

Robert TOCZKIEWICZ\*  
Politechnika Wrocławska

## SYMULACJA LOSOWA WYTEŻENIA DŹWIGARA MOSTOWEGO O PODATNYM ZESPOLENIU

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono analizę skutków zespolenia podatnego w mostowych dźwigarach zespolonych o łącznikach podatnych. W analizie losowej problemu wykorzystano metodę symulacji cyfrowej Monte Carlo. Na podstawie przykładowych analiz numerycznych pokazano wpływ zmienności wybranych parametrów losowych na siły wewnętrzne, przemieszczenia oraz wyteżenie dźwigara podatnie zespolonego.

## PROBABILITY SIMULATION OF EFFORT OF A BRIDGE COMPOSITE GIRDER WITH FLEXIBLE CONNECTION

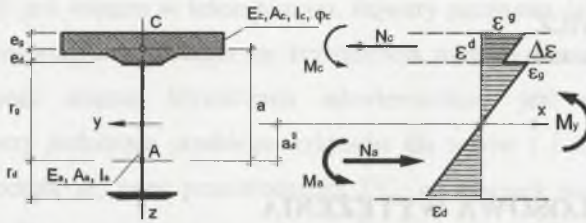
**Summary.** The paper concerns the effects of the partial interaction in steel-concrete composite bridge girders with flexible shear studs. In the probability analysis of the problem the Monte Carlo numerical method is used. The numerical simulations given in example show the influence of changes of random variables on the distribution of internal forces, displacements and effort of a girder with flexible connection.

### 1. Wprowadzenie

Przedstawiana w artykule analiza dotyczy mostowego dźwigara zespolonego, utworzonego z belki stalowej współpracującej z żelbetową płytą pomostową dzięki użyciu elementów łączących, przenoszących siły powstające w styku obu materiałów. Stosowane obecnie powszechnie łączniki sworzniowe określa się jako podatne. Ich znaczna odkształcalność skutkuje powstaniem poślizgu w styku, a tym samym brakiem pełnej współpracy obu części składowych dźwigara zespolonego. Konsekwencją podatności zespolenia jest m.in. redystrybucja sił wewnętrznych pomiędzy elementami przekroju i redukcją sztywności giętej takiej konstrukcji [1, 2, 3].

\* Opiekun naukowy: Dr hab. inż. Czesław Machelski

## 2. Rozwiązanie analityczne



Rys. 1. Geometria, siły wewnętrzne i odkształcenia w przekroju zespolonym [2, 4]

Fig. 1. Geometry, internal forces and strains in a composite cross-section [2, 4]

W modelu analitycznym zginania dźwigara o podatnym zespoleniu geometrię przekroju oraz moment zginający rozdzielono na dwa podukłady (belkę i płytę), jak na rys. 1. Materiał płyty został sprowadzony do materiału belki poprzez zastosowanie współczynnika

$$n_{\varphi} = \frac{E_a}{E_c} (1 + \rho \varphi_c), \quad (1)$$

gdzie  $E_a$  i  $E_c$  są modułami sprężystości podłużnej stali i betonu,  $\varphi_c$  współczynnikiem pełzania betonu, a  $\rho$  współczynnikiem Trosta. W przypadku obciążeń doraźnych (krótkotrwałych) wartość współczynnika (1) jest stała i zależy jedynie od  $E_a$  oraz  $E_c$ . Po uwzględnieniu warunku odkształceń w styku betonu płyty i belki, wykorzystaniu równania zgodności krzywizn dźwigara zginanego oraz warunków równowagi sił wewnętrznych w obu częściach przekroju wyprowadzono równanie [2, 3, 4]

$$\frac{d^2 N_a}{dx^2} - \frac{1}{C_z} \frac{dN_a}{dx} - \frac{dC_z}{dx} - \frac{C_z}{E_a} \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_c \varphi} + \frac{a^2}{I_a + I_{c\varphi}} \right) N_a + \frac{C_z}{E_a} \left( \frac{a}{I_a + I_{c\varphi}} \right) M_y = 0. \quad (2)$$

Stanowi ono podstawę rozwiązania zagadnienia zginania dźwigara zespolonego z łącznikami podatnymi, o zmiennej sztywności połączenia na długości belki. W równaniu (2) przyjęto klasyczny parametr określający sztywność połączenia jako stosunek siły w styku  $t(x)$  rozłożonej na długości połączenia do wywołanego nią poślizgu  $\delta(x)$

$$C_z(x) = \frac{t(x)}{\delta(x)}. \quad (3)$$

Analizę zagadnienia przeprowadzono w zakresie liniowo-sprężystym, przyjmując, że wartość  $C_z(x)$  jest niezależna od wyężenia połączenia, co jest założeniem bliskim rzeczywistości w zakresie obciążeń użytkowych. W analizach posłużono się również wskaźnikami określającymi stopień zespolenia [2, 4] definiowanymi na podstawie odkształceń w styku

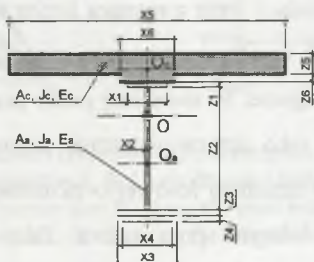
$$\beta(x) = \frac{\Delta \varepsilon(x)}{\varepsilon_g(x)}, \quad (4)$$

jak na rys. 1 oraz na podstawie sił wewnętrznych w dźwigarze stalowym

$$\mu(x) = \frac{a \cdot N_a(x)}{M_a(x)}. \quad (5)$$

### 3. Parametry symulacji losowej

W symulacji losowej, w której konieczna jest wielokrotna generacja wartości parametrów geometrycznych według przyjętych rozkładów zmiennych losowych, korzystne jest zastosowanie metody numerycznej Monte Carlo [5]. Jako wielkości losowe w prowadzonej analizie określono wymiary dźwigara podane na rys. 2 oraz własności fizyczne materiałów ( $E_a$ ,  $E_c$ ). Przyjęto [6, 7], że cechy te mają rozkłady normalne, o wartościach oczekiwanych  $m$  i współczynnikach zmienności  $\nu$  zestawionych w tablicach 1 i 2.



Rys. 2. Oznaczenia zmiennych losowych - wymiarów

Fig. 2. Notations of random variables - geometrical dimensions

Tablica 1

Charakterystyki zmiennych losowych belki stalowej

Belka stalowa	$X1$	$Z1$	$X2$	$Z2$	$X3$	$Z3$	$X4$	$Z4$	$E_a$
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[GPa]
$m$	400	20	12	1600	600	30	500	30	204
$\nu$ [%]	1,0	3,0	3,0	0,5	1,0	3,0	1,0	3,0	1,5

Tablica 2

Charakterystyki zmiennych losowych płyty pomostowej

Płyta żelbetowa	$X5$	$Z5$	$X6$	$Z6$	$E_c$
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[GPa]
$m$	280	21	50	5	32,6
$\nu$ [%]	1,0	4,0	4,0	1,0	15,0



W wyniku wielokrotnej generacji (5000 losowań) wymiarów geometrycznych z przyjętych rozkładów otrzymano charakterystyki geometryczne części składowych dźwigara zespolonego wykorzystane w dalszej analizie numerycznej (tabl. 3).

Tablica 3

Charakterystyki zmiennych losowych (charakterystyk geometrycznych dźwigara)

Charakterystyka	$A_a$	$I_a$	$A_c$	$I_c$	$a$
	[m <sup>2</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]	[m <sup>2</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]	[m]
wartość średnia $m$	0,06022	0,02483	0,6135	0,00259	1,317
współczynnik zmienności $\nu$ [%]	1,6	2,1	3,9	11,0	0,8

Parametrem losowym jest również sztywność zespolenia dźwigara  $C_z(x)$ . Wpływa na nią wiele zmiennych losowych, do których zaliczyć można między innymi: sposób ukształtowania łączników (ich smukłość), wytrzymałość betonu płyty pomostowej, udział sił przyczepności i tarcia, dokładność wykonania połączenia, stopień degradacji połączenia [1, 2]. Sztywność zespolenia zmienia się nieznacznie ze wzrostem wyężenia łączników (w zakresie oddziaływań użytkowych), a w przypadku typowych dla konstrukcji mostowych obciążeń powtarzalnych ulega redukcji wraz z rosnącą liczbą cykli obciążenia [3]. Na skutek powyższych czynników otrzymuje się różne sztywności zespolenia  $C_z(x)$ , nawet w jednakowo ukształtowanym na długości dźwigarze. W niniejszej pracy przedstawiono symulacje losowe dla różnych, lecz traktowanych jako deterministyczne, sztywności zespolenia. Możliwość zdefiniowania parametru  $C_z$  jako zmiennej losowej o określonych charakterystykach i typie rozkładu będzie przedmiotem dalszych prac autora. Jako wartość zdeterminowaną w analizach przyjęto również obciążenie dźwigara.

#### 4. Analiza numeryczna

Analiza dotyczy jednoprzęsłowego drogowego mostu zespolonego o rozpiętości teoretycznej  $L = 28,0$  m. Obciążenie zmienne mostu wywołuje w rozpatrywanym dźwigarze moment zginający  $M(x=L/2) = 3,25$  MNm. Dźwigar jest przyzmatyczny, o charakterystykach geometrycznych przekroju zestawionych w tablicach 1 i 2. Obliczenia numeryczne wykonano przy wykorzystaniu autorskiej aplikacji numerycznej, napisanej w środowisku MATLAB, a analizę statystyczną przeprowadzono przy użyciu programu STATISTICA.

#### 4.1. Rozkłady cech losowych na długości dźwigara

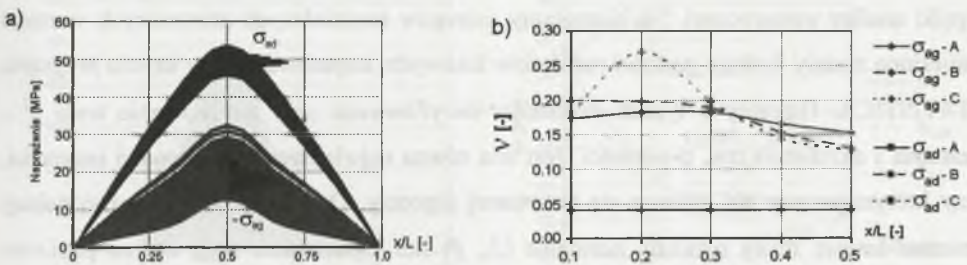
W zadaniu rozpatrzono trzy sposoby ukształtowania zespolenia, czyli rozkładu łączników na długości dźwigara. Przyjęto przykładowe (odpowiadające zespoleniu częściowemu wynikającemu z charakterystyk stosowanych łączników podatnych) wartości liczbowe:

A) stała sztywność:  $C_z(x) = 2000 \text{ MN/m}^2$ ,

B) liniowo zmienna sztywność opisana funkcją  $C_z(x) = 2000 \cdot (1 - x/L) \text{ MN/m}^2$  w przedziale  $0 \leq x \leq L/2$  oraz  $C_z(x) = 2000 \cdot (x/L) \text{ MN/m}^2$  w przedziale  $L/2 < x \leq L$ ,

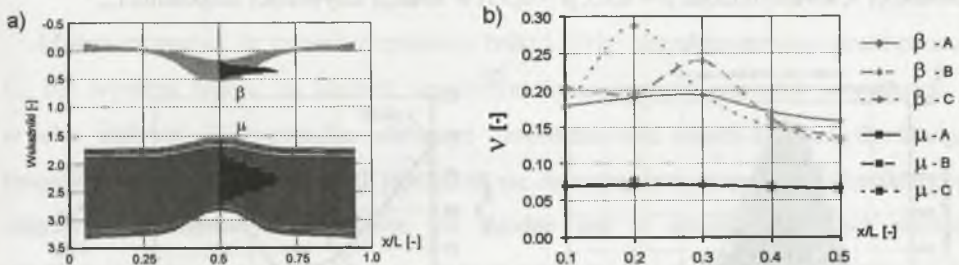
C) skokowo zmienna sztywność:  $C_z(x) = 2000 \text{ MN/m}^2$  w przedziałach  $0 \leq x < L/4$  i  $3L/4 < x \leq L$ ,  
 $C_z(x) = 1000 \text{ MN/m}^2$  w przedziale  $L/4 \leq x \leq 3L/4$ .

Analizowane są naprężenia oraz wskaźniki zespolenia ( $\beta$ ,  $\mu$ ) na długości dźwigara. Wybrane wyniki przedstawiono na wykresach (rys. 3, rys. 4).



Rys. 3a) Rozkłady naprężeń normalnych (zespolenie B) na długości belki stalowej; b) Współczynniki zmienności naprężeń (zespolenie A, B, C) na długości belki

Fig. 3a) Values of normal stresses (connection B) along the steel beam; b) Coefficients of variations of normal stresses (connection A, B, C) along the beam



Rys. 4a) Rozkłady wskaźników zespolenia (zespolenie B) na długości dźwigara; b) Współczynniki zmienności wskaźników zespolenia (zespolenie A, B, C) na długości dźwigara

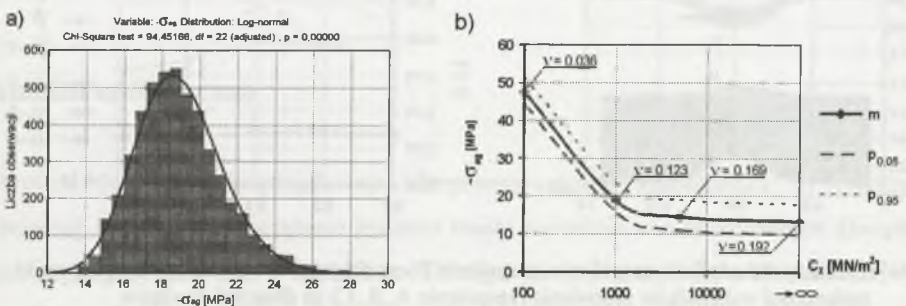
Fig. 4a) Values of coefficients of connection (connection B) along the girder; b) Coefficients of variations of connection coefficients (connection A, B, C) along the girder

Widoczny jest wyraźny wpływ sposobu ukształtowania połączenia na wartości współczynników zmienności oraz ich przebieg na długości belki w przypadku naprężeń

normalnych na krawędzi górnej belki stalowej oraz wartości wskaźnika  $\beta$ . Również dla tych wielkości otrzymano największe wartości współczynników zmienności sięgające ponad 25 % w przypadku  $\sigma_{ag}$ . Współczynniki zmienności ugięć  $w$  oraz momentu bezwładności dźwigara  $J_x$  nie zależały w sposób wyraźny od ukształtowania zespolenia i mieściły się w zakresie  $\nu = 4-6\%$ , nie zmieniając się znacząco na długości belki.

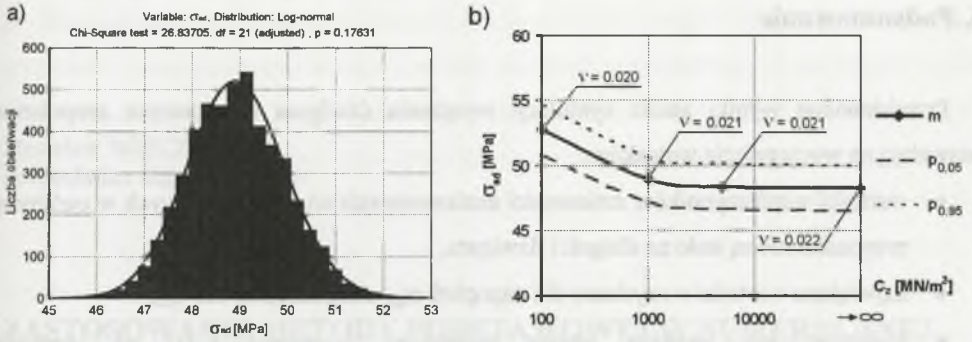
#### 4.2. Rozkłady cech losowych w przekroju dźwigara

Niżej rozpatrzono przykład, w którym przyjęto rozkład sztywności zespolenia stały na długości dźwigara ( $C_z(x) = \text{const}$ ), rozpatrując cztery jego wartości:  $C_{z1} = 100 \text{ MN/m}^2$ ,  $C_{z2} = 1000 \text{ MN/m}^2$ ,  $C_{z3} = 5000 \text{ MN/m}^2$  oraz  $C_{z4} \rightarrow \infty$  (zespolenie idealne). Analizowano wartość współczynników zmienności  $\nu$  naprężeń w belce stalowej, wskaźników zespolenia i ugięć, w funkcji  $C_z$ , w wybranym przekroju  $x$  dźwigara. Na rysunkach 5 – 7 przedstawiono wybrane wyniki analizy numerycznej. Na histogramy szeregów rozdzielczych otrzymanych wartości naniesione zostały funkcje gęstości rozkładów losowych, dopasowane przy użyciu programu STATISTICA. Hipotezy o typach rozkładów weryfikowano przy zastosowaniu testu  $\chi^2$  – Pearsona i określeniu tzw. p-wartości. Jest ona równa największemu poziomowi istotności, przy którym jeszcze nie odrzuca się testowanej hipotezy. Otrzymane w wyniku symulacji zmienne losowe miały rozkłady normalne ( $J_x$ ,  $\beta$ ) lub lognormalne ( $\sigma_{ad}$ ,  $w$ ), na poziomie istotności zazwyczaj niższym niż  $\alpha = 0,05$ . W pozostałych przypadkach hipotezy o tych typach rozkładów w teście  $\chi^2$  były odrzucane. Na wykresach przedstawiono także zmiany wyestymowanych charakterystyk zmiennych losowych (średniej  $m$ , współczynnika zmienności  $\nu$ , kwantyle rządu  $p = 0,05$ ,  $p = 0,95$ ) w funkcji sztywności zespolenia  $C_z$ .

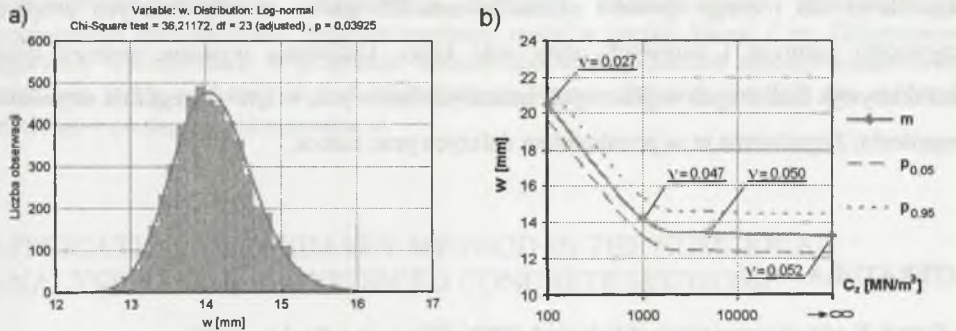


Rys. 5. Naprężenia normalne  $\sigma_{ag}$  w belce stalowej, przekrój  $x = L/2$ : a) Histogram szeregu rozdzielczego (zespolenie  $C_{z2}$ ); b) Wartości średnie, kwantyle i współczynniki zmienności  
 Fig. 5. Normal stresses  $\sigma_{ag}$  in the steel beam, section  $x=L/2$ : a) Histogram (connection  $C_{z2}$ ); b) Mean values, quantiles and coefficients of variation





Rys. 6. Naprężenia normalne  $\sigma_{ad}$  w belce stalowej, przekrój  $x=L/2$ : a) Histogram szeregu rozdzielczego (zespolenie  $C_{z2}$ ); b) Wartości średnie, kwantyle i współczynniki zmienności  
 Fig. 6. Normal stresses  $\sigma_{ad}$  in the steel beam, section  $x=L/2$ : a) Histogram (connection  $C_{z2}$ ); b) Mean values, quantiles and coefficients of variation



Rys. 7. Ugięcia dźwigara  $w$ , przekrój  $x=L/2$ : a) Histogram szeregu rozdzielczego (zespolenie  $C_{z2}$ ); b) Wartości średnie, kwantyle i współczynniki zmienności  
 Fig. 7. Deflection of the girder  $w$ , section  $x=L/2$ : a) Histogram (connection  $C_{z2}$ ); b) Mean values, quantiles and coefficients of variation

Można zauważyć, że stopień współpracy belki i płyty, charakteryzowany przez parametr  $C_z$ , ma wyraźny wpływ na wartość współczynnika zmienności naprężeń normalnych  $\sigma_{ag}$  w belce stalowej. W przypadku słabszego zespolenia obu części składowych dźwigara losowość cech płyty pomostowej przekłada się w mniejszym stopniu na charakterystyki statystyczne otrzymanych wyników, co zgodne jest z intuicją. Stąd też niewielki współczynnik zmienności naprężeń  $\sigma_{ag}$  przy niewielkim  $C_z$  i duży przy zespoleniu bliskim idealnemu. Słabiej tendencja ta jest widoczna w przypadku ugięć  $w$ , a praktycznie niezauważalna dla naprężeń na krawędzi dolnej belki stalowej  $\sigma_{ad}$ . Można stwierdzić, że naprężenia na krawędzi górnej belki stalowej oraz związany z nimi wskaźnik zespolenia  $\beta$  wykazują największą wrażliwość na zmiany stopnia współpracy części składowych przekroju zespolonego.

## 5. Podsumowanie

Przedstawione wyniki analiz symulacji wyęźnienia dźwigara o podatnym zespoleniu pozwalają na wyciągnięcie wniosków:

- wartości współczynników zmienności analizowanych wielkości losowych w ogólnym przypadku nie są stałe na długości dźwigara,
- największe wartości  $v$  uzyskano dla naprężeń  $\sigma_{ag}$ , a najmniejsze dla  $\sigma_{ad}$ ,
- widoczny jest wyraźny wpływ podatności zespolenia  $C_z(x)$  na wartości współczynników zmienności w przypadku niektórych wielkości wynikowych.

Otrzymane wyniki odnoszą się do dźwigara mostowego o wybranych wymiarach geometrycznych. Zasadne wydaje się przeprowadzenie szerszej analizy parametrycznej zagadnienia dla różnego sposobu ukształtowania dźwigarów, a więc różnych proporcji sztywności giętych i osiowych płyty oraz belki. Uściślenia wymaga również dobór charakterystyk liczbowych wejściowych zmiennych losowych, w tym szczególnie sztywności zespolenia. Zagadnienia te są przedmiotem dalszych prac autora.

## LITERATURA

1. Furtak K.: Mosty zespolone, Wydanie I, PWN, Warszawa-Kraków 1999.
2. Machelski Cz., Toczkiwicz R.: Podatność połączenia stalowego dźwigara z płytą betonową w mostach zespolonych. Drogi i Mosty, nr 3/2005, s. 37-76.
3. Machelski Cz., Toczkiwicz R.: Effects of connection flexibility in steel-concrete composite beams due to live loads. Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. VI, No. 1/2006.
4. Toczkiwicz R.: Modele analityczne i numeryczne dźwigara podatnie zespolonego. VI Konferencja Naukowa Doktorantów Wydziałów Budownictwa, Gliwice - Wisła 17-18.11.2005, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, z. 104, Gliwice 2005, s. 371-378.
5. Rubinstein R.: Simulation and the Monte Carlo Method. J. Wiley, New York 1981.
6. Biegus A.: Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych. PWN, Wrocław 1999.
7. Mirza S. A., Hatzinikolas M., MacGregor J. G.: Statistical descriptions of strength of concrete. Journal of the Structural Division, ASCE, 1979, vol. 105 (ST5), p. 921-937.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Kazimierz Furtak