ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2006
Seria: BUDOWNICTWO z. 109 Nr kol. 1735

Jarosław KOPIŃSKI*
Politechnika Lubelska

JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZAŃ DLA PRZYPADKU KOLUMNY UTWIERDZONEJ W JEDNOOSIOWYM STANIE NAPRĘŻENIA

Streszczenie. W artykule przedstawiono opracowane dotychczas warunki równowagi i jednoznaczności rozwiązań dla materiałów sprężysto-plastycznych. Pokazano zmodyfikowane kryteria stosowane do wyznaczenia stanów naprężeń, w których następuje rozdwojenie (bifurkacja) postaci równowagi. Przedstawione zostały przykładowe wartości naprężeń, przy których występuje bifurkacja, uzależnione od smukłości układu.

UNIQUENESS OF SOLUTION FOR COLUMN IN ONEDIMENSIONAL STATE OF STRESS

Summary. This article presents the equilibrium conditions and the uniqueness of solutions for elastic-plastic solids. The modified criteria for stresses when the bifurcation of equilibrium occurs are discussed. As an example, stress values in function of slenderness ratio for columns are calculated in bifurcation states.

1. Wstęp

Warunki równowagi i jednoznaczności rozwiązań dla materiałów sprężysto-plastycznych zostały określone w 1958 roku przez R. Hilla [1]. Warunki te dotyczyły ciał ze stowarzyszonymi prawami płynięcia.

Analizując jednakże materiały zdefiniowane równaniami z niestowarzyszonymi prawami płynięcia, warunki te musiały zostać zastąpione innymi, które uwzględniałyby różnice

---
* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. Nguyen Huu Viem

kierunków normalnej do powierzchni plastyczności i tensora przyrostów plastycznej części deformacji.

Pierwszy z tych warunków został sformułowany w drugiej połowie lat 60. przez Z. Mroza [2] i dotyczył zakresu małych deformacji i jednorodnych procesów odkształceń. Bardziej uniwersalne kryterium zostało przedstawione przez B. Ranieckiego [3]. Kryterium to uogólnia model ciała porównawczego opracowanego przez R. Hilla dla niestowarzyszonych praw płynięcia poprzez wprowadzenie rodziny jednoparametrowych liniowych ciał porównawczych, umożliwiających określenie dolnej granicy naprężeń krytycznych. Górna granica definiowana jest poprzez rozwiązanie problemu dla innego liniowego ciała, odpowiadającego rzeczywistemu materiałowi sprężysto-plastycznemu poddanemu obciążeniu.

Kryterium opracowane przez B. Ranieckiego było wykorzystywane przy analizie problemów brzegowych do określenia obciążeń krytycznych ściskanych próbek walcowych [4], badania rozciąganych próbek metalowych [5] oraz analizie tworzenia się przewężenia podczas prób rozciągania. Znalazło ono również zastosowanie w pracach naukowców japońskich przy analizie rozciąganych płyt metalowych [6].

2. Równania równowagi i warunki brzegowe

Zakładamy, iż w dowolnej chwili t podczas skończonych deformacji ośrodka sprężysto-plastycznego bieżący kształt ciała oraz rozkład naprężeń jest znany, łącznie ze wszystkimi szczegółami dotyczącymi historii deformacji. Rozpatrując problem jednoznaczności, należy postawić pytanie, czy przy narzuconych nieskończenie małych zmianach oddziaływań zewnętrznych nie mamy do czynienia z rozdwojeniem postaci równowagi. Oddziaływania zewnętrzne na ciało zostaną ograniczone do wektora prędkości naprężeń nominalnych $\dot{\mathbf{T}}$ działającego na część powierzchni ciała S_T. Na pozostałej powierzchni ciała S_v określone jest pole prędkości $\mathbf{v}$. Bieżąca konfiguracja ciała przyjęta jest jako konfiguracja odniesienia (uaktualniony opis Lagrange`a), wszystkie pola wielkości tensorowych i wektorowych opisane zostaną w nieruchomym układzie kartezjańskim.

Warunki równowagi sformułowane dla problemu przyrostowego quasi-statycznego przyjmują postać:

$$div\dot{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} - \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} \tag{2}$$

oraz

$$\dot{\mathbf{S}}^{\mathrm{T}}\mathbf{n} = \dot{\mathbf{T}} \text{ na } S_T, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \text{ na } S_v \tag{3}$$

gdzie: $\boldsymbol{\sigma}$ - tensor naprężeń Cauchy`ego, $\mathbf{S}$ - tensor naprężeń nominalnych, $\mathbf{n}$ - wektor normalny do powierzchni, $\mathbf{V}$ - gradient wektora prędkości $V_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Równania (1), (2) przedstawiają odpowiednio zasadę zachowania pędu (przy pominięciu sił masowych) i zasadę zachowania krętu w ujęciu przyrostowym.

3. Równania konstytutywne materiału sprężysto-plastycznego

Równania konstytutywne materiału sprężysto-plastycznego z niestowarzyszonymi prawami płynięcia zapiszemy w formie

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{LD} - \left\langle \frac{1}{H}\left(\boldsymbol{\Lambda}^f \cdot D\right)\right\rangle \boldsymbol{\Lambda}^g, \quad H > 0 \tag{4}$$

gdzie: $\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}$ - obiektywna miara prędkości naprężeń, $\boldsymbol{\Lambda}^f$ -wektor normalny do powierzchni uplastycznienia w dziewięciowymiarowej przestrzeni odkształceń, $\boldsymbol{\Lambda}^g$ - określa kierunek prędkości odkształceń plastycznych w przestrzeni odkształceń, $\mathbf{D}$ - symetryczna część gradientu prędkości $2\mathbf{D} = \mathbf{V} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}$, $\langle \cdot \rangle$ - nawias Macauleya $\langle y \rangle = \begin{cases} y, & jeżeli \ \ y \geq 0 \\ 0, & jeżeli \ \ y < 0 \end{cases}$.

Jeżeli $h = H - \boldsymbol{\Lambda}^f \cdot \boldsymbol{\mu}^g > 0$, gdzie $\boldsymbol{\mu}^g = \mathbf{M}\boldsymbol{\Lambda}^g$, $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1}$, równanie (4) możemy zapisać w postaci odwrotnej, tj.

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}} - \left\langle \frac{1}{h}\left(\boldsymbol{\mu}^f \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right\rangle \boldsymbol{\mu}^g \tag{5}$$

Wielkości $\mathbf{M},\mathbf{L}$ są chwilowymi tensorami podatności oraz sztywności, $\Lambda^f_{ij} = \Lambda^f_{ji}$ i $\mu^f_{ij} = \mu^f_{ji}$.

4. Kryterium jednoznaczności rozwiązań

Zakładamy, że na części powierzchni S oznaczonej jako S_v zadane jest pole prędkości cząsteczek ciała $\mathbf{v}$ (o tym wspomniano powyżej), natomiast na S_T określone są prędkości nominalnego wektora naprężenia $\dot{\mathbf{T}}$. Przyjmujemy ponadto możliwość istnienia dwóch różnych rozwiązań $\dot{\mathbf{T}}_{(1)}$, $\dot{\mathbf{T}}_{(2)}$ oraz $\mathbf{v}_{(1)}$, $\mathbf{v}_{(2)}$; różnicę ich oznaczymy odpowiednio przez $\Delta\dot{\mathbf{T}}$ oraz $\Delta\mathbf{V}$.

W związku z powyższymi założeniami na S_v mamy $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{0}$ i $\Delta\dot{\mathbf{T}}\neq\mathbf{0}$. Równości $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{0}$ są konsekwencją założenia, iż na S_v jest ściśle określone pole prędkości (zakładamy możliwość kontrolowania tego pola, np. idealne utwierdzenie). Natomiast powodem tego, iż $\Delta\dot{\mathbf{T}}\neq\mathbf{0}$ jest fakt, że na S_v nie ma narzuconych żadnych ograniczeń na tensor prędkości naprężeń nominalnych i dopuszczamy możliwość wystąpienia przynajmniej dwóch różnych pól tych prędkości. Na pozostałej części S_T mamy sytuację odwrotną, tzn. $\dot{\mathbf{T}}$ jest określone w sposób ścisły, a $\mathbf{v}$ jest dowolne, co prowadzi do $\Delta\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ i $\Delta\dot{\mathbf{T}}=\mathbf{0}$. Zakładając możliwość istnienia dwóch rozwiązań oraz biorąc pod uwagę przytoczone rozważania, dochodzimy do

$$\int \Delta\mathbf{v}\Delta\dot{\mathbf{T}}\,dS=0, \tag{6}$$

stosując twierdzenie Gaussa oraz wykorzystując warunki równowagi (1), mamy

$$\int \Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\,\Delta\dot{\mathbf{S}}\;dV=0, \tag{7}$$

Jeżeli potrafimy wskazać takie pola prędkości oraz odpowiadające im pola prędkości naprężeń tak, że spełniony jest warunek (7), to mówimy o punkcie rozdwojenia równowagi. Przyjmując za miarę pochodnej obiektywnej pochodną Oldroyda, związek między tą pochodna a $\dot{\mathbf{S}}$ będzie następujący:

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}=\dot{\mathbf{S}}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}. \tag{8}$$

Korzystając z równań (4) oraz (8), iloczyn $\Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\,\Delta\dot{\mathbf{S}}$ możemy przedstawić:

$$\Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\,\Delta\dot{\mathbf{S}}=2W+\Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}A\,\Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}},\quad W=\frac{1}{2}\Delta\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\Delta\mathbf{D}$$

gdzie:

$$\Delta\mathbf{D}=\mathbf{D}_{(1)}-\mathbf{D}_{(2)},\quad 2\mathbf{D}_{(1)}=\mathbf{V}_{(1)}+\mathbf{V}_{(1)}{}^{\mathrm{T}},\quad 2\mathbf{D}_{(2)}=\mathbf{V}_{(2)}+\mathbf{V}_{(2)}{}^{\mathrm{T}}$$

A-tensor zależny od stanu naprężenia i od wyboru strumienia naprężenia.

Wyrażenie W przedstawimy jako sumę dwóch wielkości,

$$W^{e}=\frac{1}{2}\Delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{L}\Delta\mathbf{D} \tag{9}$$

związaną z obszarami ciała znajdującymi się w stanie sprężystym oraz W^{p} związaną z obszarami uplastycznionymi:

$$W = W^e + W^p$$

W przypadku deformującego się ciała sprężysto-plastycznego możemy wyróżnić obszary, w których mamy do czynienia z odkształceniami sprężystymi oraz obszary, w których zachodzą deformacje plastyczne. W pierwszym przypadku, aby określić związek prędkość naprężenia - prędkość odkształcenia, korzystamy z równań teorii sprężystości. W przypadku drugim, aby określić związek, musimy dodatkowo dysponować wiedzą, czy w danym punkcie obszaru uplastycznionego mamy do czynienia z odciążeniem, czy też z kontynuacją procesu obciążenia. W przypadku odciążenia, stosujemy równania teorii sprężystości, natomiast gdy mamy do czynienia z kontynuacją obciążania, stosujemy związki dla ciała plastycznego. Może się zdarzyć tak, że w pewnym obszarze ciał w przypadku jednego rozwiązania mamy do czynienia z kontynuacją obciążenia, natomiast w przypadku drugiego rozwiązania mamy do czynienia z odciążeniem w pewnych obszarach; może też zdarzyć się sytuacja odwrotna. Na podstawie przytoczonych rozważań w obszarze plastycznym możemy mieć do czynienia z następującymi sytuacjami:

- w obu możliwych przypadkach kontynuowane jest obciążanie

$$\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(1)} \geq 0 \quad \mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(2)} \geq 0 \qquad W^p = -\frac{1}{H}\left(\mathbf{\Lambda}^f \cdot \Delta\mathbf{D}\right)\left(\mathbf{\Lambda}^g \cdot \Delta\mathbf{D}\right)$$

- w pierwszym przypadku kontynuowane jest odciążanie, w drugim zaś obciążanie

$$\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(1)} < 0 \quad \mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(2)} \geq 0 \qquad W^p = \frac{1}{H}\left(\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(2)}\right)\left(\mathbf{\Lambda}^g \cdot \Delta\mathbf{D}\right)$$

- przypadek pierwszy obciążanie, przypadek drugi odciążanie

$$\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(1)} \geq 0 \quad \mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(2)} < 0 \qquad W^p = -\frac{1}{H}\left(\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(1)}\right)\left(\mathbf{\Lambda}^g \cdot \Delta\mathbf{D}\right)$$

- w obu przypadkach odciążanie

$$\mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(1)} < 0 \quad \mathbf{\Lambda}^f \cdot \mathbf{D}_{(2)} < 0 \qquad W^p = 0$$

Jeżeli dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości **v** spełniona jest nierówność

$$R = \int\left[W^e + W^p + \Delta\mathbf{V}^\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\sigma}\Delta\mathbf{V}^\mathbf{T}\right]dV > 0$$

to rozwiązanie problemu przyrostowego jest jednoznaczne.

Funkcjonał R posiada skomplikowaną formę i jego bezpośrednie stosowanie do określenia naprężenia, przy którym występuje bifurkacja, nastręcza trudności. Dlatego też do naszych rozważań wprowadzimy ciało porównawcze zaproponowane przez B. Ranieckiego [3].

5. Ciało porównawcze

Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę potencjałów o postaci

$$W_L = W^e - \frac{1}{8rH}\left[\left(\mathbf{\Lambda}^f + r\mathbf{\Lambda}^g\right)\cdot \mathbf{D}\right]^2$$

gdzie W^e zostało określone (9) powyżej, a r jest pewnym parametrem, o którym zakładamy, że jest większy od zera.

Można pokazać, iż $W_L \leq W$ dla wszystkich $\Delta\mathbf{D}$; oraz że spełnione jest

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W_L}{\partial \mathbf{D}}, \qquad W_L = \frac{1}{2}\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot \mathbf{D}, \quad \overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}\mathbf{D} - \frac{1}{4rH}\left(\mathbf{\Lambda}^f + r\mathbf{\Lambda}^g\right)\left(\mathbf{\Lambda}^f + r\mathbf{\Lambda}^g\right)\cdot \mathbf{D}$$

Jeżeli dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości spełniona jest nierówność

$$R_L = \int\left[W_L + \Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\cdot \boldsymbol{\sigma}\Delta\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\right]dV > 0$$

wówczas istnieje tylko jedno rozwiązanie przyrostowego problemu brzegowego sformułowanego w punkcie 2.

Można udowodnić [3,4], że dodatnia wartość funkcjonału R_L gwarantuje jednoznaczność rozwiązania dla ciała sprężysto-plastycznego. Pole prędkości, dla którego $R_L = 0$, daje dolną granicę naprężeń krytycznych dla ciała rzeczywistego. Dokładność oszacowania tej granicy zależy od doboru parametru r, który może być funkcją zależną od położenia punktu [3].

6. Przykład liczbowy

Schemat statyczny analizowanego układu przyjmujemy w postaci peta jednostronnie utwierdzonego. Przyjmujemy, że analizowana kolumna wykonana jest z betonu Kupfera. Równania opisujące materiał zaczerpnięte zostały z pracy [6] i przedstawiają się w sposób następujący:

$$\overset{\Delta}{\sigma}_{33} = \left[2G + \lambda\left(1 - 2\chi_{c(r)}\right) - \frac{\left(\Lambda_{33}^{g} + r\Lambda_{33}^{f}\right)\left[-2\chi_{c(r)}\left(\Lambda_{11}^{g} + r\Lambda_{11}^{f}\right) + \left(\Lambda_{33}^{g} + r\Lambda_{33}^{f}\right)\right]}{4Hr} \right] D_{33}$$

$$D_{11} = D_{22} = -\chi_{c(r)} D_{33} \qquad \chi_{c(r)} = \frac{4Hr\lambda - \left(\Lambda_{33}^{g} + r\Lambda_{33}^{f}\right)\left(\Lambda_{11}^{g} + r\Lambda_{11}^{f}\right)}{4Hr(2G + 2\lambda) - 2\left(\Lambda_{11}^{g} + r\Lambda_{11}^{f}\right)^2}$$

$$\mu_{11}^{g} = \mu_{22}^{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \beta, \quad \mu_{11}^{f} = \mu_{22}^{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mu, \quad \mu_{33}^{g} = -\sqrt{2} + \beta, \quad \mu_{33}^{f} = -\sqrt{2} + \mu,$$

$$\Lambda_{ij}^{g} = 2G\mu_{ij}^{g} + \lambda\delta_{ij}\mu_{kk}^{g}, \quad \Lambda_{ij}^{f} = 2G\mu_{ij}^{f} + \lambda\delta_{ij}\mu_{hh}^{f}$$

$$\beta(\sigma_{33}) = 0{,}0667 - 0{,}7212\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1{,}85x + 1}, \quad \mu(\sigma_{33}) = \beta(\sigma_{33}) + 0{,}0667x + 0{,}7212, \quad x = \frac{\sigma_{33}}{f_c}$$

σ_{33} - naprężenie normalne w słupie, f_c - naprężenie niszczące próbki betonowej.

Równania te nie mają charakteru ogólnego, zostały bowiem określone dla konkretnego przypadku, będącego przedmiotem niniejszego artykułu.

Na podstawie przytoczonych wzorów obliczono kilka przykładowych wartości naprężeń, przy których następuje rozdwojenie postaci równowagi. Prezentowane wyniki przedstawione są w zależności od smukłości układu λ.

Tabela 1

Wartości naprężeń, przy których następuje bifurkacja w zależności od smukłości

λ	σc[MPa]	λ	σc[MPa]
10	19,18	60	14,765
20	19,129	70	13,915
30	18,943	80	13,215
40	18,4	90	12,65
50	16,4	100	11,7

7. Podsumowanie i wnioski

Na podstawie przedstawionej analizy stanu zagadnienia oraz przeprowadzonych badań teoretycznych można stwierdzić, że zagadnienie jednoznaczności rozwiązań w teorii nośności granicznej jest istotne z punktu widzenia inżynierskiego, biorąc pod uwagę ciągle modernizowane i opracowywane nowe materiały konstrukcyjne w budownictwie.

Przedstawione w artykule kryterium bifurkacji dla ściskanego pręta może być wykorzystane do badania procesu wyboczenia ściskanego słupa konstrukcyjnego. Jednakże porównując je z kryteriami opracowanymi dla smukłych prętów z materiałów o stowarzyszonych prawach płynięcia, okazuje się, że może wtedy wystąpić niebezpieczeństwo wyboczenia elementu przy znacznie niższym poziomie naprężeń niż w przypadku materiałów o stowarzyszonych prawach płynięcia [6].

LITERATURA

1. Hill R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids 1958, p. 6 – 236.
2. Mróz Z.: On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids. Arch. Mech. Stos. 1966, p. 18.
3. Raniecki B., Bruhns O. T.: Bounds to bifurcation stress in solids with non-associated flow law at finite strain. Arch. Mech. Stos. J. Mech. Phys. Solids 1981, p. 29 – 153.
4. Raniecki B., Bruhns O. T.: Ein schrankenverfahren bei verzwegungsproblem inelasticher Formanderung. ZAMM 62, T 111-113, 1982.
5. Tvergard V.: Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. J. Mech. Phys. Solids 1982, p. 6.
6. Podgórski J.: Stany krytyczne w ciałach z tarciem wewnętrznym. praca doktorska, Lublin/Warszawa 1985.

Recenzent: Dr hab. inż. Mieczysław Kuczma, prof. Uniwersytetu Zielonogórskiego