

Witold BASIŃSKI\*

Politechnika Śląska, Gliwice

## ANALIZA ZMIANY PRĘDKOŚCI KOŁOWEJ DRGAŃ WŁASNYCH BELEK WSPORNIKOWYCH POŁĄCZONYCH PODATNIE Z WĘZŁEM SZTYWNYM

**Streszczenie.** W pracy zamieszczono wyniki analizy zmiany prędkości kołowej drgań własnych  $\omega$  belek wspornikowych połączonych podatnie z węzłem sztywnym o różnej sztywności obrotowej  $S$  połączeń, wykonanej za pomocą MES. Przeanalizowano cztery belki o różnej sztywności obrotowej połączenia ze sztywnością podpór uzyskaną z badań [1]. Sporządzono wykres zależności  $\omega(S)$ , biorąc pod uwagę ciągłą zmianę sztywności obrotowej połączeń, począwszy od połączenia quasi-przegubowego aż do połączenia sztywnego.

## ANALYSIS CHANGING NATURAL FREQUENCY OF PROPER VIBRATION BRACKET BEAMS CONNECTING FLEXIBLE WITH RIGID JOINTS

**Summary.** In this article was shown analysis MES changing natural frequency of proper vibration  $\omega$  bracket beams connecting flexible with rigid joint about different rotary rigidity  $S$ . Analysis was making for four beams with different rotary rigidity  $S$  of rigid support taking from research [1]. Additionally illustrate full dependence  $\omega(S)$  by continual changing of rotary rigidity from flexible joint to value border that is rigid joint.

### 1. Wprowadzenie

Celem pracy jest przedstawienie możliwości wprowadzenia do diagnostyki konstrukcji stalowych metody szacowania sztywności obrotowej doczołowych połączeń odkształcalnych na podstawie pomiaru częstości drgań swobodnych. W pracy przedstawiono analizę zmiany prędkości kołowej drgań własnych  $\omega$  belek wspornikowych o różnej sztywności obrotowej  $S$  połączenia odkształcalnego przy użyciu MES. Klasycznym sposobem podawanym w literaturze [2], [7] jest szacowanie zależności kąta obrotu odkształcalnego połączenia  $\Phi$  od

\* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Zbigniew Kowal

momentu zginającego  $M$  (występującego w układzie konstrukcyjnym). Zależność  $M(\Phi)$  można wytestować na podstawie badań statycznych oraz, jak pokazano w pracy [1], na podstawie pomiaru drgań swobodnych. Na podstawie pomiaru drgań swobodnych belek z połączeniami odkształcalnymi pod różnym obciążeniem masowym można wyznaczyć krzywe regresji  $M(\Phi)$ . W diagnostyce na podstawie prędkości kołowej drgań swobodnych belek o tym samym obciążeniu masowym można wykrywać różnice sztywności obrotowej połączeń na podstawie porównania ze sztywnością projektowaną.

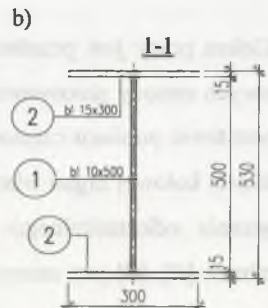
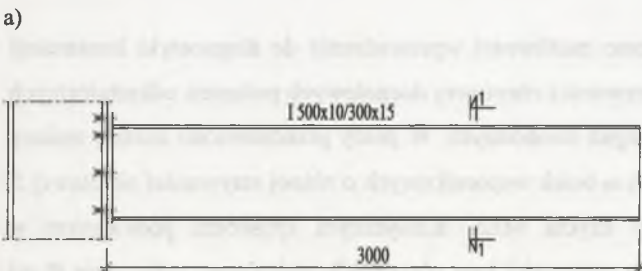
Na przykładzie dwuteowych belek wspornikowych, o sztywności obrotowej połączeń podporowych uzyskanych na podstawie badań, wytestowano metodą MES zmianę prędkości kołowej drgań własnych zależną od sztywności obrotowej połączenia. Sporządzono wykresy zależności  $\omega(S)$  dla ciągłej zmiany sztywności obrotowej, począwszy od sztywności połączenia quasi-przegubowego aż do sztywnego zamocowania.

## 2. Charakterystyka analizowanych belek z połączeniami podatnymi

Analizę zmiany prędkości kołowej drgań własnych wywołanej zmianą sztywności obrotowej pokażemy na przykładzie belki wspornikowej z połączeniem sztywnym oraz trzema wariantami połączenia podatnego. Na rys. 1 przedstawiono przyjętą belkę wspornikową o przekroju dwuteowym I 500x10/300x15 (rys. 1). Parametry belki zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1

E	G	$\nu$	$\rho$	A	$I_z$	Sztywność obrotowa S			
[Pa]	[Pa]		[kg/m <sup>3</sup> ]	[m <sup>2</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]	[Nm/rad]			
2.06E+11	8E+10	0,3	7850	0,014	7.011E-4	129 E+6	579 E+6	731 E+6	$\infty$

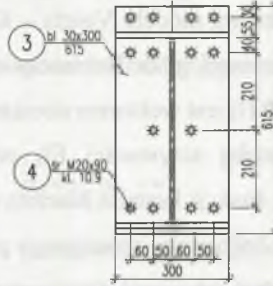


Rys. 1. Belka wspornikowa I 500x10/300x15: a) widok, b) przekrój

Fig. 1. Bracket beams I 500x10/300x15: a) view, b) section

Sztywności obrotowe połączeń z węzłem podporowym (rys. 2) przyjęto na podstawie wykonanych badań [1].

Doczołowe połączenie belki ze słupem (rys. 2) składa się z blachy czołowej grubości 30 mm oraz czternastu śrub sprężających M20 kl.10.9.



Rys. 2. Doczołowe połączenie belki ze słupem  
Fig. 2. Extended end – plate connection beam to column

### 3. Analiza zmiany prędkości kołowej drgań własnych

#### 3.1. Macierz sztywności i bezwładności elementu belkowego

W metodzie elementów skończonych elementy o masie ciągłej, mające nieskończoną liczbę stopni swobody dynamicznej (ssd), zamienia się w wyniku dyskretyzacji na elementy o skończonej liczbie ssd. Dyskretyzacja jest podziałem na zbiór części, czyli tzw. elementy skończone. Elementy połączone są ze sobą w węzłach. W płaskich układach prętowych każdy węzeł ma dwa stopnie swobody: kąt obrotu oraz przemieszczenie. Wielkości te nazywane są w metodzie elementów skończonych współzrędnymi uogólnionymi.

Całkowite ugięcie belki  $y(x, t)$  w metodzie elementów skończonych możemy wyrazić przez poszczególne przemieszczenia węzłowe  $y_k(t)$  oraz funkcje kształtu  $N_k(t)$ . Dla pojedynczego elementu belkowego funkcję przemieszczeń zależną od przemieszczeń węzłowych i funkcji kształtu możemy zapisać w postaci (1) [4]:

$$y(x, t) = \sum_k N_k(x) \cdot y_k(t), \quad (1)$$

Całkowite ugięcie belki podzielonej na elementy skończone w dowolnym punkcie  $x$  przyjmuje postać:

$$y(x, t) = \sum_i N_i(x) \cdot y_i(t), \quad (2)$$

Równanie ruchu w metodzie elementów skończonych modelu o  $n$  stopniach swobody możemy zapisać w postaci równania macierzowego (3):

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{P}(t). \quad (3)$$

Jest to klasyczne równanie ruchu wg modelu Voigta – Kelvina układu o wielu stopniach swobody zapisane w postaci macierzowej, gdzie  $\mathbf{B}$  oznacza macierz bezwładności,  $\mathbf{C}$  macierz tłumienia i  $\mathbf{K}$  macierz sztywności.  $\mathbf{P}(t)$  jest wektorem obciążeń zewnętrznych.

Dla elementu belkowego o stałej sztywności  $EI_z$  po wyznaczeniu poszczególnych elementów macierzy na podstawie funkcji kształtu macierz sztywności elementu belkowego  $\mathbf{K}$  ma postać (4) [5]. Dla elementu belkowego opisującego podatny węzeł podporowy należy w macierzy sztywności (5) uwzględnić sztywność obrotową połączenia wg zależności (5):

$$\mathbf{K} = \frac{E \cdot I_z}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & \frac{-6}{L} & 2 \\ \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \frac{E \cdot I_z}{L} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 + \frac{S \cdot L}{E \cdot I_z} & \frac{-6}{L} & 2 \\ \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{-6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Rozważono element belkowy o stałej masie  $\rho(x) = \rho$  na jednostkę objętości. Macierz bezwładności elementu belkowego  $\mathbf{B}$  wyznaczona na podstawie funkcji kształtu przyjmuje postać (6) [6]:

$$\mathbf{B} = \rho \cdot L \cdot \begin{bmatrix} \frac{13 \cdot A}{35} + 6 \cdot \frac{I_z}{5 \cdot L^2} & \frac{11 \cdot A \cdot L}{210} + \frac{I_z}{10 \cdot L} & \frac{9 \cdot A}{70} - 6 \cdot \frac{I_z}{5 \cdot L^2} & \frac{-13 \cdot A \cdot L}{420} + \frac{I_z}{10 \cdot L} \\ \frac{11 \cdot A \cdot L}{210} + \frac{I_z}{10 \cdot L} & \frac{A \cdot L^2}{105} + 2 \cdot \frac{I_z}{15} & \frac{13 \cdot A \cdot L}{420} - \frac{I_z}{10 \cdot L} & \frac{-A \cdot L^2}{140} + \frac{I_z}{30} \\ \frac{9 \cdot A}{70} - 6 \cdot \frac{I_z}{5 \cdot L^2} & \frac{13 \cdot A \cdot L}{420} - \frac{I_z}{10 \cdot L} & 13 \cdot \frac{A}{35} + 6 \cdot \frac{I_z}{5 \cdot L^2} & \frac{-11 \cdot A \cdot L}{210} + \frac{I_z}{10 \cdot L} \\ \frac{-13 \cdot A \cdot L}{420} + \frac{I_z}{10 \cdot L} & \frac{-A \cdot L^2}{140} + \frac{I_z}{30} & \frac{-11 \cdot A \cdot L}{210} + \frac{I_z}{10 \cdot L} & \frac{A \cdot L^2}{105} + 2 \cdot \frac{I_z}{15} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Macierz tłumienia wyznacza się jako kombinację liniową macierzy sztywności oraz bezwładności (7) [7]:

$$\mathbf{C} = \mu \cdot \mathbf{B} + \kappa \cdot \mathbf{K}, \quad (7)$$

gdzie:  $\mu$  i  $\kappa$  – współczynniki proporcjonalności.

W praktyce, korzysta się jednak z tzw. liczb tłumienia wyznaczanych indywidualnie na podstawie badań poszczególnych postaci drgań. W konstrukcji o bardzo małym tłumieniu macierz tłumienia możemy pominąć.

W celu sformułowania równania ruchu należy zbudować globalne macierze sztywności i bezwładności. Proces budowania macierzy globalnej można zapisać jako sumę macierzy składowych poszczególnych elementów skończonych:

$$\mathbf{K}_g = \sum_i \mathbf{K}_s, \quad \mathbf{B}_g = \sum_i \mathbf{B}_s, \quad (8)$$

Liczbę stopni swobody każdego układu określającą wymiar macierzy globalnej układu przedstawia zależność:

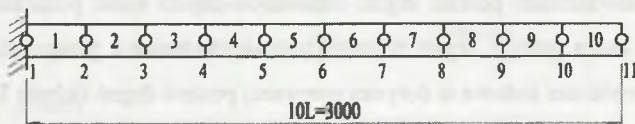
$$n_s = n_w \cdot n_y - w, \quad (9)$$

gdzie:  $n_w$  – liczba węzłów,  $n_y$  – liczba wielkości węzłowych (stopni swobody),  $w$  – liczba więzów zewnętrznych nałożonych na układ.

Należy nadmienić, że macierz globalna jest macierzą kwadratową o wymiarach  $n_s \cdot n_s$ .

### 3.2. Model MES belek wspornikowych z węzłami podatnymi

Na potrzeby metody elementów skończonych sformułowano model płaski belki wspornikowej z rys. 1 złożony z dziesięciu belkowych elementów skończonych wg rys. 3.



Rys. 3. Siatka belkowych elementów skończonych modelu

Fig. 3. Mesh of beams finite elements

Na podstawie zależności (4) wyznaczono macierze sztywności elementów belkowych o numerach od 2 do 10. Korzystając z zależności (5), wyznaczono macierze sztywności dla węzła podporowego o różnych sztywnościach obrotowych połączenia. Macierze bezwładności poszczególnych elementów belkowych obliczono z zależności (6). Przy wyznaczaniu prędkości kołowej nietłumionych drgań swobodnych wektor obciążeń zewnętrznych  $\mathbf{P}(t)$  przyjmuje wartość 0.

Wymiar macierzy globalnych belki wspornikowej z połączeniem sztywnym, uwzględniający redukcję 2 stopni swobody wynikających z nałożonych więzów zewnętrznych, obliczony ze wzoru (9) wynosi  $20 \times 20$ . W przypadku belek wspornikowych z połączeniami podatnymi występuje redukcja tylko jednego stopnia swobody w postaci przesuwu węzła nr 1 wynikająca z więzów zewnętrznych. Obrót połączenia ograniczony jego

sztynnością obrotową jest możliwy. W związku z tym wymiar macierzy globalnych wynosi  $21 \times 21$ .

Macierze globalne są sumą macierzy składowych. Macierze składowe zawierają wyrazy macierzy kolejnych elementów belkowych po ich przeniesieniu do macierzy o wymiarach równych macierzy globalnej. Macierze składowe bezwładności oraz sztywności poszczególnych belek obliczono przy użyciu procedury napisanej w programie Mathcad 11.

Globalne macierze bezwładności i sztywności belek wspornikowych wyznaczono jako sumę macierzy składowych z zależności (10) i (11).

$$\mathbf{B}_g = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_7 + \mathbf{B}_8 + \mathbf{B}_9 + \mathbf{B}_{10}, \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_6 + \mathbf{K}_7 + \mathbf{K}_8 + \mathbf{K}_9 + \mathbf{K}_{10}, \quad (11)$$

Prędkość kołową nietłumionych drgań swobodnych obliczono używając dostępnej w programie Mathcad 11 funkcji `genvals` (12). Jest to funkcja, która zwraca uogólnione wartości własne macierzy związanych równaniem  $\mathbf{K}^* \mathbf{x} = \mathbf{y}^* \mathbf{B}^* \mathbf{x}$

$$\omega = \sqrt{\text{genvals}(\mathbf{K}_g, \mathbf{B}_g)}. \quad (12)$$

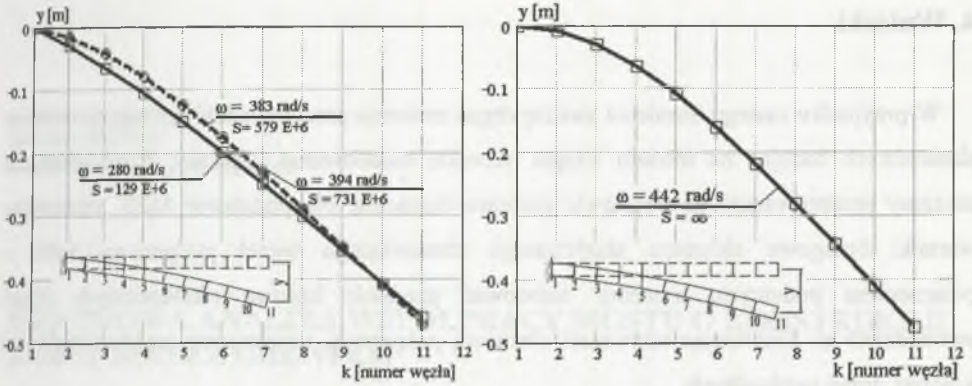
Na podstawie zależności (12) uzyskano prędkości kołowe nietłumionych drgań swobodnych dla dwudziestu postaci drgań odnoszące się do belki połączeniem sztywnym oraz dwadzieścia jeden postaci drgań odnoszących się do belek z połączeniami podatnymi. Interesujące nas prędkości kołowe  $\omega$  dotyczą pierwszej postaci drgań (tabela 2).

Tabela 2

$\omega$ [rad/s]			
S = 129 E+6 [Nm/rad]	S = 579 E+6 [Nm/rad]	S = 731 E+6 [Nm/rad]	S = $\infty$ [Nm/rad]
280	383	394	442

Wykresy pierwszej postaci drgań przedstawia rys. 3. Zmianę prędkości kołowej nietłumionych drgań swobodnych zależną od sztywności obrotowej połączenia doczołowego belki wspornikowej obrazują wyniki z tabeli 2. Łatwo zauważyć, iż dla najmniejszej sztywności obrotowej prędkość kołowa jest najmniejsza. Wraz ze zwiększeniem sztywności prędkość kołowa rośnie, dążąc do wartości granicznej jak dla połączenia sztywnego.

Za pomocą metody elementów skończonych wyznaczono współrzędne  $\omega$  i sporządzono wykres (rys. 4) zależności między prędkością kołową nietłumionych drgań swobodnych a sztywnością obrotową doczołowego połączenia podatnego belki wspornikowej I  $500 \times 10 / 300 \times 15$  o parametrach wg tabeli 1.



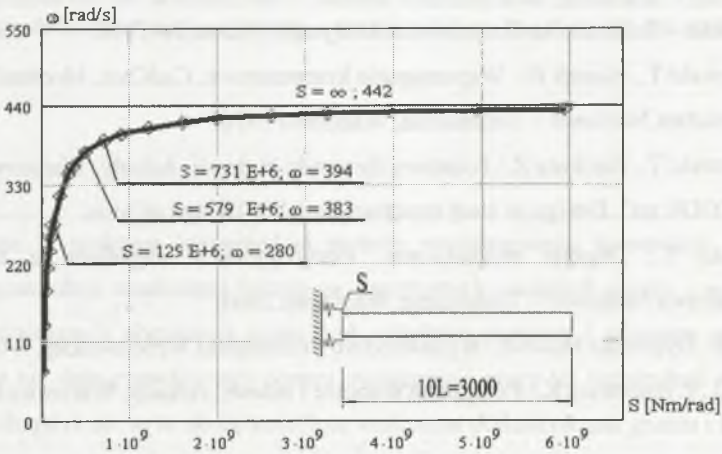
Rys. 4. Pierwsza postać drgań belki wspornikowej: a) z połączeniami podatnymi, b) z połączeniami sztywnymi

Fig. 4. Graph of the first form vibration bracket beam: a) with semi-rigid joints, b) with rigid joint

Krzywa opisująca zależność  $\omega(S)$  (rys. 4) dana równaniem (13) należy do rodziny krzywych sigmoidalnych. Poszczególne parametry krzywej  $\omega(S)$  przedstawia związek (14). Sztywność  $S$  należy wprowadzać w Nm/rad, wynik uzyskuje się w rad/s. Przy opisie krzywej  $\omega(S)$  pominięto sztywność zerową, która wprowadza geometryczną zmienność układu konstrukcyjnego.

$$\omega(S) = a - b \cdot e^{-c \cdot S^d}, \tag{13}$$

$$\omega(S) = 433.75054 - 463.39947 \cdot e^{-0.00014110022 \cdot S^{0.47954275}} \tag{14}$$



Rys. 5. Zależność między pierwszą prędkością kołową nietłumionych drgań swobodnych  $\omega$  a sztywnością obrotową doczołowego połączenia podatnego belki wspornikowej I 500x10/300x15

Fig. 5. Graph of relationship between natural frequency of proper vibration  $\omega$  and rotational rigidity of support joint bracket beam I 500x10/300x15

#### 4. Wnioski

W przypadku małego tłumienia analizę drgań możemy przeprowadzić metodą elementów skończonych bazując na modelu Voigta. Korektę oszacowania częstości drgań własnych możemy przeprowadzić na podstawie pomiaru tłumienia. Na podstawie MES, zmieniając warunki brzegowe elementu skończonego stanowiącego węzeł podporowy belki z połączeniem podatnym, możemy oszacować prędkość kołową nietłumionych drgań swobodnych  $\omega$ . Zmieniając sztywność obrotową połączenia, uzyskujemy zmianę prędkości kołowej drgań swobodnych.

Zależność  $\omega(S)$  uzyskaną na podstawie MES można zbudować dla dowolnego układu konstrukcyjnego oraz belek o różnych gabarytach. Na podstawie pomiaru prędkości kołowej nietłumionych drgań swobodnych  $\omega$  możemy oszacować sztywność obrotową połączenia w obiektach już zrealizowanych. Możemy również kontrolować sztywność obrotową połączeń w trakcie użytkowania konstrukcji.

#### LITERATURA

1. Basiński W.: Badania dynamiczne doczołowych węzłów podatnych w belkach ze środkiem falistym. VI Konferencja Naukowa Doktorantów, Wisła 2005.
2. Bródka J., Kozłowski A.: Sztywność i nośność węzłów podatnych. Politechnika Białostocka – Politechnika Rzeszowska. Białystok – Rzeszów 1996.
3. Chmielewski T., Nowak H.: Wspomaganie komputerowe. CadCam. Mechanika Budowli. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1996.
4. Chmielewski T., Zembaty Z.: Podstawy dynamiki budowli. Arkady, Warszawa 1998.
5. EUROCODE no3. Design of steel structure. Part 1.8. Design of joint.
6. Kucharski T.: Drgania mechaniczne. Rozwiązywanie zagadnień z Mathcad-em. Wydawnictwa Naukowo – Techniczne. Warszawa 2004.
7. Langer J.: Dynamika budowli. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1980.
8. Łaguna J., Łypacewicz K.: Połączenia śrubowe i nitowe. Arkady, Warszawa 1986.

Recenzent: Prof. dr inż. Roman Jankowiak