

Piotr SMARZEWSKI\*  
Politechnika Lubelska

## NUMERYCZNA ANALIZA NIESPRĘŻYSTEJ BELKI ŻELBETOWEJ

**Streszczenie.** W niniejszej pracy przedstawiono analizę wyężenia modelowej zginanej belki żelbetowej. W celu weryfikowania poprawności założonych modeli materiałów konstrukcyjnych: betonu i stali zbrojeniowej, porównano otrzymane wyniki obliczeń numerycznych z wynikami doświadczalnymi oraz z wynikami obliczeń analitycznych.

## NUMERICAL ANALYSIS OF INELASTIC REINFORCED CONCRETE BEAM

**Summary.** Numerical modelling of the reinforced concrete beam is discussed in this paper. The comparison of the author's own numerical results with experimental results and theoretical solutions was presented. The comparison of the obtained results indicates the correctness of the constitutive models of the concrete and reinforcement steel.

### 1. Wstęp

Analiza wyężenia elementów konstrukcyjnych jest ważnym zagadnieniem mechaniki konstrukcji, gdyż umożliwia ocenę bezpieczeństwa konstrukcji i optymalne projektowanie budowli inżynierskich.

W ostatnich latach dynamiczny rozwój nowoczesnych metod komputerowych umożliwił modelowanie zachowania złożonych niesprężystych żelbetowych układów konstrukcyjnych z uwzględnieniem zróżnicowanych właściwości materiałów

---

\* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Adam Stolarski, Wojskowa Akademia Techniczna

konstrukcyjnych: betonu i stali zbrojeniowej, rzeczywistego układu zbrojenia w obszarze konstrukcji i wzajemnej współpracy obu materiałów [2,5,7,8]. Obecnie symulacje komputerowe znacząco przyczyniają się do redukcji ogromnych kosztów związanych z przeprowadzeniem fizycznych badań konstrukcji.

## 2. Cel i przedmiot pracy

Przedmiotem pracy jest belka żelbetowa traktowana jako kompozycja materiałowa, składająca się z matrycy betonowej wzmocnionej rozłożonymi dyskretnie wiotkimi prętami stalowymi. Celem pracy jest modelowanie procesów statycznego odkształcania belek żelbetowych, z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych.

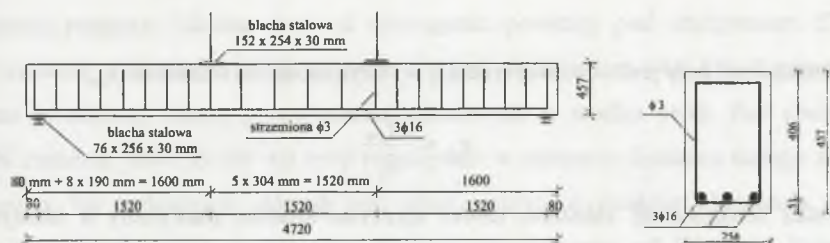
W odniesieniu do betonu zastosowano model sprężysto-plastyczny ze wzmocnieniem. Model żelbetu uwzględnia możliwość kruchego zniszczenia betonu podatnego na zarysowanie przy rozciąganiu i miażdżenie przy ściskaniu. Zniszczenie przy ściskaniu jest zgodne z teorią Willama-Warnke'a, uwzględniającą pięć parametrów materiałowych [9]. Zniszczenie przy rozciąganiu jest zgodne z kryterium maksymalnego naprężenia normalnego Rankina.

W odniesieniu do stali zbrojeniowej wykorzystano model materiału sprężysto-idealnie plastycznego.

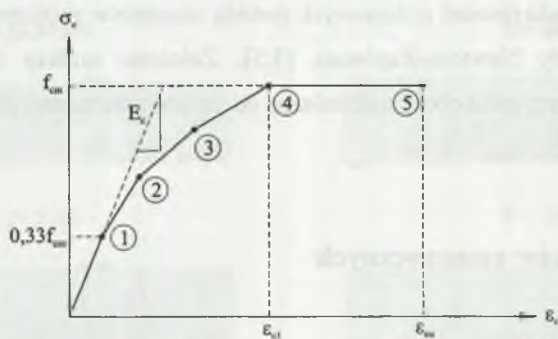
## 3. Modelowanie belki żelbetowej

W modelowaniu przestrzennym zastosowano wymiary elementu i właściwości materiałów odpowiadające belce C1 badanej przez Buckhouse'a [4]. Wymiary i przekrój poprzeczny belki C1 z układem zbrojenia i schematem obciążenia przedstawiono na rys. 1.

Modelowano  $\frac{1}{4}$  belki o długości 2360 mm, szerokości 127 mm i wysokości 457 mm w związku z poprzeczną i podłużną symetrią elementu.



Rys. 1. Wymiary i przekrój poprzeczny belki C1 z układem zbrojenia i schematem obciążenia [4]  
 Fig. 1. Dimensions and cross-section of C1 beam with reinforcement and loading arrangements



Rys. 2. Uproszczona zależność naprężenie – odkształcenie dla betonu w stanie jednoosiowego ściskania [6]

Fig. 2. Simplified uniaxial compressive stress – strain curve for concrete [6]

Dla betonu założono: współczynnik sprężystości  $E_c = 57000\sqrt{f_c}$  [1], wartość granicznej wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia  $f_c = 33,1\text{MPa}$  [4], graniczną wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia  $f_t = 7,5\sqrt{f_c}$  [1], współczynnik Poissona  $\nu = 0,2$  [2], wartość współczynnika nośności na ścinanie dla rys otwartych  $\beta_t$  zazwyczaj z przedziału  $0,05 \div 0,25$  [2,7], ostatecznie przyjęto równą  $0,3$ , wartość współczynnika nośności na ścinanie dla rys zamkniętych  $\beta_c = 1$ . Zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla betonu w jednoosiowym stanie naprężenia przedstawioną na rys. 2 opisano równaniem (1) wyprowadzonym przez Desayi-Krishnana [6]:

$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_c}{1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2} \quad (1)$$

gdzie:

$\varepsilon_{ct}$  - odkształcenie przy jednoosiowej średniej wytrzymałości na ściskanie  $f_{cm}$ :

$$\varepsilon_{ct} = \frac{2f_{cm}}{E_c} \quad (2)$$

Dla stali zbrojeniowej założono model sprężysto-idealnie plastyczny o identycznych charakterystykach przy rozciąganiu i ściskaniu, a dla płyt stalowych model liniowo-sprężysty. Ponadto, przyjęto moduł sprężystości  $E_s = 200$  GPa, granicę plastyczności  $f_y = 410$  MPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ .

Rozwiązanie układu równań nieliniowych metody elementów skończonych uzyskano przy zastosowaniu metody Newtona-Raphsona [3,5]. Założono analizę dużych odkształceń i zmienną wielkość przyrostu obciążenia zależną od zachowania betonu zbrojonego.

#### 4. Analiza wyników numerycznych

Przeprowadzono obliczenia analityczne i wyznaczono: naprężenie betonu, naprężenie stali zbrojeniowej i przemieszczenie pionowe w środku belki pod obciążeniem rysującym 23,58 kN i porównano je z otrzymanymi wynikami obliczeń numerycznych (tab. 1).

Tabela 1

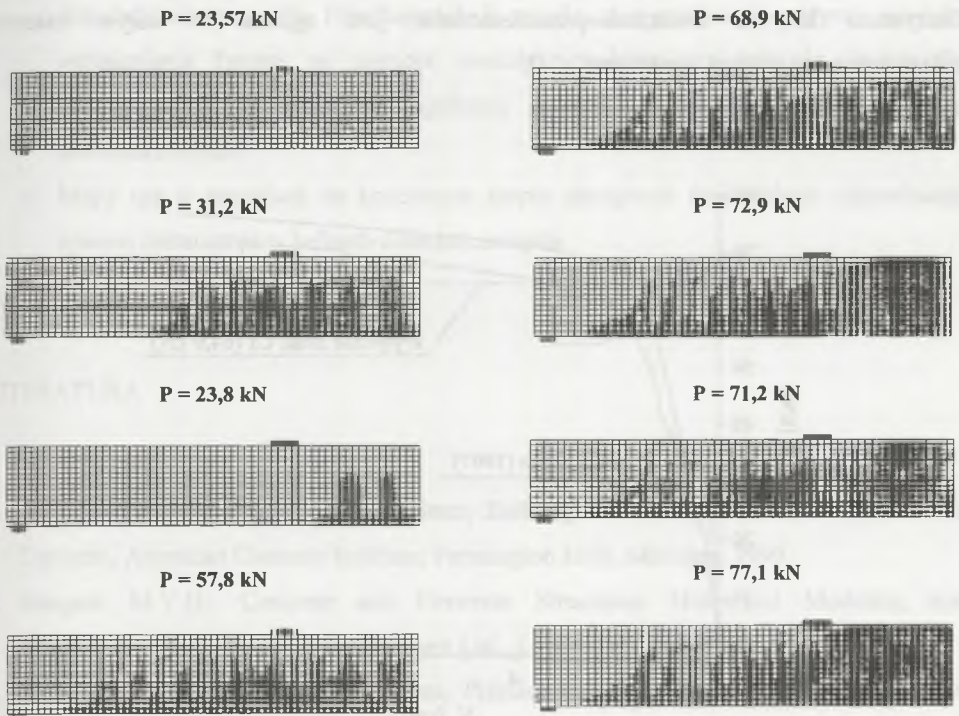
Porównanie wyników analitycznych z wynikami numerycznymi w chwili powstania pierwszej rysy

Model	Naprężenie betonu w strefie rozciąganej $\sigma_{ct}$ [MPa]	Naprężenie w stali zbrojeniowej $\sigma_s$ [MPa]	Przemieszczenie pionowe w środku belki $V_d$ [mm]	Siła rysująca $P_{cr}$ [kN]
Obliczenia analityczne	3,73	19,65	1,36	23,58
Obliczenia numeryczne	3,72	23,03	1,35	23,57

Buckhouse zaobserwował powstanie pierwszej rysy nieco wcześniej, bo pod obciążeniem 20 kN [2]. Obliczone obciążenie rysujące było wyższe od doświadczalnego o 18%. Prawdopodobnie jest to związane z homogenicznością modeli numerycznych nie uwzględniających mikrorys. Na rys. 3 przedstawiono otrzymane obrazy rys na niektórych etapach obciążenia. Pierwsze rysy od zginania powstały w obszarze działania stałego momentu. W miarę wzrostu obciążenia pionowe rysy od zginania rozciągały się poziomo



w kierunku podpory. Ukośne rysy od rozciągania powstały pod obciążeniem 57,8 kN. Uplastycznienie stali zbrojeniowej pojawiło się pod obciążeniem 64,8 kN. Zarejestrowano wówczas gwałtowny wzrost przemieszczeń pionowych w środku belki. Pod obciążeniem 68,9 kN znacznie powiększyły się rysy prostopadłe w obszarze działania stałego momentu zginającego. Na końcowych etapach pod płytą stalową w punkcie obciążenia zarówno w doświadczalnych, jak i modelowych belkach powstały rysy od ściskania. Zniszczenie zaobserwowano pod obciążeniem  $P = 77,1$  kN, co objawiło się nagłą utratą zbieżności rozwiązania numerycznego.



Rys. 3. Obrazy rys na niektórych etapach obciążenia  
 Fig. 3. Evolution of crack patterns

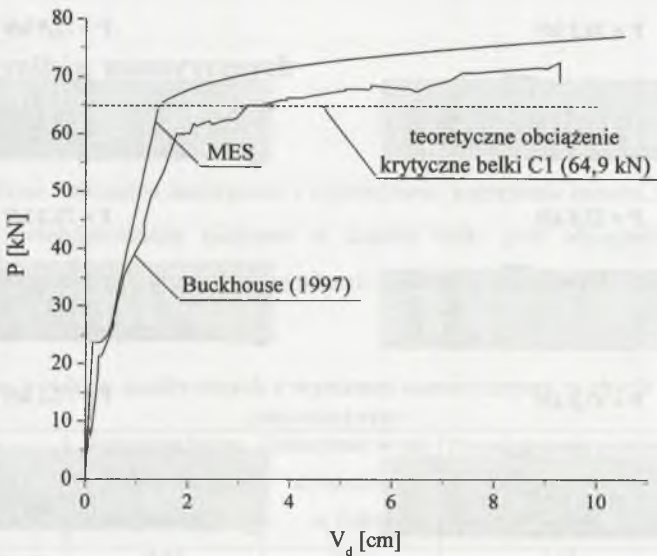
W tabeli 2 przedstawiono porównanie wyników doświadczalnych z wynikami numerycznymi pionowego przemieszczenia w środku belki pod obciążeniem niszczącym. Graniczne przemieszczenie pionowe w środku modelowej belki jest około 8% większe od przemieszczenia belki doświadczalnej. Obliczone graniczne obciążenie modelowej belki jest wyższe od granicznego obciążenia belki doświadczalnej o około 6%.

Tabela 2

Porównanie wyników doświadczalnych  
i numerycznych przemieszczeń  
pionowych w środku belki pod obciążeniem niszczącym

Belka	Obciążenie [kN]	Przemieszczenie pionowe w środku belki $V_d$ [mm]
C1 (Buckhouse, 1997)	72,6	92,7
Mes	77,1	100,5

Na rys. 4 przedstawiono zależność obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belki. Otrzymana krzywa obciążenie-przemieszczenie jest zgodna w całym zakresie z doświadczalną krzywą Buckhouse'a [4].



Rys. 4. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia  
Fig. 4. Load-deflection at midspan curve comparison of experimental and FEA

## 5. Wnioski końcowe

- Zachowanie numerycznego modelu belki opisane wykresem siła – przemieszczenie w środku rozpiętości jest zgodne z wykresem belki doświadczalnej C1. W obszarze naprężeń liniowych i nieliniowych belka charakteryzuje się nieznacznie większą sztywnością od belki doświadczalnej z powodu zaniedbania w modelu mikrorys i poślizgu w styku betonu i stali zbrojeniowej.
- Obciążenie graniczne uzyskane w obliczeniach numerycznych jest wyższe od doświadczalnego o 6%. Prawdopodobnie wynika to z pominięcia wpływu zjawiska wzmacniania betonu na nośność modelu i założenia niektórych właściwości materiałowych na podstawie ogólnych zaleceń, a nie na podstawie badań doświadczalnych.
- Mapy rys w modelach na końcowym etapie obciążenia dość dobrze odpowiadają opisom zniszczenia w belkach doświadczalnych.

## LITERATURA

1. ACI 318-99: American Concrete Institute, Building Code Requirements for Reinforced Concrete, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan 1999.
2. Bangash M.Y.H.: Concrete and Concrete Structures: Numerical Modeling and Applications. Elsevier Science Publishers Ltd., London, England 1989.
3. Bathe K.J.: Finite Element Procedures, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey 1996.
4. Buckhouse E.R.: External Flexural Reinforcement of Existing Reinforced Concrete Beams Using Bolted Steel Channels, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin 1997.
5. Crisfield M.A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons, 2000.
6. Desayi P., Krishnan S.: Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete, Journal of the American Concrete Institute, 61, March 1964, p. 345-350.

7. Hemmaty Y., DeRoock G., Vandewalle L.: Parametric Study of RC Corner Joints Subjected to Positive Bending Moment by Nonlinear FE Model. Proceedings of the ANSYS Conference, Vol. 2, Pittsburgh, Pennsylvania, June 1992.
8. Stolarski A., Cichorski W.: Modelowanie statycznego i dynamicznego zachowania niesprężystych tarcz żelbetowych. Wyd. PAN, Warszawa 2002.
9. Willam K.J., Warnke E.P.: Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete. Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, ISMES, Bergamo, Italy, 1975.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Michał Knauff