserwacja ruchu ciał doprowadziła Arystotelesa do powstania mechaniki, która przez prawie 2 tysiąclecia zawładnęła nauką i która w ostatecznym rozrachunku okazała się fałszywa.[1,14].

Z kolei brak wiary w bezpośrednie doświadczenie, jako zwykłego zbioru czuciowo obserwowanych faktów, doprowadziło Kartezjusza w "Początkach filozofii", gdzie dał on wykład o teorii udaru, do paradoksalnego stwierdzenia:"...Wszystkie te przeprowadzone twierdzenia są tak bardzo prawdziwe, że nawet gdyby doświadczenie pokazało zupełnie coś odwrotnego, to bylibyśmy jednak zmuszeni bardziej wierzyć w nasz rozum niż naszym odczuciom..."[4,13,14]. Ostatecznie tak misternie wyłożona teoria okazała się fałszywa. Nie zmniejsza to jednak w niczym ostrości jego wypowiedzi. Przypomnijmy, iż Kopernik - odkrywca heliocentryzmu - był oskarżany przez współczesnych o to, że jego teoria nie zgadza się z eksperymentalnymi danymi! Kopernik był jednak niewzruszony, gdyż mówiąc słowami

Kartezjusza, był on przekonany, że są sytuacje, w których "... jesteśmy zmuszeni bardziej wierzyć w nasz rozum, niż naszym odczuciom..."[2,3].

A tak na marginesie, dziś już wiemy, dlaczego starożytni zupełnie odwrotnie interpretowali obserwowane zjawisko. Chodzi o to, że planety krążą wokół Słońca po orbitach eliptycznych, a nie kołowych.

Można więc powiedzieć, że jeżeli prześledzimy historię rozwoju nauk przyrodniczych od Arystotelesa do Einsteina i Bohra, to daje się zauważyć, że cała nauka przepełniona jest przeciwieństwami między bezpośrednim doświadczeniem w postaci zbioru obserwowanych faktów a formalno-logicznymi modelami objaśniającymi te fakty.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można pokusić się o stwierdzenie, że gdy mamy do czynienia z budową modelu matematycznego w nietradycyjnych dla nauki obszarach badań, niezbędne jest wykorzystanie doświadczeń w budowie modeli matematycznych w takich naukach, jak fizyka, mechnika, astronomia i innych naukach przyrodniczych. W doświadczeniach tych jest bowiem coś obiektywnego, niezależnego od konkretnej modelowanej sytuacji. Stąd jakość modelu powinna być oceniana takimi samymi kryteriami, które Einstein sformułował dla oceny fizycznych teorii. Według Einsteina odpowiedniość teorii do eksperymentu jest warunkiem niezbędnym, lecz niewystarczającym. Kryterium to zostało przez niego nazwane kryterium *zewnętrznego podobieństwa*. Drugie kryterium, które właściwie było już eksponowane przez Kartezjusza, Einstein nazwał kryterium *zewnętrznej doskonałości*.[6]. Chodzi tu nie o materiał doświadczalny, lecz o przesłanki samej teorii o ich logiczności i naturalności.

3. Definicja modelu deterministycznego i probabilistycznego

Modelem deterministycznym będziemy nazywali każdy opis badanego zjawiska pozwalający na jego wielokrotne odtworzenie i jednoznaczne prognozowanie przebiegu w określonych takich samych warunkach.

W formie matematycznej (analitycznej) deterministyczne modele są to funkcje analityczne liniowe, nieliniowe, regularne i singularne, przedstawiające zależność cech badanego zjawiska w funkcji określonej zmiennej niezależnej. Liczba deterministycznych analitycznych modeli jest ograniczona tylko liczbą algebraicznych zależności wynikających z takiej czy innej aksjomatyki.

Definicja modelu probabilistycznego nie jest już taka prosta i jednoznaczna, gdyż mamy tu do czynienia tylko z jedną unormowaną miarą Lebesguea, nazywaną miarą probabilistyczną, a będącą prawdopodobieństwem zajścia określonego zdarzenia losowego.

W celu precyzyjnego zdefiniowania modelu probabilistycznego oznaczmy przez Ω przestrzeń losowych zdarzeń elementarnych ω, tzn. $\omega \in \Omega$. Niech $\Im$ będzie ciałem zbioru zdarzeń powstałym ze zdarzeń ω poprzez skończoną liczbę operacji dodawania, odejmowania

i mnożenia mnogościowego w taki sposób, że również $\Omega \in \Im$. Jeśli przestrzeń Ω jest nieskończona, to $\Im$ jest σ- ciałem. Jeżeli $\Omega \in R^1$ lub $\Omega \in R^n$, to $\Im$ jest σ - ciałem β - borelowskim(tzn. σ - ciało borelowskich podzbiorów metrycznej (topologicznej) przestrzeni X, a więc σ - ciało wyindukowane przez otwarte zbiory na R, które dalej oznaczać będziemy przez β_X).

Trójka (Ω, β_X, P) stanowi przestrzeń probabilistyczną, gdzie (Ω, β_X) jest metryczną przestrzenią mierzalną, a (β_X, P) jest właśnie ***modelem probabilistycznym badanego losowego zjawiska.***

Model probabilistyczny jest więc określony wówczas, gdy jest określony zbiór β_X, zawierający wszystkie możliwe zdarzenia dotyczące badanego zjawiska losowego, łącznie ze zdarzeniem niemożliwym oraz gdy określono, w jaki sposób należy obliczać miarę probabilistyczną P dla każdego wyróżnionego zdarzenia z β_X. Czasami modelem probabilistycznym nazywana jest cała trójka (Ω, β_X, P). Jeżeli na przestrzeni (Ω, β_X, P) określona jest zmienna losowa $X(\omega) = X$, to modelem probabilistycznym w tym przypadku będzie dystrybuanta tej zmiennej w postaci

$$F_X(x) \overset{def}{=} P(X < x) \tag{1}$$

Zauważmy, że każda dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej, ciągłej lub singularnej jest w pełni zdeterminowaną funkcją analityczną o określonych właściwościach. Nie dają one jednak pełnego opisu zjawiska losowego. Weźmy dla przykładu taki fakt, że dla zmiennej losowej ciągłej $P(X = x) = 0$ dla każdego $x \in R$! Zdarzenie *(X=x)* jednak realnie istnieje i powinno mieć jakieś określone prawdopodobieństwo. Widać to z oczywistego postulatu

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X = x) = 1. \tag{2}$$

Omawiany fakt niezbicie świadczy o nieadekwatności przedstawienia modeli probabilistycznych za pomocą zdeterminowanych funkcji analitycznych. Na razie jednak nie mamy nic lepszego. Świadczy to również o tym, że budowa modelu probabilistycznego, wyłączając być może sytuacje, gdzie wystarczająca byłaby dyskretna przestrzeń zdarzeń elementarnych, jest niezwykle trudna i do dziś nie ma jednoznacznej interpretacji postaci modelu analitycznego odpowiadającego badanemu losowemu zjawisku.[10].

4. Modele matematyczne tzw. "ruchu uogólnionego"

W celu uwiarygodnienia naszych rozważań przedstawimy obecnie dwa wybrane modele matematyczne; jeden model w pełni zdeterminowany, drugi - w pełni probabilistyczny. Oba modele będą dotyczyły opisu zjawiska tzw. "ruchu uogólnionego".

"Ruchem uogólnionym" będziemy nazywali zmianę miejsca systemu w określonej przestrzeni. Szczególnym przypadkiem takiego ruchu zdeterminowanego jest ruch punktu

materialnego w przestrzeni trójwymiarowej, natomiast ruchu niezdeterminowanego chaotyczny ruch cząstek, zwany ruchem Browna.

Jako pierwszy przykład rozpatrzmy zwykły rzut kamieniem pod kątem do horyzontu. Nie bacząc na szkolny wydźwięk proponowanego przykładu, jego znaczenie w rozwoju idei fizyki ruchu było nieocenione. W celu jak najlepszego przybliżenia całości wspomnianej idei rozpocznijmy od samego początku.

Według Arystotelesa dla poruszającego się ciała "siła jest proporcjonajna do szybkości", a dzisiejszymi środkami matematycznego zapisu można to wyrazić w nastepujący sposób

$$F=kv \tag{3}$$

gdzie, F - wektor siły, v - wektor prędkości, k - współczynnik proporcjonalności. Oczywiście wzór jest ważny tylko dla punktu materialnego. Jeżeli abstrahować od skończonych wymiarów ciała i sprowadzić go do punktu materialnego, to wzór (3) można zastąpić wzorem

$$k\frac{dr}{dt} = F \tag{4}$$

gdzie $v = \frac{dr}{dt}$, r - promień-wektor ruchu punktu w pewnym systemie odniesienia.[12].

Cała istota stosowania przedstawionego deterministycznego modelu polega właśnie na tym "systemie odniesienia", jako że nie ma systemu absolutnie nieruchomego. Stąd każdy ruch jest zawsze ruchem względnym. Stosowanie wzoru (3) prowadzi jednak do konieczności istnienia absolutnie nieruchomego systemu odniesienia. Za taki system w niektórych przypadkach można uznać Ziemię.

Galileusz pokazał, że w żaden sposób nie można ustalić, czy istnieje absolutnie nieruchomy system odniesienia, gdyż istnieją takie ruchome systemy odniesienia, że znajdujący się w nich obserwator żadnymi środkami nie zdoła stwierdzić ruchu tych systemów. Fakt ten był fundamentalny dla dalszego rozwoju teorii ruchu (pomijamy tu, rzecz jasna, fakt względności czasu i przekształcenie Lorenza, gdyż szybkość procesów makroświata, a z takimi właśnie mamy do czynienia, jest o kilkanaście rzędów mniejsza niż szybkość światła) [8].

Jaka więc istnieje alternatywa dla prawa ruchu wyrażonego wzorem (3), będącego tak samo prostym a jednocześnie spełniającym zasadę względności Galileusza? Jedną z dróg jest zróżniczkowanie v po t we wzorze (3).

$$k\frac{dv}{dt} = F \tag{5}$$

Sens tego prawa w zupełności różni się od prawa Arystotelesa. Według Arystotelesa siła jest przyczyną dowolnego wymuszonego ruchu. Według prawa danego wzorem (5) siła F występuje już tylko jako przyczyna zmiany w jednostajnym prostoliniowym ruchu. W tym też względzie utożsamia się ruch jednostajny prostoliniowy ze stanem spoczynku. Jedno przechodzi w drugie poprzez odpowiedni wybór systemu odniesienia.

Wróćmy obecnie do przykładu z rzucaniem kamienia. Niech α_0 będzie kątem rzutu do horyzontu oraz w pewnej chwili t_0 prędkość kamienia wynosi v_0. Dalej, rzecz jasna, nie będziemy wdawali się w drobiazgowy opis powszechnie znanego eksperymentu. Rozumiemy, że zakrzywienie trajektorii ruchu kamienia nie wynika tylko z oporu stawianego przez powietrze, lecz przede wszystkim z istnienia powszechnego przyciągania ziemskiego. Wybierając system odniesienia związany z powierzchnią Ziemi oraz F - siłę ciężkości otrzymamy, stosując wzór (5), następujące równanie ruchu kamienia

$$k\frac{du}{dt} = 0, \qquad k\frac{dv}{dt} = -F \tag{6}$$

Siła oporu o powietrze w tym wzorze została pominięta. Po scałkowaniu (6) otrzymamy:

$$u = v_o \cos\alpha_0, \qquad v = v_0 \sin\alpha_0 - \frac{F}{k}(t - t_0). \tag{7}$$

Stąd łatwo znaleźć, że kamień osiągnie maksymalną wysokość wynoszącą

$$h = \frac{k}{2F} v_0^2 \sin^2\alpha_0 \tag{8}$$

oraz odległość rzutu wyniesie

$$l = \frac{k}{F} v_0^2 \sin 2\alpha_0. \tag{9}$$

Jeżeli założymy $v_0 = 0$, to będziemy mieli sytuację spadku swobodnego kamienia z wysokości h. Jak widać ze wzoru (7), kamień będzie spadał z przyśpieszeniem F/k. Oznaczmy ten stosunek przez

$$g = F/k \tag{10}$$

Galileusz wykazał, że wielkość ta nie zależy ani od formy, ani od wymiarów, ani też od materiału, z którego przedmiot jest zrobiony. Jak wiadomo $g \cong 9{,}81 m/s^2$.

Zapiszmy wzór (10) w postaci

$$k = F/g = m. \tag{11}$$

Współczynnik ten jest masą m. Dynamiczny sens tej wielkości jest następujący: m (liczbowo) równe jest sile, którą należy przyłożyć do ciała, aby w jednostce czasu zmienić jego prędkość o jednostkę.

Przejdźmy obecnie do przykładu budowy modelu probabilistycznego. Jako przykład rozważany będzie proces dyfuzyjny. Pokażemy, jak za pomocą tego procesu można modelować inny proces - proces zmian dokładności przyrządów pomiarowych [9,11].

Nazwa "procesy dyfuzyjne" związana jest z tym, że są one modelami matematycznymi ruchu cząstek w procesie dyfuzji - dyfundowania jednego pierwiastka w głąb drugiego poprzez nieuporządkowany ruch cząstek, czyli ruch Browna. Ruch Browna w jednorodnym izotropowym ośrodku, gdy na cząstkę nie działają żadne inne poboczne siły oprócz uderzeń molekuł, jest jednorodnym symetrycznym ruchem Browna nazywanym procesem Wienera. Jako przykład procesu dyfuzyjnego może służyć rodzina procesów wienerowskich wychodzących z dowolnych punktów początkowych. Jakościową stronę procesów dyfuzyjnych dobrze opisują cząstkowe równania różniczkowe typu parabolicznego. Należy również zauważyć, że trajektorie rzeczywistych fizycznych cząstek są w naturalny sposób ciągłe.

Nie zagłębiając się dalej w teorię procesów dyfuzyjnych, których ilościową stronę opisują procesy Markowa z nieróżniczkowalnymi trajektoriami, przejdźmy obecnie do pewnych faktów z dziedziny metrologii, wynikających zarówno z olbrzymiego materiału doświadczalnego, jak i intuicji naukowej, która pozwoliła na utożsamienie losowego procesu zmian dokładności przyrządów pomiarowych z procesami dyfuzyjnymi typu Markowa.

Niech funkcja losowa $\xi(t)$ odzwierciedla proces zmian dokładności przyrządu pomiarowego. Zmiany te mają miejsce wskutek systematycznych zmian parametrów elementów składowych przyrządu oraz fluktuacji warunków pracy. Do tego dochodzi szereg różnych procesów fizykochemicznych oddziałujących na dokładność pomiaru. Wartość błędu przyrządu w chwili t można przedstawić w postaci punktu na płaszczyźnie o współrzędnych (x,t), a funkcję $\xi(t)$ jako jedną z trajektorii tego punktu na płaszczyźnie. Zakładamy, że bieżąca wartość błędu $\xi(t)$ nie wychodzi poza otoczenie punktu t_0, gdy błąd wynosił x_0, oraz czas $\tau = t - t_0 \to 0$. Oznacza to, że proces $\xi(t)$ jest procesem ruchu Browna. Zakładamy dalej, że istnieje pewne warunkowe prawdopodobieństwo $P(x,t/x_0,t_0)$ przejścia wartości błędu przyrządu ze stanu (x_0,t_0) do stanu (x,t). Wówczas, jeżeli ruch punktu dokonuje się ze skończoną prędkością

$$a(x,t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{|x-x_0|<\varepsilon}(x-x_0)P(t_0,dx_0,t_0+\tau,x), \quad \varepsilon>0, \tag{12}$$

i prędkość zmian średniej wartości kwadratu (jako miary rozrzutu nieuporządkowanego ruchu) różnicy w czasie dla małych τ

$$b(x,t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{|x-x_0|<\varepsilon}(x-x_0)^2P(t_0,dx_0,t_0+\tau,x), \quad \varepsilon>0 \tag{13}$$

jest skończona oraz $P(x,t/x_0,t_0)$ dla małych τ szybko maleje przy $|x-x_0|\to\infty$ i rośnie dla małych $|x-x_0|$, to funkcja $P(x,t/x_0,t_0)$ spełnia drugie (prospektywne) równanie Kołmogorowa, nazywane też równaniem Fokkera-Plancka-Kołmogorowa w postaci

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)\cdot P]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x,t)\cdot P]. \tag{14}$$

a(x,t) zwykle nazywane jest współczynnikiem przenoszenia, zaś b(x,t) - współczynnikiem dyfuzji.

Zauważmy, iż położenie punktów (x_0,t_0) oraz (x,t) nie jest zdeterminowane i ma określoną gęstość rozkładu $W(x)$ i $W_0(x_0)$. Mnożąc prawą i lewą część wzoru (14) przez $W_0(x_0)$ i dokonując całkowania po x_0 pod znakiem różniczkowania otrzymamy

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)\cdot W]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x,t)\cdot W]. \tag{15}$$

gdzie $W=W(x,t/x_0,t_0)dx$ prawdopodobieństwo warunkowe tego, że w chwili t wartość błędu znajdowała się w granicach $(x,x+dx)$ przy warunku, że w chwili t_0 wartość błędu była w przedziale (x_0,x_0+dx_0).

Jak wiadomo, do dziś nie otrzymano ogólnego rozwiązania równania (15). W niektórych szczególnych przypadkach rozwiązanie jednak jest znane. W szczególności, jeżeli proces zmian ξ(t) jest jednorodny, tzn. $W(x,t)$ zależy tylko od różnicy $x-x_0$ oraz $\tau=t-t_0$, wówczas $a(x,t)$ i $b(x,t)$ są stałymi, a równanie (15) przybiera postać

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-a\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{16}$$

W naszym przypadku stałe a i b oznaczają stałość prędkości systematycznego dryftu badanego parametru przyrządu oraz stałość prędkości zmian wariancji fluktuacji tego parametru.

Prawdopodobieństwo jednakowych przemieszczeń błędów wskazań przyrządu w stronę dodatnią i ujemną jest takie samo, gdyż rozkład błędów jest normalny. Można więc przyjąć, że a=0. Wówczas równanie (16) przybierze postać

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{b}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{17}$$

Równania typu (16) i (17) w fizyce matematycznej nazywane są równaniami dyfuzji, a procesy opisywane tymi równaniami - procesami dyfuzyjnymi. Równanie typu (17) jest nazywane również równaniem przewodnictwa cieplnego.

Równanie (16) poprzez podstawienie

$$W(x,t) = \exp\left\{\frac{a}{b}x - \frac{a^2}{2b}t\right\}u(x,), \tag{18}$$

można sprowadzić do postaci równania (17)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{19}$$

Rozwiązaniem równania (19) jest jak wiadomo całka Poissone`a

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2bt}\right\}\varphi(y)dy, \tag{20}$$

gdzie $\varphi(x_0) = u(x,0)$ jest gęstością prawdopodobieństwa rozkładu początkowego dla x.
Z (18) wynika, że

$$\varphi(x_0) = u(x,0) = W(x,0)\exp(-\frac{a}{b}x). \tag{21}$$

W ten sposób rozwiązując równania (15)-(17) można otrzymać zależności dla gęstości prawdopodobieństwa błędu wskazań przyrządu w dowolnej chwili t.

Podsumowując ten przykład można powiedzieć, że za pomocą kilku faktów z dziedziny fizyki zbudowano model matematyczny w tak odległej dziedzinie, jaką jest metrologia przyrządów pomiarowych.

5. Zakończenie

Niniejszy artykuł, skromny w swej objętości, dotyka zaledwie problemu zasad budowy modeli matematycznych. Szerzej, dla modeli matematycznych z różnych dziedzin technicznych, problem ten został omówiony w doskonałym opracowaniu [12].

Geneza powstania niniejszej pracy dotyka wewnętrznej potrzeby wypowiedzenia się na poruszone tematy, gdyż praca naukowo-dydaktyczna na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki Politechniki Śląskiej polega m.in. na niewymuszonym naturalnym i ciągłym obcowaniu ze środowiskiem modeli matematycznych. Spektrum tych modeli jest niezwykle szerokie; od zupełnie abstrakcyjnych, które bardzo dalekie są od praktyki i rzadko podbudowane tzw. solidnym materiałem doświadczalnym, do modeli, będących właściwie hipotezą, wysnutą na podstawie olbrzymiego, starannie opracowanego materiału doświadczalnego. Liczba otrzymanych w tym przypadku danych jest tak duża, że niejednokrotnie upoważnia wprost do wykorzystywania tych danych jako wyników pewnych hipotetycznych modeli. Samego matematycznego modelu nie buduje się, gdyż przyjęcie jakiegoś jednego określonego modelu jest niemożliwe. Takie dane jednak wprowadzone do

komputera i odpowiednio przetworzone pozwalają nieraz na otrzymanie modeli cyfrowch o dokładności i adekwatności, z którą nie mogą konkurować żadne znane modele analityczne.

Reasumując można powiedzieć, że w związku z coraz powszechniejszym stosowaniem techniki komputerowej w różnych gałęziach nauki i życia praktycznego, antagonizmy między zwolennikami budowy modeli matematycznych opierającymi się na solidnym materiale doświadczalnym z jednej strony, a z drugiej zaś - na intuicyjnym przeświadczeniu na podstawie pojedynczych faktów, będą coraz mniej istotne. Technika komputerowa już dzisiaj bowiem pozwala nie tylko na gromadzenie i przetwarzanie danych o badanych procesach i obiektach według gotowych modeli matematycznych, ale również na budowanie optymalnych modeli cyfrowych (komputerowych) do przetwarzania tych danych w czasie rzeczywistym. Czy ten aspekt zupełnie eliminuje potrzebę stosowania jakiegokolwiek modelu matematycznego? Oczywiście że nie. Nie oznacza to rzecz jasna, że z czasem zaniknie potrzeba tworzenia modeli matematycznych. Wręcz przeciwnie, gdyż nieznane dotąd możliwości w penetrowaniu różnych zagadnień naukowych i praktycznych, dzięki technice komputerowej, tworzą coraz większe zapotrzebowanie na budowę modeli matematycznych. I z tym faktem chyba wszyscy się zgadzamy.

LITERATURA

[1] Berry A.: *Kratkaja istoria astronomii.* Tłumaczenie z ang., wyd.2, Moskwa-Leningrad 1946.

[2] Bieńkowska B.: *Kopernik i heliocentryzm w polskiej kulturze umysłowej do końca XVIII wieku.* Wrocław 1971.

[3] Brożek L.: *Bibliografia kopernikowska 1923-1948.* Poznań 1949.

[4] Bychowskij B.E.: *Filosofia Dekarta.* Moskwa-Leningrad 1940.

[5] Caspar M.: *Johanes Kepler.* Stuttgart 1950.

[6] Dubosin G.N.: *Nebesnaja mechanika. Osnovnye zadaci i metody.* Moskwa 1968.

[7] Ermeeva A.U.: *Vydajusciesia astronomy mira.* Moskwa 1966.

[8] Galileo Galilei.: *Dialog o dvuch glavnejsych sistemach mira- ptolomeevskoj i kopernikovoj.* Moskwa-Leningrad 1948 (istnieje wydanie polskie).

[9] Isaev L.K., Mechannikov A.I.: *Izmenenie pogresnostej izmeritelnych priborov vo vremeni.*Obsie voprosy metrologii, Vypusk 130 (190), Izdat. Standart, 1972.

[10] Kałuski J.: *Współczesne problemy aksjomatycznego uzasadnienia podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa.* ZN Politechniki Śląskiej, seria: AUTOMATYKA, z.73, Gliwice 1984.

[11] Kałuski J.: *Zastosowanie równań Fokkera-Plancka-Kołmogorowa do wyznaczania niezawodności metrologicznej przyrządów pomiarowych.* ZN Politechniki Śląskiej, seria: AUTOMATYKA, z.81, Gliwice 1986.

[12] Krasnoscekov P.S., Petrov A.A *Princypy postroenia modelej.* Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta, Moskwa 1983

[13] Sebba G.: *Bibliografia cartesiana.* The Hague, 1964.

[14] Wilentner G.: *Istoria matematiki ot Dekarta do serediny 19 stoletia.* Tłumaczenie z niem., wydanie 2, Moskwa 1966.

Recenzent: Prof. dr hab. Sławomir Kończak

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1995 r.

Abstract

Mathematical models are used in each range of human's activity today. There are useful for analysis of real processes or helpful in their reproduction (simulation) in case, when in consideration of different reasons they can not be repeatable.

All models, which are known, can be divided in two groups: deterministic and probabilistic. Criterion of division is determinism of model or lack of it. For example, motion of celestial bodies is completely determined, on the other hand, motion of ideal gas molecules is completely no determined.

Presented problems of so-colled "generalized motion" base on formation of exemplary deterministic and probabilistic models. After giving the definition of both models, basing on experiences of Arystoteles, Descartes, Kopernik, Tycho Brahe, Kepler, Galileo Galilei and criterion of external likeness and external perfection of Einstein, whole process of such models construction is shown.

This historical and phenomenological process of creation of mathematical models based on two models is presented. The deterministic model describes school example of throwing the stone at an angle to horizon. The probabilistic model, basing on theory of diffusion processes and a generalized description of Brownian movements, describes the process of accuracy changes of measuring instruments.