

Jacek SZULEJ*

Politechnika Lubelska

PROBLEMY WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA TŁUMIENIA METODĄ KOLOKACYJNĄ

Streszczenie. W artykule przedstawiono problemy związane z zastosowaniem metody kolokacyjnej. Wymieniona metoda służy do określania współczynnika tłumienia drgającej konstrukcji. Wartość współczynnika tłumienia drgań otrzymujemy na podstawie analizy widmowej przebiegów czasowych przyspieszeń badanych konstrukcji. Wykresy funkcji FFT są porównywane z odpowiednią funkcją aproksymującą. Wynikiem porównania jest między innymi współczynnik tłumienia, który jest jednym z parametrów funkcji aproksymującej. Celem pośrednim jest wyznaczenie poziomu tłumienia materiałowego dla prostych i zespolonych modeli materiałowych.

THE PROBLEMS OF DETERMINING DAMPING COEFFICIENT OF VIBRATION FOR COLLOCATION METHOD

Summary. The problem of practical application of the collocation method have been presented in the paper. This method is used to determine a damping coefficient for a vibrating structure. Its value is obtained by spectral analysis for time series of acceleration. The graphs of FFT functions are compared with suitable approximating functions. The effect of this comparison is the damping coefficient which is one of parameters of the approximating function. Additionally the level of structural damping for simple and complex models are found.

1. Wstęp

Projektując coraz bardziej smukłe konstrukcje (kładki, mosty, maszty), ważne jest prawidłowe rozpoznanie parametrów dynamicznych konstrukcji. Ważną cechą prawidłowo zaprojektowanej budowli jest odpowiedni poziom tłumienia, który może być opisany

* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Andrzej Flaga

bezwymiarowym parametrem tłumienia β . Metoda kolokacyjna, oparta na analizie widmowej przebiegów czasowych drgających układów, stosowana przy badaniach obiektów i modeli laboratoryjnych, pozwoli na dokładne określenie wartości współczynnika β . Dzięki znajomości poziomu tłumienia, już na etapie projektowania można dobierać odpowiednie materiały konstrukcyjne i wypełniające, które zapewnią prawidłową pracę konstrukcji.

W artykule, stosując metodę kolokacyjną i uwzględniając zasady obróbki przebiegów czasowych opisanych w pracach [1,2,3,4], określono dla czterech modeli (dwuteownika, dwuteownika z nakładką drewnianą, płaskownika, płaskownika z nakładką drewnianą) bezwymiarowe współczynniki tłumienia β (dodatkowo wartości tłumienia przedstawiono w postaci logarytmicznego dekrementu tłumienia δ i liczby tłumienia ξ).

Zależności pomiędzy β , δ , ξ przedstawiają poniższe wzory:

$$\xi = \delta / 2\pi \qquad \delta = \beta \cdot T \qquad (1)$$

gdzie: T – okres drgań.

W literaturze [5,6,7] podane są orientacyjne wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia dla wybranych elementów konstrukcyjnych, nie ma jednak kompletnych informacji o sposobie wymuszenia drgań, rodzaju badanych postaci drgań (np.: giętne, skrętne), sposobie określania parametrów tłumienia itd. Wymienione czynniki mogą prowadzić do dużych rozbieżności w otrzymanych wynikach.

Celem pracy jest określenie parametrów pomiarów, w odniesieniu do których można stosować metodę kolokacyjną i porównanie otrzymanych wyników z wartościami literaturowymi.

2. Opis metody

Metoda kolokacyjna, opisana między innymi w pracach [8,9], opiera się na analizie widmowej przebiegów czasowych drgań badanych konstrukcji i polega na doborze funkcji aproksymującej. Ponieważ jednym z parametrów tej funkcji jest współczynnik tłumienia, więc wyznaczenie funkcji oznacza obliczenie poziomu tłumienia (bezwymiarowego współczynnika tłumienia β).

Kolejność czynności przy określaniu tłumienia badanej konstrukcji jest następująca:

- Pomiar drgań własnych konstrukcji (stosując: czujniki drogi, akcelerometry), dzięki którym uzyskuje się przebiegi czasowe $f(t)$.
- Przeprowadzenie analizy spektralnej przebiegów czasowych $f(t)$ za pomocą FFT (szybkiej transformacji Fouriera), na podstawie której uzyskuje się funkcję:

$$F = FFT\{f(t)\} \quad (2)$$

(oraz częstości kołowe drgań własnych ω_i , odpowiadające lokalnym ekstremom FFT).

- Zakłada się, że drgania badanej konstrukcji są sumą tłumionych drgań harmonicznym o różnych częstotliwościach (tłumienie opisane jest zastępczym modelem wiskotycznym), tak jak w poniższych wzorach:

$$y(t) = \sum_i \{A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t)\}, \quad (\omega_i^*)^2 = (\omega_i)^2 - (\beta_i)^2 \quad (3)$$

gdzie: ω_i – i -ta częstość kołowa drgań nietłumionych, A_i , B_i – ich amplituda, β_i – parametr tłumienia, odpowiadający i -tej częstości kołowej.

- Aproksymacja przebiegów funkcji F^2 funkcją Y^2 , opisaną poniższą zależnością:

$$Y = FFT\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \{A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist} dt \quad (4)$$

- Wyznaczenie parametrów A_i , B_i , β_i (układ równań nieliniowych), przy założeniu że funkcja FFT jest zgodna z funkcją aproksymującą w trzech punktach charakterystycznych (ekstrema modułów FFT oraz punkty leżące na 0.707 wysokości tych ekstremów, które odpowiadają częstościom $\omega_1 = \omega_n(1 - \xi)$ i $\omega_2 = \omega_n(1 + \xi)$ przy założeniu małego tłumienia jest to analogia do metody „half-power bandwidth”). Wymieniona metoda została omówiona w pracy [7], gdzie: ω_n – i -ta częstość kołowa drgań własnych.

3. Opis badań i opis modeli

Badania drgań modeli wykonano przy użyciu sprzętu HBM: akcelerometrów B200, analizatora Spider i programu sterującego Catman 4.0. Badane modele zamocowano

wspornikowo i wymuszano drgania giętne i skrętne. Drgania wymuszano przez wygięcie i nagle zwolnienie końca modelu.

Wykonano cztery serie pomiarów:

- seria pierwsza (dwuteownik 120, długość 1.72m – rys.1) - akcelerometry zamocowano w połowie, trzech czwartych i na końcu modelu,
- seria druga (model zespolony, dwuteownik 120, bal sosnowy 80 cm×48 cm, długość 1.72 m – rys. 2)) - akcelerometry zamocowano w połowie, trzech czwartych i na końcu modelu,
- seria trzecia (płaskownik 80×8, długość 1.12 m, - rys. 3)) - akcelerometry zamocowano w jednej trzeciej, dwóch trzecich i na końcu modelu,
- seria czwarta (model zespolony, płaskownik 80×8, deska sosnowa 120 cm×25 cm, długość 1.12 m- rys. 4)) - akcelerometry zamocowano w jednej trzeciej, dwóch trzecich i na końcu modelu,



Rys. 1. Model nr 1
Fig. 1. Test piece no. 1



Rys. 2. Model nr 2
Fig. 2. Test piece no. 2



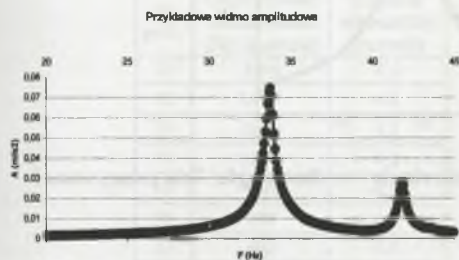
Rys. 3. Model nr 3
Fig. 3. Test piece no. 3



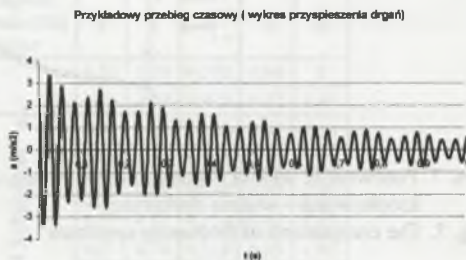
Rys. 4. Model nr 4
Fig. 4. Test piece no. 4

Wynikami pomiarów są przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 3200, 2400, 1600, 1200, 800, 600, 400, 300, 200, 100 Hz o szerokości pasma 150 Hz dla każdego z czterech modeli (rys. 5). Część wyników została odrzucona ze względu na nieprawidłowe wymuszenie drgań. Na podstawie przebiegów czasowych wykonano analizę widmową drgań programem Catman 4.0, w którym wykorzystano funkcję FFT: Auto Power

Spectrum–Amplitudowe (rys. 6). Częstości drgań własnych uzyskane z badań zweryfikowano przez obliczenia programem Algor (program MES), który potwierdził wyniki badań (tab.1).



Rys. 5. Przykładowe widmo amplitudowe
Fig. 5. The exemplary of frequency spectrum



Rys. 6. Przykładowy przebieg czasowy
Fig. 6. The exemplary of time course

Tabela 1

Porównanie uzyskanych częstotliwości

Model	f (Hz) (badania)	f (Hz) (Algor)	forma drgań
Dwuteownik	33,8	34,2	drżania skrętne
	41,8	41,7	drżania giętne
Dwuteownik + drewno	32,5	33,2	drżania skrętne
	43,3	42,2	drżania giętne
Płaskownik	4,2	4,3	drżania giętne
Płaskownik + drewno	5,9	5,5	drżania giętne

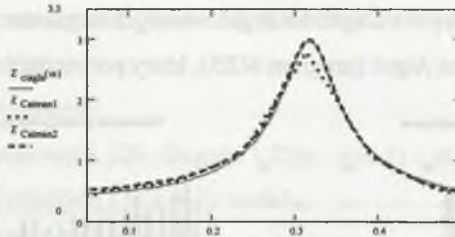
4. Obliczenia i problemy związane z zastosowaniem metody

4.1. Teoretyczne przebiegi drgań

Dopasowanie metody kolokacyjnej sprawdzono na teoretycznym przebiegu (zal. 5,6). Porównanie polegało na określeniu funkcji przejścia pomiędzy funkcją aproksymacyjną (widmo z funkcji ciągłej) i funkcjami dyskretnymi (widmami z przebiegów). Poniższy wykres (rys. 7) pokazuje, że zbyt duże kroki czasowe i zbyt krótki czas przebiegu (wykres kropkowany) prowadzi do błędnego dostosowania funkcji. Wykres przerywany, czyli widmo przebiegu dostatecznie długiego (wytłumionego), prowadzi do pozytywnych wyników.

$$y(t) = A_1 e^{-\beta t} (\sin((\sqrt{\omega_1 - \beta_1})t) + \cos((\sqrt{\omega_1 - \beta_1})t)) \quad (5)$$

$$\Delta t = 0.2s, A = 2, B = 2, \beta = 0.02, \omega = 2rad \quad (6)$$



Rys. 7. Porównanie widma ciągłego i dyskretnego (linia ciągła – widmo ciągłe, linia przerywana i kropkowana – widmo dyskretne)

Fig. 7. The comparison of frequency spectrum

4.2. Przebiegi drgań badanych modeli

Stosując metodę kolokacyjną, czyli dobierając funkcję aproksymującą widmo przebiegów czasowych (przyspieszeń lub przemieszczeń) określającą wartość współczynnika tłumienia, otrzymano poniższe wyniki (tabele 2,3,4,5).

Tabela 2

Wartości tłumienia dla dwuteownika (β , δ , ξ)

Nr prób.	Częstot. prób. (Hz) (badania)	Częstot. własna (Hz) (badania)	Częst. własna (Hz) Algor						Częstot. własna (Hz) (badania)	Częst. własna (Hz) Algor					
				β	δ	ξ	A	B			β	δ	ξ	A	B
11	3200	33.8	34.2 (Skrećanie)	0.37	0.07	0,011	0.62	1.1	-	41.7 (Zginanie)	-	-	-	-	-
12	2400	33.7		0.26	0.05	0,008	0.23	0.42	41.7		0.22	0.04	0,006	0.11	0.2
13	1600	33.8		0.3	0.06	0,010	0.16	0.29	41.8		0.19	0.03	0,005	0.07	0.12
14	1200	33.8		0.3	0.06	0,010	0.24	0.42	41.8		0.22	0.03	0,005	0.05	0.09
15	800	33.7		0.35	0.06	0,010	0.52	0.91	41.8		0.19	0.03	0,005	0.07	0.12
16	600	33.7		0.28	0.05	0,008	0.06	0.11	41.8		0.25	0.04	0,006	0.1	0.19
17	400	33.7		0.29	0.05	0,008	0.16	0.28	41.8		0.23	0.03	0,005	0.07	0.12
18	300	33.8		0.32	0.06	0,010	0.65	0.32	41.8		0.29	0.04	0,006	0.1	0.18
19	200	33.7		0.32	0.06	0,010	0.15	0.26	41.8		0.23	0.03	0,005	0.02	0.04

Tabela 3

Wartości tłumienia dla dwuteownika i nakładki drewnianej (β , δ , ξ)

Nr prób.	Częstot. prób. (Hz) (badania)	Częstot. własna (Hz) (badania)	Częst. własna (Hz) Algor						Częstot. własna (Hz) (badania)	Częst. własna (Hz) Algor					
				β	δ	ξ	A	B			β	δ	ξ	A	B
21	3200	32.4	33.2 (Skrećanie)	0.25	0.05	0,008	0.13	0.24	43.4	42.2 (Zginanie)	0.4	0.06	0,010	0.02	0.04
22	2400	32.5		0.33	0.06	0,010	0.03	0.05	43.3		0.39	0.06	0,010	0.01	0.01
23	1600	32.5		0.42	0.08	0,013	0.05	0	43.3		0.39	0.06	0,010	0.01	0.01
24	1200	32.5		0.18	0.03	0,005	0.02	0.04	-		-	-	-	-	-
25	800	32.5		0.18	0.03	0,005	0.01	0	-		-	-	-	-	-
26	600	-		-	-	-	-	-	43.3		-	-	-	-	-
27	400	-		-	-	-	-	-	43.3		0.3	0.04	0,006	0.01	0.02
28	300	32.5		0.21	0.04	0,006	0.06	0.11	43.4		0.35	0.05	0,008	0.22	0.39
29	200	32.5		0.25	0.05	0,008	0.02	0.03	43.3		0.54	0.08	0,013	0.01	0.01
30	100	32.5	0.25	0.05	0,008	0.01	0.01	43.3	-	-	-	-	-		

Tabela 4

Wartości tłumienia dla płaskownika (β , δ , ξ)

Nr prób.	Częstotliwość próbkowania (Hz) (badania)	Częstość własna (Hz) (badania)	Częstość własna (Hz) Algor	β	δ	ξ	A	B
51	3200	4.3	4.3 (Zginanie)	1.53	2.28	0,363	0.66	3
52	2400	4.1		1.76	2.69	0,428	0.22	1.03
53	1600	4.2		0.68	1.02	0,162	0.97	2.34
54	1200	4.2		0.71	1.06	0,169	0.89	2.18
55	800	4.2		0.63	0.93	0,148	0.87	2.03
56	600	4.2		0.55	0.82	0,131	0.82	1.82
57	400	4.2		0.5	0.74	0,118	0.85	1.95
58	300	4.2		0.04	0.06	0,010	0.09	0.15
59	200	4.2		0.03	0.05	0,008	0.06	0.01
60	100	4.2		0.02	0.04	0,006	0	0.01

Tabela 5

Wartości tłumienia dla płaskownika i nakładki drewnianej (β , δ , ξ)

Nr prób.	Częstotliwość próbkowania (Hz) (badania)	Częstość własna (Hz) (badania)	Częstość własna (Hz) Algor	β	δ	ξ	A	B
41	3200	5.9	5.5 (Zginanie)	0.2	0.2	0,032	0.09	0.17
42	2400	-		-	-	-	-	-
43	1600	5.9		0.12	0.12	0,019	0.08	0.14
44	1200	5.9		0.09	0.1	0,016	0.05	0.09
45	800	5.9		0.13	0.13	0,021	0.12	0.17
46	600	6		0.12	0.13	0,021	0.08	0.14
47	400	6		0.1	0.11	0,018	0.05	0.09
48	300	-		-	-	-	-	-
49	200	6		0.12	0.13	0,021	0.09	0.15
50	100	6		0.11	0.12	0,019	0.07	0.13

Poniżej dla porównania otrzymanych wyników z pracy [7] zestawiono wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia dla przykładowych konstrukcji (tab. 6).

Tabela 6

Wartości tłumienia (δ) dla przykładowych konstrukcji

Typ konstrukcji	Wartości δ	
	graniczne	zalecane do obliczeń
Konstrukcje stalowe		
belki i ramy	0.03 - 0.12	0.04
kratownice	0.06 - 0.25	0.10
konstrukcje cienkościenne	0.02 - 0.08	0.02
Konstrukcje drewniane		
belki zwykle drewniane klejone	0.04 - 0.21	0.10
belki złożone gwoździowane	0.09 - 0.21	0.15
stropy drewniane	0.12 - 0.23	0.15

5. Wnioski

Podsumowując otrzymane wyniki, można stwierdzić, że dzięki obliczaniu poziomu tłumienia metodą kolokacyjną otrzymuje się prawidłowe wyniki, ale pod warunkiem że zostaną dobrane prawidłowo parametry pomiarów.

W metodzie tej ważne są: odpowiednia funkcja przejścia pomiędzy widmem ciągłym i dyskretnym, sposób wymuszenia badanej konstrukcji, odpowiednia długość przebiegów oraz prawidłowa częstotliwość próbkowania. Prawidłowo przyjęte parametry prowadzą do otrzymania dokładnego widma częstotliwościowego, które pozwala na dokładne odczytanie wartości tłumienia.

Metoda kolokacyjna, poza drganiami giętnymi, pozwala również na określenie współczynników tłumienia dla innych rodzajów drgań.

Prowadzone będą dalsze badania na modelach i istniejących konstrukcjach, bazując na metodzie kolokacyjnej i metodzie wykorzystującej transmitancję mechaniczną. Wyniki pozwolą na dokładne określenie parametrów stosowalności każdej z metod.

LITERATURA

1. Ewins D. J.: *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Pr, 1984.
2. Lyons R.: *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. WKŁ, Warszawa 1999
3. Notes R.: *Analiza numeryczna szeregów czasowych*. WNT, Warszawa 1978.
4. Zieliński T.: *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. AGH, Kraków 2002.
5. Dyląg Z. i inni: *Wytrzymałość materiałów, tom 2*, WNT, Warszawa 1997.
6. Rakowski G.: *Mechanika budowli-ujęcie komputerowe, tom 2*, Arkady, Warszawa 1992.
7. Bachmann H.: *Vibration prob. in structures*". Bulletin D'Information, No. 209, Wien 1991.
8. Flaga A., Michałowski T.: *Charakterystyki tłumienia drgań lekkich kładek wiszących i podwieszonych*. *Inżynieria i Budownictwo nr 9*, 2000, s. 495-497.
9. Mancuso M.: *Collocation methods with controllable dissipation for linear dynamics*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 2001, p. 3607-3621.