

Piotr PLUCIŃSKI*
Politechnika Krakowska

METODY NUMERYCZNE OPISU NIEŚCISLIWOŚCI RDZY W ANALIZIE EFEKTÓW MECHANICZNYCH KOROZJI STALI ZBROJENIOWEJ

Streszczenie. W pracy wykorzystano dwie metody numeryczne, stosowane w metodzie elementów skończonych, pozwalające uwzględnić nieściśliwość w analizie mechanicznej wzrostu objętości produktu korozji stali zbrojeniowej. W pierwszej metodzie modyfikacji podlega tensor gradientu przyrostu deformacji, natomiast w drugiej metodzie modyfikowana jest liniowa macierz pochodnych funkcji kształtu. Przykład liczbowy wykazał porównywalność obu metod postępowania. Oznacza to, że numerycznie prostsza druga metoda może być rekomendowana, nawet w przypadku analizy geometrycznie nieliniowej.

DESCRIPTION OF NUMERICAL METHODS OF MECHANICAL EFFECTS OF RUST INCOMPRESSIBILITY IN REBAR COROSION ANALYSIS

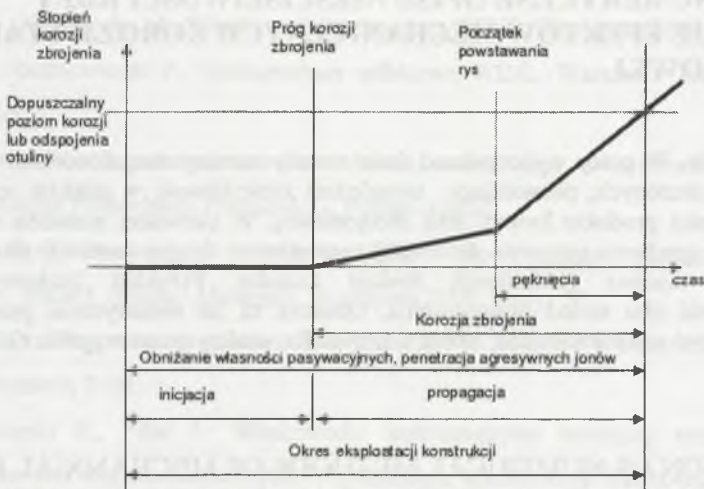
Summary. In the paper two numerical methods, applied in FEM, description of rust incompressibility in the analysis of mechanical effects of volume increasing of rust in rebar corrosion process are presented. In the first method the increment of gradient deformation tensor is modified and the second method is based on modification of the linear strain-displacement matrix. Example confirmed usability of both methods of analysis. It means that numerically simpler second method can be preferred even in the case of geometrically nonlinear analysis.

1. Wstęp

Korozja penetruje stal zbrojeniową zarówno w przekroju poprzecznym jak, i po długości pręta. W pierwszym przypadku wzrost objętości produktu korozji jest źródłem powstawania rys w betonie w płaszczyźnie prostopadłej do zbrojenia, natomiast w drugim przypadku rysy

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Czesław Cichoń

podłużne mogą być powodem odspajania się zbrojenia od otuliny betonowej [2]. Proces tworzenia się rys poprzecznych przebiega od zbrojenia ku powierzchni konstrukcji i rysa jest widoczna dopiero, gdy osiąga ona powierzchnię, co stwarza dodatkowe trudności w systematycznej ocenie stopnia bezpieczeństwa eksploatowanej konstrukcji. Rysy wewnętrzne są również niebezpieczne, ponieważ ułatwiają transport czynników szkodliwych, przyspieszających korodowanie zbrojenia (np. chlorków w okresie zimowym) z otocznia do otuliny betonowej.



Rys. 1. Model określający czas bezpiecznego użytkowania konstrukcji [9]
Fig. 1. Conceptual service life model of structure [9]

Na rys. 1. przedstawiono schematycznie proces inicjacji korozji i propagacji rys w konstrukcji żelbetowej. Produkt korozji, czyli rdza, może mieć różny skład chemiczny ze stałymi materiałowymi $\nu = 0.499$ i $E = 12$ kPa [4], co oznacza, że jest ona sprężystym materiałem prawie nieściśliwym. W pracy nie analizowano procesów elektrochemicznych tworzenia się rdzy [11]. Ograniczono się tylko do analizy skutków mechanicznych równomiernego tworzenia się i pęcznienia rdzy w przekroju poprzecznym pręta zbrojeniowego, co ogranicza rzeczywisty problem przestrzenny mechaniki do problemu płaskiego stanu odkształcenia.

Efekt mechaniczny korozji zbrojenia jest wzrost naprężeń w betonie aż do osiągnięcia wytrzymałości betonu na rozciąganie i rozpoczęcie się procesu propagacji rysy. W literaturze efekt mechaniczny równomiernej korozji analizowany jest z wykorzystaniem

równań teorii sprężystości dla pierścienia grubościennego poddanego działaniu ciśnienia wewnętrznego [8].

W procedurze numerycznego rozwiązania MES porównano dwie metody opisu nieściśliwości. Pierwsza - korzysta z metody uśrednionej dylatacji (*ang. mean dilatation method*). Druga - jest metoda założonych odkształceń (*ang. assumed strain method*) w formie standardowej metody „B-bar”.

2. Podstawowe równania problemu

Przyjęto, że przemianie fazowej stali zbrojeniowej w rdzę mogą towarzyszyć duże gradienty przemieszczeń, co uzasadnia konieczność przyjęcia nieliniowych równań geometrycznych. Przyjmując opis materialny, równaniami tymi będą równania geometryczne Greena-Lagrange’a. Dalszym uzasadnieniem jest przyjęta metoda budowy modelu numerycznego MES, a mianowicie równania tego modelu będą budowane w tzw. *uaktualnionym opisie Lagrange’a* (UOL), w którym to opisie obliczenia są wykonywane w konfiguracji aktualnej (X_i), a odnoszone do konfiguracji początkowej (x_i). Ponadto, iteracyjne rozwiązywanie równań przyrostowych MES pozwoli na rejestrowanie i śledzenie historii rozwoju (i redystrybucji) pola naprężeń, w szczególności w obszarze przemiany fazowej stali w rdzę.

2.1. Równania geometryczne

Zmodyfikowany tensor gradientu przyrostu deformacji w konfiguracji aktualnej (X_i) wyrażony jest wzorem

$$\Delta^* F_{ij} = \alpha \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} \right) \quad (1)$$

gdzie α jest pewnym współczynnikiem funkcyjnym, którego interpretacja zostanie podana w p.3.1.

Zmodyfikowany tensor przyrostów odkształceń Greena-Lagrange’a przyjmie postać

$$\Delta^* \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\alpha^2 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \right) - \delta_{ij} \right] = \Delta^* e_{ij} + \Delta^* \eta_{ij} + \Delta^* \tilde{e}_{ij} \quad (2)$$

gdzie

$$\Delta^* e_{ij} = \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right), \quad \Delta^* \eta_{ij} = \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \right), \quad \Delta^* \hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \delta_{ij}$$

2.2. Tensory naprężeń

W postępowaniu przyrostowym UOL posługujemy się całkowitym tensorem naprężeń Cauchy'ego, zdefiniowanym w konfiguracji aktualnej na początku kroku przyrostowego (X_i), co wymaga transformacji naprężeń Pioli-Kirchhoffa $\sigma_{ij} + \Delta^* \sigma_{ij}$ na początku każdego kroku przyrostowego według wzoru [10]

$$\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij} = \frac{1}{\partial(Y_1, Y_2, Y_3)} \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \frac{\partial Y_j}{\partial X_l} (\sigma_{kl} + \Delta^* \sigma_{kl}) \quad (3)$$

gdzie $\Delta^* \sigma_{kl}$ jest zmodyfikowanym tensorem przyrostów naprężeń Pioli-Kirchhoffa, a (Y_i) określa konfigurację aktualną na końcu kroku przyrostowego.

2.3. Przyrostowe równanie fizyczne

W przypadku materiału nieściśliwego równanie fizyczne przyjmuje się w postaci

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

gdzie ciśnienie p jest dodatkową niewiadomą. W modelu mieszanym niewiadomą tą można wyeliminować, wykorzystując warunek nieściśliwości w formie

$$u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} = 0, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5)$$

Podstawienie (5) do (4) prowadzi do liniowego równania fizycznego Hooke'a, które w postaci przyrostowej ma postać

$$\Delta^* \sigma_{ij} = D_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{\nu} \delta_{kl}) = D_{ijkl} \Delta \bar{\varepsilon}_{kl} \Rightarrow \sigma = 2G \mathbf{D}_{\Delta \bar{\varepsilon}} + 3K \mathbf{A}_{\Delta \bar{\varepsilon}} \quad (6)$$

gdzie $\Delta\varepsilon_\nu$ jest przyrostem odkształcenia objętościowego, wyrażającego względną zmianę objętości produktu korozji [3], D_{ijkl} jest macierzą związków konstytutywnych, $G = \mu$, $K = \frac{1+\nu}{3\nu}\lambda$ oraz $\mathbf{D}_{\Delta\varepsilon}$ i $\mathbf{A}_{\Delta\varepsilon}$ są odpowiednio dewiatorem i aksjatorem różnicy tensorów przyrostu odkształceń $\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_\nu\delta_{kl}$. Z postaci stałych materiałowych w równaniu (6) wynika, że ich rozwiązanie wymaga specjalnej metody postępowania (dla $\nu \cong 0.5$ mamy bowiem $K \rightarrow \infty$).

2.4. Przyrostowe równanie wariacyjne

Równania przyrostowe MES w sformułowaniu przemieszczeniowym wyprowadzono ze zlinearyzowanego przyrostowego równania wariacyjnego

$$\int_{V^N} \alpha^4 D_{ijkl} \Delta^* e_{kl} \delta \Delta^* e_{kl} dV + \int_{V^N} \alpha^2 (\sigma_{ij} - D_{ijkl} \Delta\varepsilon_\nu \delta_{kl}) \delta \Delta^* \eta_{ij} dV + \int_{V^N} \alpha^2 D_{ijkl} \Delta^* \dot{e}_{kl} \delta \Delta^* e_{ij} dV + \int_{V^N} \alpha^2 (\sigma_{ij} - D_{ijkl} \Delta\varepsilon_\nu \delta_{kl}) \delta \Delta^* e_{ij} dV - \int_{S^N} (P_i + \Delta P_i) \delta \Delta u_i dS = 0 \quad (7)$$

gdzie $P_i + \Delta P_i$, $i=1,2,3$, są współrzędnymi wektora intensywności obciążenia zewnętrznego.

3. Numeryczne aspekty analizy

3.1. Metoda uśrednionej dylatacji

Metoda uśrednionej dylatacji [5] jest pewną numeryczną realizacją mieszanego sformułowania dla nieliniowego, trójpolowego problemu nieściśliwości [6]. W pracy [7] wykazano równoważność tej metody w problemach liniowych z metodą „B-bar”. W sformułowaniu mieszanym płaskiego stanu odkształcenia wykorzystuje się rozkład tensora gradientu deformacji \mathbf{F} na iloczyn tensorów opisujących zmianę objętości $\mathbf{F}_{vol} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}$ i zmianę postaci $\tilde{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}$, gdzie $J = \det \mathbf{F}$. Rozkład ten zapewnia, że składowe $\tilde{\mathbf{F}}$ nie wpływają na zmianę objętości ($\det \tilde{\mathbf{F}} = 1$). Następnie, w metodzie uśrednionej dylatacji, wyznacznik J , będący miarą zmiany objętości, zastępuje się we wzorze na $\tilde{\mathbf{F}}$ przez parametr Θ , który jest drugą, dodatkową niewiadomą. Niewiadoma ta jest z kolei eliminowana przez

aproxymacyjne spełnienie warunku $\Theta = J$. W realizacji numerycznej prowadzi to do wzoru typu (1), w którym

$$\alpha = \frac{\Theta^{\frac{1}{2}}}{J^{\frac{1}{2}}} \cong \frac{\bar{J}^{\frac{1}{2}}}{J^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

gdzie $J^{\frac{1}{2}}$ i $\bar{J}^{\frac{1}{2}}$ są obliczane odpowiednio w punktach standardowej i zredukowanej kwadratury Gaussa w procedurze całkowania numerycznego macierzy elementu skończonego.

3.2. Metoda „B-bar” [1]

W tym przypadku współczynnik $\alpha = 1$ i równania geometryczne są równaniami liniowymi. Modyfikacji natomiast podlega liniowa macierz pochodnych funkcji kształtu \mathbf{B}_L według wzoru

$$\bar{\mathbf{B}}_{Ln} = \mathbf{B}_{Ln} - \mathbf{B}_{Ln}^{aks} + \bar{\mathbf{B}}_{Ln}^{aks} \quad (9)$$

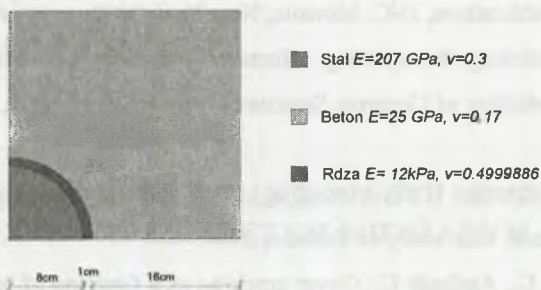
gdzie dla n -tego węzła w przypadku płaskiego stanu odkształcenia

$$\mathbf{B}_{Ln}^{aks} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_{n,x} & N_{n,y} \\ N_{n,x} & N_{n,y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{Ln}^{aks} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \bar{N}_{n,x} & \bar{N}_{n,y} \\ \bar{N}_{n,x} & \bar{N}_{n,y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_{n,i} = \frac{\int_{A_e} N_{n,i} dA_e}{\int_{A_e} dA_e}, \quad i = x, y$$

4. Przykład

W przykładzie porównano ze sobą opisane metody pokonywania trudności opisu materiału nieściśliwego w skończeniu elementowej procedurze rozwiązania. Metody te są zaimplementowane do większego programu analizy efektów mechanicznych rdzewienia prętów zbrojenia. Program jest znacznie rozbudowany i uwzględnia m.in. redystrybucję naprężeń w wyniku przemiany fazowej stali w rdzę oraz konieczność adaptacji siatki elementowej w rezultacie zmniejszania się powierzchni przekroju poprzecznego zbrojenia na skutek rdzewienia oraz powiększania się objętości masy skorodowanej.

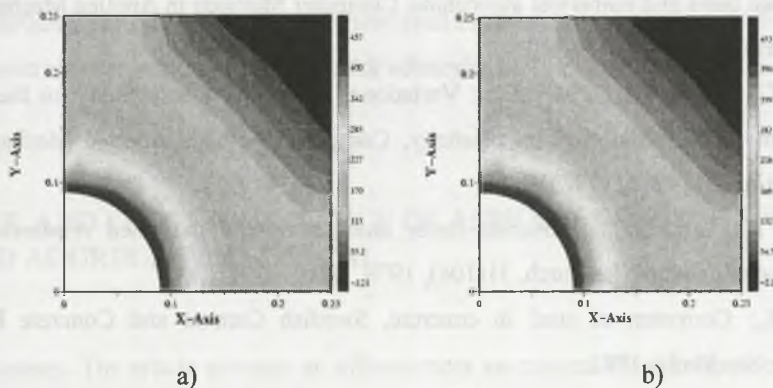
Jako przykład rozwiązano kwadratową tarczę o boku 25cm jak na rys. 2, część pokryta rdzą została poddana obciążeniu wstępnym odkształceniem objętościowym od puchnącej rdzy. Zostało wykonanych 50 kroków przyrostowych MES z $\Delta\varepsilon_v = 2 \cdot 10^{-6}$.



Rys. 2. Dane geometryczne i materiałowe dla problemu płaskiego stanu odkształcenia

Fig. 2. Geometrical and material data for the plane strain problem

Na rys. 3 przedstawione zostały mapy naprężeń obwodowych, jako naprężeń mających największy wpływ na powstanie zarysowań w otulinie betonowej. Jak widać, dwie metody dały porównywalny wynik.



Rys. 3. Mapy naprężeń obwodowych σ_θ : a) metoda modyfikacji \mathbf{B}_L , b) metoda modyfikacji \mathbf{F}

Fig. 3. Circumferential stress maps σ_θ : a) \mathbf{B}_L modification method, b) \mathbf{F} modification method

LITERATURA

1. Hughes T.J.R.: The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover Publications, INC. Mineola, New York 2000.
2. Lundgren K.: Modelling the splitting effects of corrosion in reinforced concrete. In: Computational Modelling of Concrete Structures, Bićanić et al. (eds), Swets & Zeitlinger, Lisse 2003.
3. Martín-Pérez B.: Service Life Modelling of R.C.Highway Structures Exposed to Chlorides, PhD thesis, University of Toronto, 1999.
4. Molina F., Alonso C., Andrade C.: Cover cracking as a function of bar corrosion: Part 2- Numerical model, Materials and Structures, 26, 1993, 532-548.
5. Nagtegaal J.C, Parks D.M., Rice J.R.: On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4, 1974, 153-177.
6. Simo J.C., Taylor R.L.: Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 85, 1991, 273-310.
7. Simo J.C., Taylor R.L., Pister K.S.: Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation plasticity, Computer Methods Applied Mechanics and Engineering, 51, 1985, 177-208.
8. Teffers R.: Cracking of concrete cover along anchored deformed reinforcing bars, Magazine of Concrete Research, 31(106), 1979, 3-10.
9. Tuutti K.: Corrosion of steel in concrete, Swedish Cement and Concrete Research Institute, Stockholm 1982.
10. Washizu K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1982.
11. Zybura A.: Degradacja żelbetu w warunkach korozyjnych, Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej, z. 72, Gliwice 1990.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Kubik