

Rafał DOMAGAŁA*
Politechnika Śląska, Gliwice

STABILNOŚĆ REOLOGICZNA BELKI STALOWO-BETONOWEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę procesu narastania przemieszczeń prowadzącego do utraty stateczności belki stalowo-betonowej. Rozwiązanie przedstawiono dla przekroju mającego jedną oś symetrii prostopadłą do wektora momentu zginającego, obciążonego osiowo stałą wartością siły. Założono też idealne zespolenie stali i betonu bez możliwości wzajemnych poślizgów.

THE RHEOLOGICAL STABILITY OF STEEL-CONCRETE BEAM

Summary. The analysis of the increasing of dislocation process lead to the loss of the stability of the steel-concrete beam was introduced in the work. The solution was introduced for the section possesses one axis of symmetry perpendicular to the vector of bending moment, burdened the axles constant value of strength. Also ideal junction of steel and concrete without the possibility of mutual slides was assumed.

1. Wprowadzenie

Statykę układów warstwowych cechują pewne osobliwości, szczególnie kiedy choć jeden z materiałów warstw ma cechy reologiczne. Stwierdza się wtedy w pręcie przegrupowania sił wewnętrznych w poszczególnych warstwach, nawet wtedy gdy globalne siły przekrojowe są stałe. Podobnie obserwuje się zmiany położenia osi obojętnej, wydłużeń i krzywizn w czasie.

Zespolenie warstw o różnych właściwościach daje całkiem nowy produkt o ulepszonych cechach, chętnie stosowany we współczesnych rozwiązaniach konstrukcyjnych. Jednakże połączenie stali, czyli materiału sprężystego, z betonem – materiałem lepkosprężystym powoduje, iż cały układ zachowuje się jak lepkosprężysty, czyli w zjawisku utraty stateczności istotny staje się czas. Dlatego też problem analizy stabilności konstrukcji

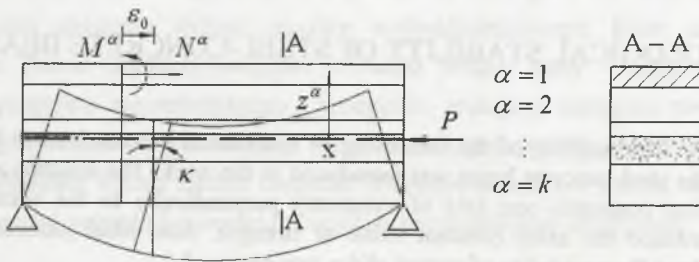
* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik

warstwowych staje się zagadnieniem bardzo istotnym. W efekcie, zamiast natychmiastowej utraty stateczności otrzymuje się proces narastania przemieszczeń, prowadzący w niektórych przypadkach do utraty stateczności układu po pewnym czasie.

Warto także zwrócić uwagę, iż każdy z układów zespolonych, niezależnie od stopnia zespolenia poszczególnych warstw, jest wewnętrznie statycznie niewyznaczalny.

2. Przedstawienie problemu

Analizując stabilność belki stalowo-betonowej przyjęto wszystkie założenia klasycznej, technicznej teorii zginania prętów. Założono też, iż przekrój ma jedną oś symetrii prostopadłą do wektora momentu zginającego, że będzie obciążony osiowo stałą siłą P oraz że występuje idealne zespolenie warstw bez możliwości poślizgów.



Rys. 1. Schemat analizowanej belki

Fig. 1. Diagram of analyzed beam

W wyniku działania obciążeń zewnętrznych w przecie powstanie stan odkształceń określony relacją

$$\varepsilon^\alpha = \kappa z^\alpha, \quad d\varepsilon^\alpha = d\kappa z^\alpha \quad (1)$$

3. Analiza problemu

Analizując rozważany problem, przyjęto równania strony fizycznej analizowanego układu w postaci

$$\sigma^\alpha = E^\alpha * d\varepsilon^\alpha \quad (2)$$

Ponieważ w materiale występują warstwy o różnych właściwościach, więc należy równania strony fizycznej określić dla każdego materiału osobno.

W celu wyprowadzenia równania osi ugiętej pręta należy wyznaczyć rozkład naprężeń w zginanym pręcie zespolonym, który zredukować można w zadaniu płaskim do trzech sił przekrojowych, a w najprostszym przypadku – czystego zginania, do momentu zginającego.

Siły wewnętrzne poszczególnych warstw przekroju wyznaczyć można z relacji

$$N^{\alpha} = \int_{F^{\alpha}} \sigma^{\alpha} dF^{\alpha}, \quad M^{\alpha} = \int_{F^{\alpha}} \sigma^{\alpha} z^{\alpha} dF^{\alpha} \quad (3)$$

Siłę osiową N całego przekroju otrzymać można poprzez zsumowanie wartości tej siły w poszczególnych warstwach, zgodnie z równaniem

$$N = \sum_{\alpha} N^{\alpha} = \sum_{\alpha} \int_{F^{\alpha}} \sigma^{\alpha} dF^{\alpha} = \sum_{\alpha} \int_{F^{\alpha}} E^{\alpha} * d\kappa z^{\alpha} dF^{\alpha} = \sum_{\alpha} E^{\alpha} * d\kappa \int_{F^{\alpha}} z^{\alpha} dF^{\alpha} \quad (4)$$

Następnie należy przyrównać ją do zera. Obliczone zostanie wtedy zmienne w czasie położenie osi obojętnej

$$N = 0 \rightarrow \sum_{\alpha} E^{\alpha} * d\kappa \int_{F^{\alpha}} z^{\alpha} dF^{\alpha} = 0 \rightarrow \sum_{\alpha} S^{\alpha} E^{\alpha} * d\kappa = 0 \quad (5)$$

gdzie

$$S^{\alpha} = \int_{F^{\alpha}} z^{\alpha} dF^{\alpha} \quad (6)$$

Analogicznie określony zostaje moment zginający $M \equiv M_x$, czyli

$$\begin{aligned} M &= \sum_{\alpha} M^{\alpha} = \sum_{\alpha} \int_{F^{\alpha}} \sigma^{\alpha} z^{\alpha} dF^{\alpha} = \sum_{\alpha} \int_{F^{\alpha}} E^{\alpha} * d\kappa (z^{\alpha})^2 dF^{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha} E^{\alpha} * d\kappa \int_{F^{\alpha}} (z^{\alpha})^2 dF^{\alpha} = \sum_{\alpha} J^{\alpha} E^{\alpha} * d\kappa \end{aligned} \quad (7)$$

co prowadzi do zależności

$$d\kappa = M \sum_{\alpha} \frac{1}{J^{\alpha}} * [E^{\alpha}]^{-1}, \quad [E^{\alpha}]^{-1} * E^{\alpha} = \delta \quad (8)$$

gdzie

$$J^\alpha = \int_{F^\alpha} (z^\alpha)^2 dF^\alpha \quad (9)$$

Następnie rozpisując równania strony geometrycznej utraty stateczności lepkosprężystego pręta warstwowego przyjęto, iż przemieszczenia pręta są sumą ugięć wstępnych w_0 oraz ugięć wywołanych zginaniem \hat{w}

$$w = w_0 + \hat{w},$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}, \quad (10)$$

$$\kappa = \kappa_0 + \hat{\kappa}$$

Natomiast odkształcenia w warstwie α opisuje równanie (1).

Ponieważ przyjęto, iż w materiale występują warstwy różnych rodzajów materiałów, należy określić związki pomiędzy odkształceniami i naprężeniami dla każdej z warstw osobno. Dla warstw lepkosprężystych związek ten dany jest wzorem

$$\varepsilon^\gamma = \frac{1}{E^\gamma(t)} \left[\sigma^\gamma(t) + \int_0^t K^\gamma(t, \tau) \sigma^\gamma d\tau \right] \quad (11)$$

Natomiast dla warstwy sprężystej związek ten jest przypadkiem szczególnym związku (11), dlatego też w dalszych rozważaniach przyjęto, iż wszystkie warstwy opisane będą zależnościami opisującymi warstwy lepkosprężyste.

Po uwzględnieniu równań strony geometrycznej i fizycznej oraz zależności (5) i (7) dla dowolnej warstwy α otrzymano

$$- \int_{F^\alpha} E^\alpha(t) \hat{\kappa}(t) (z^\alpha)^2 dF^\alpha = - \int_{F^\alpha} (\sigma^\alpha(t) + K^\alpha * \sigma^\alpha) z^\alpha dF^\alpha = M^\alpha + K^\alpha * M^\alpha \quad (12)$$

$$\sum_\alpha (E^\alpha(t) J^\alpha) \hat{\kappa} = - \sum_\alpha M^\alpha - \sum_\alpha (K^\alpha * M^\alpha) \quad (13)$$

W celu uproszczenia zapisu przyjęto

$$\sum_{\alpha} (E^{\alpha}(t) J^{\alpha}) = E(t) J, \quad \sum_{\alpha} M^{\alpha} = M, \quad \sum_{\alpha} (K^{\alpha} * M^{\alpha}) = K * M \quad (14)$$

otrzymując zależność

$$E(t) J * \hat{\kappa} = -M - K * M \quad (15)$$

która po przekształceniu przedstawia równanie osi ugiętej pręta

$$M(t, x) = -E(t) J * \hat{\kappa}(t) - K(t) * M(t, x) \quad (16)$$

Oznaczając strzałkę ugięcia całkowitego jako $f(t)$ oraz przyjmując linię ugięcia w postaci

$$w(t, x) = f(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (17)$$

i uwzględniając, że

$$M(t, x) = P \cdot w(t, x) = P \cdot f(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \quad (18)$$

przyjmując także, iż warstwy lepkosprężyste nie ulegają uszkodzeniom, czyli $K(t, \tau) = K(t - \tau)$ oraz przyjmując, iż w pręcie nie występują wstępne trwałe ugięcia, otrzymano

$$f(t) \left[\frac{B\pi^2}{Pl^2} - 1 \right] = \int_0^t f(\tau) K(t - \tau) d\tau \quad (19)$$

Podstawiając do powyższej zależności wzór na siłę krytyczną Eulera

$$P_e = \frac{B\pi^2}{l^2} \quad (20)$$

wprowadzając nową zmienną $\theta = t - \tau$ oraz poszukując rozwiązania w postaci

$$f(t) = f^* \cdot e^{\lambda t} \quad (21)$$

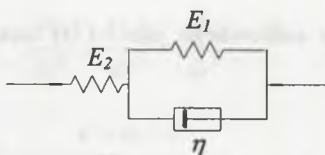
gdzie f^* należy wyznaczyć z warunku początkowego problemu,

otrzymano

$$\frac{P_\epsilon}{P} - 1 = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta} K(\theta) d\theta \quad (22)$$

Przyjmując w dalszych rozważaniach postać równania całkowego $K(\theta)$ bazującego na standardowym modelu reologicznym Maxwella-Thompsona w postaci

$$K(\theta) = C_0 \gamma e^{-\gamma\theta} \quad (23)$$



Rys. 2. Schemat modelu Maxwella-Thompsona

Fig. 2. Diagram of Maxwell-Thomson model

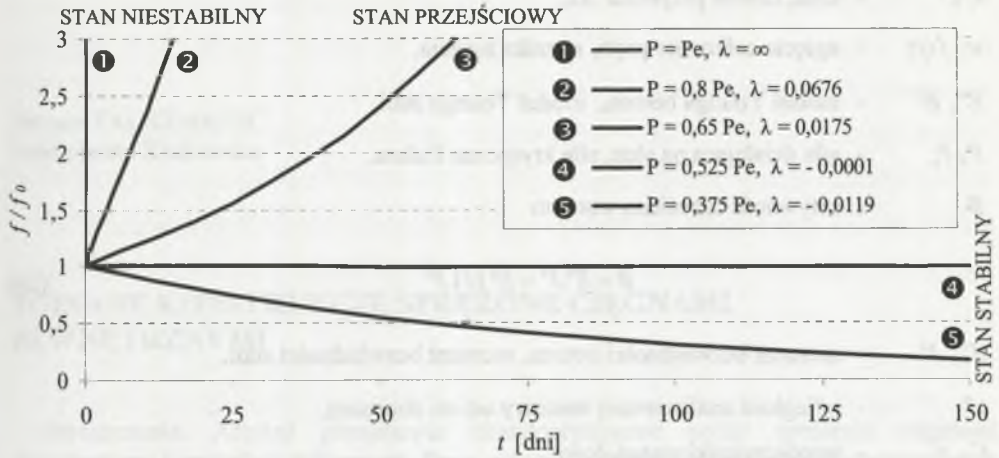
oraz podstawiając go do zależności (22), a następnie wyznaczając parametr λ , otrzymano

$$\lambda = \frac{C\gamma}{\frac{P_\epsilon}{P} - 1} - \gamma \quad (24)$$

Podstawiając wyznaczony parametr λ do równania linii ugięcia, otrzymano szukane jej rozwiązanie w postaci

$$f(t) = f^* \cdot e^{\left(\frac{C\gamma}{\frac{P_\epsilon}{P} - 1} - \gamma\right)t} \quad (25)$$

W celu zilustrowania prezentowanych powyżej rozważań przeanalizowano utratę stateczności belki stalowo-betonowej o następujących charakterystykach materiałowych: $\gamma = 0,026 \text{ d}^{-1}$, $C = 0,900 \text{ m}^2/\text{Pa}$, otrzymując wykres zmian ugięcia od czasu w zależności od wartości parametru λ .



Rys. 3. Wykresy zmian ugięcia od czasu w zależności od wartości parametru λ
 Fig. 3. The graph of deflection changing in dependence of λ parameter value

4. Wnioski

Położenie osi obojętnej jest niezależne od stanu naprężeń, ale zmienne w czasie. Taka zmienność położenia osi obojętnej w czasie jest charakterystyczna dla reologii prętów zespolonych i różni je od analogicznych zadań sprężystych.

Analizując ugięcie pręta ściskanego, stwierdzamy, że dla $\lambda \rightarrow \infty$ następuje natychmiastowa utrata stateczności, a dla $\lambda \leq 0$ pręt jest zawsze stabilny, tj. nie występuje w nim narastanie ugięcia w czasie.

W stanach pośrednich, kiedy $0 < \lambda < \infty$, mamy do czynienia ze stanami przejściowymi - utrata stateczności następuje po upływie określonego czasu.

Oznaczenia symboli

$\varepsilon_0, \varepsilon^c, \varepsilon^s$ - całkowite odkształcenie początkowe, odkształcenie warstwy betonu, odkształcenie warstwy stali,

$\kappa, \hat{\kappa}$ - krzywizna całkowita pręta, krzywizna wywołana zginaniem pręta,

σ^c, σ^s - naprężenia betonu, naprężenia stali,

- t, τ - czas, chwila przyrostu $d\varepsilon$,
 $w, f(t)$ - ugięcie całkowite pręta, strzałka ugięcia,
 E^c, E^s - moduł Younga betonu, moduł Younga stali,
 P, P_e - siła działająca na słup, siła krytyczna Eulera,
 B - sztywność określona wzorem

$$B = E^s J^s + E^c(t) J^c \quad (26)$$

- J^c, J^s - moment bezwładności betonu, moment bezwładności stali,
 z^a - odległość analizowanej warstwy od osi obojętnej,
 C_0, γ - współczynniki materiałowe,
 δ - delta Diraca,
 λ - parametr określający narastanie ugięć w czasie.

LITERATURA

1. Kubik J.: Mechanika konstrukcji warstwowych. Wydawnictwo TiT, Opole 1993.
2. Mitzel A.: Reologia betonu. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1972.
3. Kowal Z.: Zależna od czasu nośność słupów zespolonych. Proceedings of the XIth International Conference on metal structures - Progress in Steel, Composite and Aluminium Structures, Taylor & Francis Group, Rzeszów 2006, p. 349 – 352.
4. Gawęcki A.: Mechanika materiałów i konstrukcji prętowych. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2003.
5. Chrzanowski M.: Reologia ciał stałych. Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995.
6. Bodnar A.: Wytrzymałość materiałów. Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004.
7. Kisiel I.: Reologia w budownictwie. Wydawnictwo Arkady, Warszawa 1967.
8. Norma PN-91/B-03302 Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe, Obliczenia statyczne i projektowanie, Słupy zespolone.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jerzy Wyrwał