

Wojciech POLITALSKI\*  
Politechnika Krakowska

## PRZYROST NAPRĘŻEŃ W CIĘGNIENIE BEZ PRZYCZEPNOŚCI W WYNIKU OBCIĄŻENIA SPRĘŻONEJ BELKI KABLOBETONOWEJ

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono wyniki badania belki sprężonej cięgnem bez przyczepności oraz zaprezentowano ich porównanie z teorią proponowaną przez normy, jak również przez autorów zajmujących się tym zagadnieniem. Przeprowadzone obliczenia wykazały dobrą zbieżność wybranego podejścia z zachowaniem się elementu podczas eksperymentu i potwierdziły, że jego nośność na zginanie może być w niektórych przypadkach znacznie większa, niż proponuje podejście normowe.

## STRESS INCREMENT IN UNBONDED TENDON DUE TO THE LOADING OF A PRESTRESSED CONCRETE POST-TENSIONED BEAM

**Summary.** In this paper there are presented results of unbonded post-tensioned beam test which are compared with the theory proposed by codes and different authors dealing with the matter given above. Conducted calculations based on chosen method had good convergence with response of the member and confirmed that in some cases flexural strength could be much more greater than proposed by code equations.

### 1. Wstęp

Konstrukcje sprężone kablami bez przyczepności są w użyciu już od kilkudziesięciu lat. Mają zastosowanie nie tylko w obiektach mostowych czy przemysłowych, lecz również coraz częściej w budownictwie handlowo – usługowym czy mieszkaniowym.

---

\* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Andrzej Seruga, prof. Politechniki Krakowskiej

## 2. Nośność na zginanie przekroju sprężonego cięgnami bezprzyczepnościowymi

### 2.1. Określenie nośności konstrukcji z wykorzystaniem analizy przekrojów zginanych

W celu określenia nośności przekroju sprężonego cięgnami bezprzyczepnościowymi potrzebna jest znajomość sił działających w interesującym nas przekroju, a więc siły ściskającej w betonie i zbrojeniu ściskanym oraz siły rozciągającej w zbrojeniu rozciągającym i w cięgnach bezprzyczepnościowych. W tym celu możemy posłużyć się zamieszczoną w Polskiej Normie [1] i EC-2 [2] analizą przekrojów zginanych, wykorzystującą zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami oraz równania równowagi. Pojawia się jednak tutaj problem z określeniem naprężeń występujących w stali sprężającej (a co za tym idzie sił), które możemy przedstawić za pomocą poniższych równań:

- według konwencji oznaczeń występujących w EC-2

$$\sigma_{psm} = \sigma_{psm} + \Delta\sigma_{p,ULS} \quad (1)$$

- według konwencji oznaczeń występujących w ACI 318M-05

$$f_{ps} = f_{ps} + \Delta f_{ps} \quad (1a)$$

gdzie:

$\sigma_{psm}$  i  $f_{ps}$  - naprężenie w cięgnie sprężającym w stanie granicznym,

$\sigma_{psco}$  i  $f_{psc}$  - naprężenie w cięgnie sprężającym po wszystkich stratach,

$\Delta\sigma_{p,ULS}$  i  $\Delta f_{ps}$  - zmiana naprężenia w cięgnie wywołana dodatkowym obciążeniem.

O ile wyznaczenie naprężenia efektywnego po wszystkich stratach nie nastrocza większych problemów, o tyle określenie wzrostu naprężeń, wywołanego przyłożeniem do elementu obciążeń wykraczających poza ciężar własny, nie jest zadaniem tak łatwym. Spowodowane jest to tym, że zmiana odkształceń w cięgnach bezprzyczepnościowych ma charakter globalny, a nie lokalny, jak w przypadku cięgien z przyczepnością. W cięgnach z przyczepnością, przy założeniu idealnej przyczepności stali do betonu, zmiana odkształcenia w stali sprężającej jest równa zmianie odkształcenia betonu na poziomie cięgna wypadkowego. Natomiast w cięgnach bezprzyczepnościowych, przy założeniu pominięcia tarcia pomiędzy cięgnami a osłonką i wynikającej z tego równości naprężeń na całej długości cięgna, odkształcenie cięgna w dowolnym przekroju jest równe średniemu odkształceniu betonu na poziomie cięgna wypadkowego, na długości cięgna pomiędzy zakotwieniami.

## 2.2. Określenie przyrostu naprężeń

Określenie przyrostu naprężeń w cięgnach bez przyczepności jest skomplikowane, ponieważ zależy on od wielu parametrów, takich jak: wytrzymałość betonu na ściskanie, wytrzymałość na rozciąganie oraz stopień zbrojenia zwykłego i sprężającego, stosunek rozpiętości do wysokości użytecznej przekroju, trasa kabla, typ obciążenia i wielu innych. Zarówno polska norma [1], jak i EC2 [2] podchodzą do tego zagadnienia w sposób uproszczony, zalecając przyjęcie przyrostu naprężeń w zbrojeniu sprężającym na poziomie 100 MPa. Odpowiada to zaleceniom, jakie proponowała norma amerykańska ACI 318-63. Obecne wydanie tej normy [3] idzie o krok naprzód i uzależnia wartość przyrostu naprężeń od trzech parametrów: wytrzymałości betonu na ściskanie, stopnia zbrojenia sprężającego i stosunku rozpiętości do wysokości użytecznej przekroju, co umożliwia uzyskanie przyrostu naprężeń w granicach od 70 do 420 MPa. Oprócz zaleceń normowych w literaturze można znaleźć inne teorie, zajmujące się powyższym zagadnieniem. Dwie spośród nich zasługują na szczególną uwagę. Pierwsza z nich to teoria uzależniająca przyrost naprężeń od długości przegubów plastycznych, która została wykorzystana między innymi w pracach [5,6], oraz teoria sprowadzająca analizę elementu sprężonego cięgnami bez przyczepności do elementu sprężonego cięgnami z przyczepnością za pomocą wprowadzenia współczynnika redukcji odkształceń  $\Omega_U$  [4]. Solidne podstawy teoretyczne oraz dobra zbieżność wyników obliczeń z badaniami spowodowały, że powyższe dwie teorie zostały rozwinięte i znalazły zastosowanie nie tylko w elementach sprężonych bezprzyczepnościowo cięgnami wewnętrznymi, lecz również tych z cięgnami zewnętrznymi [7].

## 3. Program badań

Przeprowadzone badania pilotażowe są częścią szerszego programu, mającego na celu dostarczenie informacji na temat zachowania się elementów sprężonych cięgnami bezprzyczepnościowymi. W pierwszym etapie dobrano parametry badanego elementu w ten sposób, aby uzyskać jak największy przyrost naprężeń w cięgnie w stanie granicznym nośności ze względu na zginanie. W kolejnych etapach zostanie podjęta próba uzyskania wartości przyrostu naprężeń w cięgnach mniejszego od 100 MPa oraz badania na elementach wieloprzęsłowych.

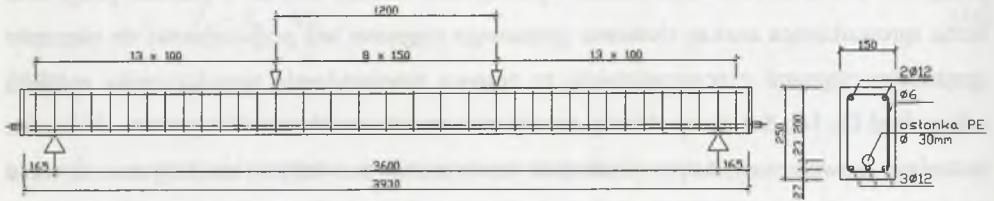
### 3.1. Charakterystyka oraz geometria badanego elementu belkowego

Badana belka wolnopodparta miała wymiary przekroju  $b = 150$  mm oraz  $h = 250$  mm. Jej rozpiętość w osiach podpór wynosiła 3,6 m. Belkę wykonano z betonu o średniej wytrzymałości na ściskanie  $f_{cm} = 58$  MPa określonej na podstawie 3 próbek walcowych. Na zbrojenie główne przypadały 2 pręty  $\varnothing 12$  mm górą oraz 3 pręty  $\varnothing 12$  mm dołem ze stali klasy AIII-N. Zbrojenie poprzeczne zostało wykonane ze strzemion  $\varnothing 6$  mm w rozstawie 150 mm na odcinku pomiędzy siłami skupionymi oraz w rozstawie 100 mm na pozostałej długości belki. Belka została sprężona cięgnem L15,5 przy użyciu naciągu jednostronnego. W tabeli 1 zestawiono charakterystyczne właściwości splotu określone na podstawie badania 7 próbek.

Tabela 1

Charakterystyczne właściwości cięgna sprężającego

Pole przekroju poprzecznego [mm <sup>2</sup> ]	Siła zrywająca [kN]	Wytrzymałość charakterystyczna na rozciąganie [MPa]	Charakterystyczna granica plastyczności [MPa]	Moduł sprężystości [GPa]
150,57	284,27	1887,93	1675,43	198,75



Rys. 1. Geometria, schemat statyczny i obciążenie dwoma siłami skupionymi

Fig. 1. Geometry, static scheme and four-point loading

### 3.2. Technika pomiaru

Przeprowadzone pomiary zostały zarejestrowane na komputerze przy użyciu dwóch mostków o łącznej liczbie kanałów wynoszącej 12. Za pomocą dwóch siłomierzy tensometrycznych C6A Force Transducer HBM o zakresie pomiarowym do 500 kN mierzono siłę, jaka była przekazywana z prasy na tawers oraz siłę w cięgnie bezprzyczepnościowym pod zakotwieniem biernym. Do pomiaru ugięć wykorzystano dwa czujniki indukcyjne WA 50 Inductive Standard Displacement Transducer HBM o zakresie pomiarowym 50 mm umieszczone w  $1/3$  i  $2/3$  rozpiętości. Na początku i końcu każdej z faz obciążenia kontrolowano dodatkowo ugięcia za pomocą czujnika zegarowego umieszczonego w  $2/3$  rozpiętości. Na górnej i dolnej powierzchni belki, w środku jej rozpiętości, założono bazę o długości 250 mm,

na której mierzono odkształcenia za pomocą czujników indukcyjnych WAL 10 o zakresie pomiarowym 10 mm. Pozostałych sześć kanałów wykorzystano do pomiaru odkształceń za pomocą tensometrów elektrooporowych. Trzy z nich umieszczono w jednej linii na dolnej powierzchni belki, dwa symetrycznie na bocznych powierzchniach w odległości 100 mm od górnej krawędzi belki oraz jeden na górnej powierzchni belki.

### 3.3. Fazy obciążenia

Przed przystąpieniem do badań obliczono i dobrano wartość siły sprężającej w ten sposób, aby spełniała normowe warunki odnośnie do fazy początkowej. Przyjęto wartość siły sprężającej wynoszącą 140 kN. Podczas sprężania uzyskano wartość siły sprężającej równą 142,5 kN, która wskutek poślizgu w zakotwieniu szczękowym spadła do 125,5 kN. Na podstawie metody dokładnej zamieszczonej w [1] oszacowano wartość siły niszczącej, z tą jednak różnicą, że naprężenia w ciągnie sprężającym przemnożono przez współczynnik redukcji przyczepności  $\Omega_U$  zaproponowany przez Naamana [4]. Obciążenie dobrano w ten sposób, aby w kolejnych fazach uzyskać odpowiednio 20, 40, 60, 80 i 100 procent obciążenia rysującego, a następnie 40, 60, 80 i 100 procent obciążenia niszczącego. W tabeli 2 zamieszczono opis poszczególnych etapów obciążenia wraz z wybranymi parametrami pomiarowymi.

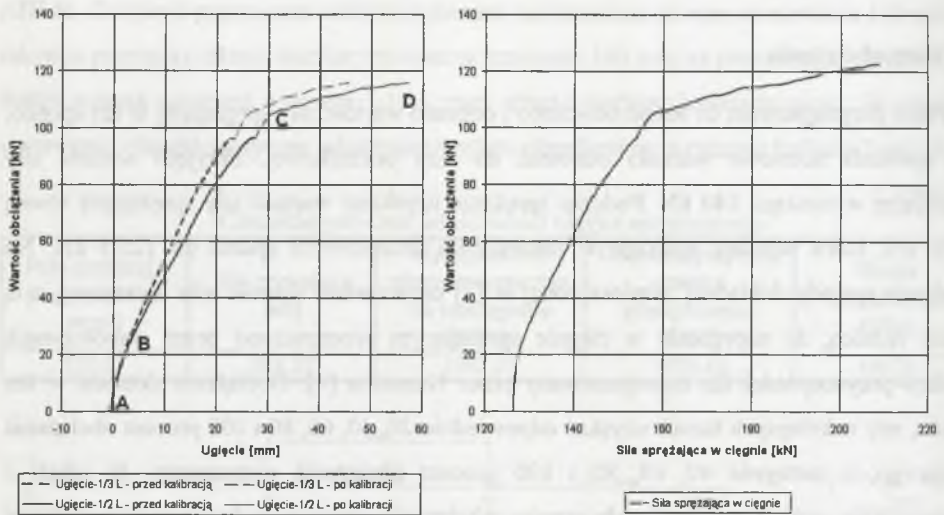
Tabela 2

Etapy obciążenia wraz z wybranymi parametrami pomiarowymi

	Teoretyczna siła rysująca					Teoretyczna siła niszcząca				
	0%	20%	40%	60%	80%	100%	40%	60%	80%	100%
Planowana wartość obciążenia [kN]	0	6,4	12,8	19,2	25,6	32	48,4	72,6	96,8	121
Zrealizowana wartość obciążenia [kN]	0	6,5	13	23,3	25,9	32,3	51	72,8	96,5	122,58
Wartość siły sprężającej w kablu [kN]	125,5	125,7	126	126,9	127,1	127,9	133,1	143	187,4	208,6
Przyrost naprężeń w kablu [MPa]	0	1,3	3,3	9,3	10,6	15,9	50,5	116,2	411,1	551,9
Ugięcie belki w 1/3 rozpiętości [mm]	-1,85	-1,06	0	0,78	1,18	2,06	6,7	14,2	45,77	-
Ugięcie belki w 1/2 rozpiętości [mm]	-2,13	-1,23	-0,45	0,91	1,36	2,38	7,9	16,72	57,3	-
Ugięcie belki w 2/3 rozpiętości [mm]	-1,7	-1,05	-0,38	0,5	1,2	2,05	5,82	14,4	-	-

Ze względu na wyczerpanie zakresu pomiarowego czujników ugięć i konieczność ich kalibracji przy obciążeniu poniżej 80 procent obciążenia niszczącego, zrezygnowano z realizacji przedostatniej fazy i postanowiono przejść do fazy zniszczenia bez odciążania elementu. Z powodu możliwości uszkodzenia aparatury pomiarowej postanowiono zdjąć czujniki indukcyjne przy obciążeniu wynoszącym około 95 procent przewidywanego obciążenia niszczącego (115,7 kN). Przy obciążeniu 122,5 kN nastąpiło zerwanie pojedynczego drutu w splocie, spowodowane jego uszkodzeniem w zakotwieniu.

Konsekwencją tego był spadek siły sprężającej w ciągu, wzrost ugięć i zmniejszenie wartości siły, z jaką prasa oddziaływała na belkę. Zredukowano wartość obciążenia działającego na trawers do 100 kN, a następnie zwiększano ją aż do zniszczenia elementu, które nastąpiło poprzez zmiżdżenie betonu w strefie ściskanej przy sile niszczącej wynoszącej 116 kN.

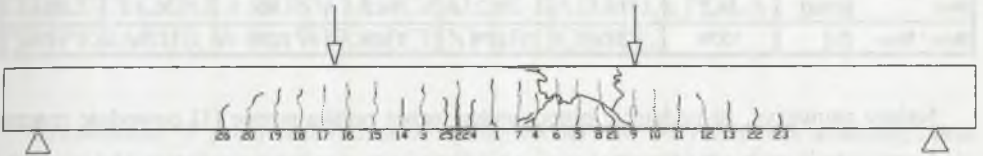


Rys. 2. Wykresy zależności obciążenie-ugięcie i obciążenie-siła sprężająca  
Fig. 2. Load-deflection and load-prestressing force relationship diagrams

Na rys. 2 przedstawiono wykresy, uzyskane w ostatnim etapie obciążenia (100% siły niszczącej), obrazujące zależności pomiędzy ugięciami i siłą sprężającą a przyłożonym obciążeniem. Na pierwszym z nich zaznaczono charakterystyczne punkty: A – punkt przedstawiający wygięcie belki od siły sprężającej po stratach doraźnych, B – punkt oznaczający powstanie pierwszych rys prostopadłych, C – punkt rozgraniczający zakres sprężysty od plastycznego oraz D – punkt przedstawiający nośność elementu ze względu na zginanie. W teorii, po osiągnięciu nośności na zginanie wykres opisujący zależność obciążenie-ugięcie powinien zacząć opadać ku dołowi, osiągając punkt E przedstawiający zniszczenie elementu. Wykorzystując wcześniej opisane punkty, można podzielić wykres na kilka części wyodrębniając następujące zakresy pracy belki: AB – liniowy, sprężysty, niezarysowany; BC – liniowy, sprężysty, zarysowany oraz CD – nieliniowy, niesprężysty, zarysowany. Porównując oba wykresy można, dostrzec, że największy przyrost siły sprężającej w ciągu (w tym wypadku ~60 % całkowitego przyrostu) ma miejsce w ostatnim z wyżej wymienionych zakresów.

### 3.4. Zarysowanie

Po każdym z etapów obciążenia badano zarysowanie elementu. Pierwsze zarysowanie pojawiło się przy sile większej niż zakładano, tzn. dopiero przy 40% teoretycznej siły niszczącej. Rysunek 3 i tabela 3 przedstawiają rozmieszczenie, kolejność pojawienia się oraz szerokość rys w poszczególnych etapach. Należy nadmienić, że pojawiające się rysy uległy zamknięciu przy odciążeniu (etapy 40% i 60% obciążenia niszczącego).



Rys. 3. Schemat zarysowania

Fig. 3. Crack pattern

Tabela 3

Szerokość i kolejność pojawiania się wybranych rys w poszczególnych etapach obciążenia

Oznaczenie rysy	26	19	14	3	25	2	24	1	7	4	6	5	8	21	9	10	13	23
Odległość od czola belki [cm]	76	97	147	156	165	170	174	185	194	200	209	217	226	231	240	248	278	299
Względna odległość $x/L$	0.21	0.27	0.41	0.43	0.46	0.47	0.48	0.51	0.54	0.56	0.58	0.60	0.63	0.64	0.67	0.69	0.77	0.83
Rozwarcie rysy [mm]	Etap I - 40% $P_{ult}$	-	-	-	0.1	-	0.1	-	0.1	-	0.2	-	0.1	-	-	-	-	-
	Etap II - 60% $P_{ult}$	-	0.1	0.2	0.2	-	0.1	-	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	-	0.2	0.2	0.1
	Etap III - 80% $P_{ult}$	0.1	0.3	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.2
	Etap IV - 100% $P_{ult}$	0.1	0.2	0.2	0.8	0.1	1.5	0.5	1.5	1.9	0.2	2.3	1.0	1.8	0.9	1.5	0.3	0.1



Rys. 4. Widok stanowiska badawczego i obraz belki w stanie zniszczenia

Fig. 4. The test stand view and the image of beam at failure

### 4. Porównanie wyników badania z wybranymi podejściami teoretycznymi

W tabeli 4 zestawiono wyniki obliczeń dokonanych w oparciu o normy [1,2,3] oraz wybrane analizy teoretyczne [4,5,6] proponowane przez różnych autorów. W przedostatniej kolumnie zamieszczono rezultat obliczeń przeprowadzonych z wykorzystaniem metody

dokładnej zmodyfikowanej poprzez wprowadzenie współczynnika redukcji odkształceń  $\Omega_U$ . Ostatnia kolumna zawiera wyniki badań.

Tabela 4

Porównanie wyników uzyskanych z obliczeń i badania

	PN-B-03264	ACI Code 318M-02	Harajli i Hijazi	Lee, Moon i Lim	Naaman i Alkhairi	Metoda dokładna + $\Omega_U$	Wyniki badania
$\Delta\sigma_{p,ULS} / \Delta f_{ps} / [\text{MPa}]$	100	170	553	414	620	495	552
$\sigma_{pmt} / f_{ps} / [\text{MPa}]$	935	1005	1388	1250	1455	1331	1385
$M_{Rd} [\text{kNm}]$	64,2	67,1	78,2	74,2	80	75,4	75,1
$M_{Rd1} / M_{Rd1} [\%]$	100%	105%	122%	116%	125%	117%	117%

Należy zauważyć, że podejście proponowane przez polską normę [1] powoduje znaczne niedoszacowanie przyrostu naprężeń w ciągnie bez przyczepności, a co za tym idzie nośności na zginanie. Podkreślenia wymaga fakt, że w przeprowadzonym badaniu belka osiągnęła stan graniczny nośności poprzez uszkodzenie ciągnia w zakotwieniu. Należy się spodziewać, że gdyby do tego nie doszło, to zarówno przyrost naprężeń w ciągnie, jak i nośność na zginanie osiągnęłyby wartości większe i bliższe rozpatrywanym teoriom. Ponieważ przeprowadzone obliczenia dały dobrą zbieżność z wynikami testu, uznano za celowe kontynuowanie badań nad wpływem parametrów na przyrost naprężeń w ciągnach bez przyczepności.

## LITERATURA

1. PN-B-03264:2002 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.
2. EN 1992-1-1:2004 Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1:General rules and rules for buildings.
3. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-05).
4. Naaman A. E.: Stress at Ultimate in Unbonded Post-Tensioning Tendons: Part 2 – Proposed Methodology, ACI Structural Journal, No. 6, 1991, p. 683-692.
5. Harajli M. H., Kanj M. Y.: Ultimate Flexural Strength of Concrete Members Prestressed with Unbonded Tendons. ACI Structural Journal, No. 6 1991, p. 663-673.
6. Lee L. H., Moon J. H., Lim J. H.: Proposed Methodology for Computing of Unbonded Tendon Stress at Flexural Failure. ACI Structural Journal, No. 6, 1999, p. 1040-1048.
7. Bui K. D., Niwa J.: Evaluation of Ultimate Stress in Beams Prestressed with External Tendons. Fédération Internationale du Béton Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Congress, Neapol-Włochy, czerwiec 2006, ID 3-23.