

Kamil PAWLIK*
Politechnika Opolska

OPIS SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH OŚRODKÓW WIELOSKŁADNIKOWYCH

Streszczenie. W pracy analizuje się stan naprężeń i odkształceń w materiale kapilarno-porowatym z mikrouszkodzeniami. Zakłada się, że ośrodek składa się ze składników objętościowych oraz powierzchniowych na granicy faz. W filmie cieczy na powierzchni międzyfazowej uwzględnia się występowanie ciśnień rozklinowujących, które w prezentowanym modelu mają wpływ na uplastycznienie się szkieletu ciała. Finalnie, na podstawie analizy termomechanicznej zostały sformułowane równania konstytutywne sprężysto-plastyczności dla analizowanego ośrodka.

DESCRIPTION OF ELASTO-PLASTIC MULTICOMPONENT MEDIUM

Summary. In this paper state of stress and strain in a capillar-porous body with microdamage is analysed. Considered medium consists of volumetric and superficial components. One takes into consideration that disjoining pressure occurring on the interfacial surfaces, has an impact on plasticization of body's skeleton. Finally, constitutive equations of elastoplasticity are formulated for the stated problem on the basis of the thermomechanics analysis.

Wstęp

Opisowi procesu uplastycznienia ośrodków jednoskładnikowych poświęcono już wiele prac. Problem pojawia się, gdy chcemy przenieść te wyniki na ośrodek wieloskładnikowy, w którym występują procesy dyfuzyjne, przemiany fazowe, czy procesy degradacji materiału. Tym właśnie problemem zajmiemy się w niniejszej pracy.

Analizować będziemy ośrodek wielofazowy z wyróżnionym składnikiem, którym jest szkielet. Proces uplastycznienia musi spełniać bilanse masy, pędu, energii oraz nierówność

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik

wzrostu entropii, będziemy więc opierać się na założeniach kontinuum wieloskładnikowego, w którym oprócz faz objętościowych występują również fazy powierzchniowe [1]. Uplastycznieniu będzie ulegać tylko szkielet, lecz oprócz naprężeń w nim występujących, wpływ na proces będzie miało także ciśnienie rozklinowujące. Opis tego problemu uzyskamy modyfikując propozycję Nahdiego i Murcha, przedstawioną w pracy P. Perzyny [3]. Jest to tematem pracy.

1. Opis termomechaniczny

Punktem wyjścia proponowanego opisu jest podejście termomechaniczne ośrodków wieloskładnikowych oparte na wspomnianych bilansach [1], z których otrzymujemy nierówność rezydualną

$$\begin{aligned} & -\rho\dot{U} - \rho\dot{U}^f + \rho\dot{S}\Theta + \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + \sigma_{ij}^f\dot{\epsilon}_{ij}^f + \sum_{\alpha} \rho M^{\alpha} \dot{c}^{\alpha} + \sum_{\alpha f} \rho M^{\alpha f} \dot{c}^{\alpha f} + \\ & - \sum_{\alpha} j_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} - \sum_{\alpha f} j_i^{\alpha f} M_{,i}^{\alpha f} - \frac{q_i \Theta_{,i}}{T} \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie $\rho, A, A^f, S, \Theta, \sigma_{ij}, \sigma_{ij}^f, \epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^f, M^{\alpha}, M^{\alpha f}, c^{\alpha}, c^{\alpha f}, j_i^{\alpha}, j_i^{\alpha f}, q_i$ to kolejno gęstość, energia wewnętrzna składników objętościowych i powierzchniowych, entropia, temperatura, naprężenia, odkształcenia, potencjały chemiczne, koncentracje poszczególnych składników, strumienie masy, strumień ciepła. Indeks f odnosi się do składników powierzchniowych.

Dla uproszczenia rozważań w miejsce energii wewnętrznej wprowadzimy energię swobodną określoną zależnością

$$\rho A + \rho A^f = \rho U + \rho U^f - \rho S \Theta. \quad (2)$$

Otrzymamy wówczas nierówność rezydualną w formie

$$\begin{aligned} & -\rho\dot{A} - \rho^f\dot{A}^f - \rho\dot{S}\Theta + \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} + \sigma_{ij}^f\dot{\epsilon}_{ij}^f + \sum_{\alpha} \rho M^{\alpha} \dot{c}^{\alpha} + \sum_{\alpha f} \rho M^{\alpha f} \dot{c}^{\alpha f} + \\ & - \sum_{\alpha} j_i^{\alpha} M_{,i}^{\alpha} - \sum_{\alpha f} j_i^{\alpha f} M_{,i}^{\alpha f} - \frac{q_i \Theta_{,i}}{T} \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Przeanalizujemy przypadek, gdy $\Theta = 0, M_k^{\alpha} = 0, M_k^{\alpha f} = 0$. Rozdzielimy moc mechaniczną $\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}$ związaną ze składnikami objętościowymi na części: sprężyste i plastyczne [2]

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (4)$$

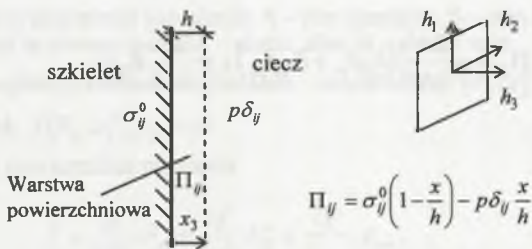
gdzie $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ są to kolejno odkształcenia sprężyste i plastyczne, a odkształcenia całkowite da się przedstawić jako sumę

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (5)$$

W naszych rozważaniach interesuje nas ciśnienie rozklinowujące Π_{ij} . Zachodzić będzie rozkład mocy mechanicznej $\sigma_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{ij}^f$ związanej z filmem cieczy przy powierzchni na części

$$\sigma_{ij}^f \dot{\varepsilon}_{ij}^f = \sigma^f \delta_{ij} \dot{\varepsilon}^f + \Pi_{ij} \dot{g}_{ij} = 3\sigma^f \dot{\varepsilon}^f + \Pi_{ij} \dot{g}_{ij} \quad (6)$$

zależne od zmiany naprężenia powierzchniowego σ^f oraz deformacji filmu cieczy g_{ij} . Rozkład naprężeń w ośrodku przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Rozkład naprężeń w ośrodku
Fig. 1. Stresses distribution in medium

Ciśnienie rozklinowujące Π_{ij} jest tensorem transversalno-izotropowym

$$\Pi_{ij} = \Pi_1 (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2}) + \Pi_3 \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad (7)$$

stąd

$$\Pi_{ij} \dot{g}_{ij} = \Pi_1 (\dot{h}_{1,1} + \dot{h}_{2,2}) + \Pi_3 \dot{h}_{3,3} = \Pi_1 \Delta \dot{F} + \Pi_3 \Delta \dot{h}. \quad (8)$$

Przyjmując energię swobodną A w postaci

$$A + A^f = (1 - \omega) [A^e(\varepsilon_{ij}^e, \Theta, c^\alpha) + A^p(\chi_{ij}, \Theta, c^\alpha)] + A^f(\varepsilon^f, \Delta h, \Delta F, \Theta, c^{af}), \quad (9)$$

z nierówności rezydualnej (3) otrzymamy równania konstytutywne na:

- entropię

$$S = - \frac{\partial(A + A^f)}{\partial \Theta}; \quad (10)$$

- potencjał chemiczny

$$M^\alpha = \frac{\partial A}{\partial c^\alpha}; \quad (11)$$

$$M^{af} = \frac{\partial A^f}{\partial c^{af}}; \quad (12)$$

- ciśnienie rozklinowujące

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega) \rho \frac{\partial A^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e}; \quad (13)$$

- tensor naprężenia

$$\Pi_{ij} = \rho \frac{\partial A^f}{\partial \Delta F} (\delta_{i1} \delta_{j1} + \delta_{i2} \delta_{j2}) + \rho \frac{\partial A^f}{\partial \Delta h} \delta_{i3} \delta_{j3}. \quad (14)$$

Składniki

$$- \rho \frac{\partial A}{\partial \omega} \dot{\omega} - \rho \frac{\partial A}{\partial \chi_{ij}} \dot{\chi}_{ij} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (15)$$

wyznaczają dyssypację w procesie.

2. Równania konstytutywne sprężysto-plastyczności

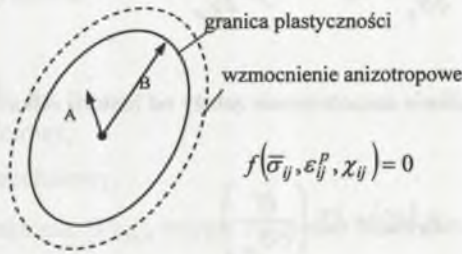
W celu opisanego procesu uplastycznienia zmodyfikujemy opis zaproponowany przez Nahdiego i Murcha [3], przyjmując, że warunek uplastycznienia odnosi się tylko do szkieletu. Rozpatrzmy szczególnie przypadek, gdzie ciało składa się ze szkieletu - ciało stałe, składników ciekłych oraz składników powierzchniowych na granicy faz ciekłej i stałej.

Uplastycznienie dotyczyć będzie w tym przypadku tylko szkieletu, ale wpływ będzie miało także ciśnienie rozklinowujące. Wprowadzimy więc pojęcie naprężeń efektywnych danych zależnością

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{1-\omega} \sigma_{ij}^0 + \Pi_{ij}. \quad (16)$$

Następnie wprowadzimy pojęcie powierzchni płynięcia zależnej od naprężeń (16), odkształceń plastycznych oraz wzmocnienia anizotropowego w postaci

$$f = f(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_{ij}). \quad (17)$$



Rys. 2. Stan materiału w przestrzeni naprężenia: A – stan sprężysty, B – stan plastyczny
Fig. 2. State of material in stresses space: A – elastic state, B – plastic state

Stanowi sprężysto-plastycznemu odpowiada warunek $f(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_{ij}) = 0$, a stanowi sprężystemu warunek $f(\bar{\sigma}_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_{ij}) < 0$.

Rozważając zmianę powierzchni płynięcia

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{kl}^p} \dot{\varepsilon}_{kl}^p + \frac{\partial f}{\partial \chi_{mn}} \dot{\chi}_{mn}, \quad (18)$$

jeżeli rozpatrywany stan jest stanem sprężysto-plastycznym i $\dot{f} < 0$, prowadzi to do stanu sprężystego, co pociąga za sobą $\dot{\varepsilon}_{kl}^p = 0$, $\dot{\chi}_{mn} = 0$. Można więc wprowadzić operator

$$L(\dot{\bar{\sigma}}_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} \quad (19)$$

pozwalający zapisać warunki dla poszczególnych stanów:

- odciążenia $f = 0$, $L(\dot{\bar{\sigma}}) < 0$;
- neutralnego $f = 0$, $L(\dot{\bar{\sigma}}) = 0$;
- obciążenia $f = 0$, $L(\dot{\bar{\sigma}}) > 0$.

Następnie należy przyjąć równania na przyrost odkształceń plastycznych oraz wzmocnienie w postaci

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\chi}_{ij} = -\dot{\lambda} D_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \chi_{kl}}. \quad (20)$$

Zakładając jednak, że wzmocnienie anizotropowe zależy od historii odkształceń plastycznych

$$\dot{\chi}_{ij}(\dot{\varepsilon}_{kl}^p) = \dot{\lambda} \bar{\chi}_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \right) \quad (21)$$

z warunku $\dot{f} = 0$ otrzymamy

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\bar{\sigma}}_{kl} \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{rs}} \bar{\chi}_{rs} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \right) \right]^{-1}. \quad (22)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{h} = \left[\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{rs}} \bar{\chi}_{rs} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \right) \right]^{-1} \quad (23)$$

i biorąc pod uwagę warunki obciążania otrzymamy

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \begin{cases} 0, & \text{dla } f < 0 \\ \bar{h} \langle L(\dot{\sigma}_{ij}) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{dla } f > 0 \end{cases} \quad (24)$$

Przedstawione wyżej równania pozwolą nam opisać zmianę odkształceń plastycznych w całej historii obciążania i odciążania.

3. Oznaczenia symboli

ρ - gęstość, [kg/m³],

α - składnik objętościowy,

α^f - składnik powierzchniowy,

U, A - energia wewnętrzna, [J/kg], energia swobodna składników objętościowych, [J/kg],

U^f, A^f - energia wewnętrzna, [J/kg], energia swobodna składników powierzchniowych, [J/kg],

Π_{ij}, g_{ij} - ciśnienie rozklinowujące, [kN/m²], tensor odksz. w. pow., [-],

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - tensor naprężenia, [kN/m²], tensor odkształcenia składników objętościowych, [-],

$\sigma_{ij}^f, \varepsilon_{ij}^f$ - tensor naprężenia, [kN/m²], tensor odkształcenia składników powierzchniowych, [-],

F, h - powierzchnia [m²], grubość warstwy powierzchniowej [m],

M^α, c^α - potencjał chemiczny, [J/kg], koncentracja składnika α , [kg/kg],

$M^{\alpha^f}, c^{\alpha^f}$ - potencjał chemiczny, [J/kg], koncentracja składnika α^f , [kg/kg],

S, T, Θ - entropia, [J/(kg K)], temperatura absolutna, [K], temperatura, [K],

$\bar{j}_i^\alpha, \bar{j}_i^{\alpha^f}$ - strumień masy składnika α , [kg/(s m²)], strumień masy składnika α^f , [kg/(s m²)],

q_i - strumień ciepła, [J/(s m²)],

ω - parametr uszkodzenia, [-],

χ_{ij} - wzmocnienie anizotropowe,

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

LITERATURA

1. Kubik J.: Przepływy wilgoci w materiałach budowlanych. Politechnika Opolska, Opole 2000.
2. Kubik J.: Elementy termomechaniki. Politechnika Opolska, Opole 2004.
3. Perzyna P.: Termodynamika materiałów niesprężystych. PWN, Warszawa 1978.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Skrzypczyk, prof. w Politechnice Śląskiej