

Piotr WIELGOS\*  
Politechnika Lubelska

## TRANSMITANCJA MECHANICZNA UKŁADÓW PRĘTOWYCH Z DOŁĄCZONYMI STROJONYMI TŁUMIKAMI MASOWYMI

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono metodę wyznaczania transmitancji mechanicznej dla ustrojów złożonych (konstrukcja główna z dołączonymi tłumikami). Przedstawiono także kryteria (funkcje celu) przy optymalizacji parametrów tłumików oraz wyniki symulacji numerycznych komina z zainstalowanymi wielokrotnymi tłumikami masowymi.

## MECHANICAL TRANSMITATION FOR ROD STRUCTURE WITH MULTIPLE TUNED MASS DUMPERS

**Summary.** The method of mechanical transmission determining for complex structures has been presented in this paper. Criteria (aim goal) of optimization parameters for mass dampers and numerical simulations for chimney with multiple mass dampers have been performed.

### 1. Wstęp

W ostatnich latach wielokrotne strojone tłumiki masowe znajdują coraz szersze zastosowanie w konstrukcjach budowlanych, wypierając rozwiązania oparte na tłumikach pojedynczych. W związku z tym, istotne staje się poszukiwanie optymalnych parametrów takiego typu tłumików. Z praktyki inżynierskiej wiadomo, że obliczone częstotliwości drgań ustrojów budowlanych różnią się nieznacznie od rzeczywiście pomierzonych częstotliwości na zrealizowanych obiektach, poza tym w wyniku starzenia konstrukcji, np. pod wpływem korozji, następuje także zmiana częstotliwości drgań własnych obiektu (rozstrojenie konstrukcji). Dlatego też stosowanie wielokrotnych tłumików masowych nastrojonych na częstotliwości bliskie częstotliwości rezonansowej może przynieść lepsze efekty niż pojedynczy tłumik nastrojony dokładnie na częstotliwość rezonansową.

\* Opiekun naukowy: Prof. dr hab. inż. Andrzej Flaga

W niniejszej pracy zostały przedstawione wyniki symulacji numerycznych konstrukcji prętowych z pojedynczymi (*TMD*) oraz wielokrotnymi (*MTMD*) masowymi tłumikami drgań. Celem pracy jest przedstawienie metody wyznaczania transmitancji mechanicznej [1,2] oraz zastosowanie transmitancji do oceny skuteczności działania wielokrotnych tłumików masowych. Podjęta została także próba doboru funkcji celu przy optymalizacji parametrów tłumików.

## 2. Metoda wyznaczania transmitancji mechanicznej ustrojów złożonych z różnych elementów konstrukcyjnych

### 2.1. Wyznaczanie macierzy transmitancji układu dyskretnego [1,2]

Podstawowe macierzowe równanie ruchu :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{p}, \quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  - odpowiednio diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności;  $\mathbf{y}$  - wektor przemieszczeń;  $\mathbf{p}$  - wektor obciążeń.

Rozwiązanie macierzowego równania ruchu można przedstawić w postaci [1]:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(\tau)\mathbf{p}(t-\tau)d\tau, \quad (2)$$

gdzie:  $\mathbf{y}(\tau)$  - wektor odpowiedzi impulsowych;  $\mathbf{p}$  - wektor obciążeń  $\mathbf{p} = [0, 0 \dots 0, \delta_k(\tau), 0 \dots 0]^T$ ;  $\delta_k(\tau)$  - delta Diraca.

Transmitancja mechaniczna jest macierzą  $\mathbf{H}(f)$ , której element  $H_{ik}(f)$  jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej  $h_{ik}(\tau)$ :

$$H_{ik}(f) = \int_0^{\infty} h_{ik}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \quad (3)$$

gdzie odpowiedź impulsowa  $h_{ik}(\tau)$  jest  $i$ -tą odpowiedzią układu na  $k$ -te wymuszenie w postaci jednostkowej funkcji impulsowej przyłożonej w chwili początkowej  $\tau=0$ .

Po wykonaniu transformacji Fouriera na równaniu ruchu (1) otrzymamy:

$$(\mathbf{K} - 4\pi^2 f^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{C})\mathbf{H}_k = \mathbf{1}_k, \quad (4)$$

gdzie  $H_{ik} = [H_{1k}, \dots, H_{ik}, \dots, H_{nk}]^T$ .

W ogólności,  $H_{ik}$  jest wielkością zespoloną i może być przedstawiona w postaci:

$$|H_{ik}| = \sqrt{(\operatorname{Re} H_{ik})^2 + (\operatorname{Im} H_{ik})^2}, \quad (5)$$

$$H_{ik} = |H_{ik}|e^{j\Theta_{ik}} = \operatorname{Re} H_{ik} + j \operatorname{Im} H_{ik}, \quad \arg H_{ik} = \Theta_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} H_{ik}}{\operatorname{Im} H_{ik}} \quad (6)$$

gdzie:  $|H_{ik}|$ ,  $\Theta_{ik}$  - odpowiednio moduł transmitancji, argument transmitancji.

Jeżeli przyjmiemy oznaczenie:

$$\mathbf{G}(f) = \mathbf{K} - 4\pi^2 f^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{C} = \text{Re } \mathbf{G} + j \text{Im } \mathbf{G}, \quad (7)$$

uzyskamy równanie:

$$\text{Re } \mathbf{G} \text{Re } \mathbf{H}_k - \text{Im } \mathbf{G} \text{Im } \mathbf{H}_k + j[\text{Im } \mathbf{G} \text{Re } \mathbf{H}_k + \text{Re } \mathbf{G} \text{Im } \mathbf{H}_k] = \mathbf{1}_k, \quad (8)$$

a po rozbiciu na dwa równania:

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathbf{G} \text{Re } \mathbf{H}_k - \text{Im } \mathbf{G} \text{Im } \mathbf{H}_k &= \mathbf{1}_k \\ \text{Im } \mathbf{G} \text{Re } \mathbf{H}_k + \text{Re } \mathbf{G} \text{Im } \mathbf{H}_k &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

Realizując wymuszenia jednostkowymi impulsami kolejno we wszystkich wejściach  $k$  uzyskujemy pełną macierz transmitancji  $\mathbf{H}(f)$ :

$$\begin{aligned} \text{Re } \mathbf{H}_k &= \{\text{Re } \mathbf{G} + \text{Im } \mathbf{G} [\text{Re } \mathbf{G}]^{-1} \text{Im } \mathbf{G}\}^{-1} \mathbf{1}_k \\ \text{Im } \mathbf{H}_k &= [\text{Re } \mathbf{G}]^{-1} \text{Im } \mathbf{G} \text{Re } \mathbf{H}_k \end{aligned} \quad (10)$$

## 2.2. Wykorzystanie transmitancji mechanicznej do wyznaczania odpowiedzi układu na różne typy wymuszeń

Po dokonaniu transformacji Fouriera na równaniu (2) otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{H}(f)\mathbf{P}(f) = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{y}(t)], \quad (11)$$

gdzie:  $\mathbf{Y}(f)$ ,  $\mathbf{P}(f)$  są transformatami Fouriera odpowiedzi konstrukcji oraz przyłożonego obciążenia, a  $\mathbf{H}(f)$  to transmitancja mechaniczna (wzmocnienie układu [m/N]).

Znając macierz transmitancji  $\mathbf{H}(f)$  oraz transformatę  $\mathbf{P}(f)$ , w prosty sposób możemy określić odpowiedź układu poprzez wyznaczenie odwrotnej transformaty Fouriera [2]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}^{-1} [\mathbf{Y}(f)] = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}(f) \mathbf{P}(f). \quad (12)$$

## 3. Równania ruchu złożonych układów dyskretnych

Macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  występujące w równaniu (1) mogą być przedstawione jako sumy macierzy dwóch podstruktur – konstrukcji głównej i tłumików. Równanie przyjmie teraz postać:

$$(\mathbf{M}_k + \mathbf{M}_t) \ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t) \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_t) \mathbf{y} = \mathbf{p}, \quad (13)$$

gdzie:  $\mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{K}_k$  – diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności dla konstrukcji głównej;  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$ ,  $\mathbf{K}_t$  – diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności dla dodatkowo zainstalowanych *MTMD*.

Jeżeli  $m$  oznacza liczbę dynamicznych stopni swobody układu podstawowego,  $n$  - liczbę dołączonych tłumików, macierze  $\mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{C}_k$ ,  $\mathbf{K}_k$ ,  $\mathbf{M}_t$ ,  $\mathbf{C}_t$ ,  $\mathbf{K}_t$  przyjmą następującą postać:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_{k,m,m} = \sum_i \mathbf{A}'_i k_{k,i} \mathbf{A}^e_i{}^T, \quad \mathbf{C}_{k,m,m} = \sum_i \mathbf{A}^e_i c_{k,i} \mathbf{A}^e_i{}^T, \quad (15)$$

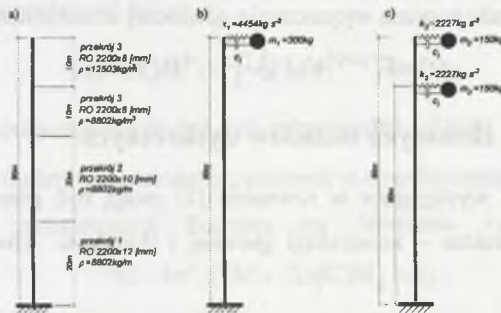
$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{M}_{t,n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_t = \sum_i \mathbf{A}'_i k_{t,i} \mathbf{A}'_i{}^T, \quad \mathbf{C}_t = \sum_i \mathbf{A}'_i c_{t,i} \mathbf{A}'_i{}^T, \quad (16)$$

gdzie:  $k_{k,i}$  - element macierzy sztywności elementu konstrukcji związany z  $i$ -tym stopniem swobody;  $c_{k,i}$  - element macierzy tłumienia elementu konstrukcji związany z  $i$ -tym stopniem swobody;  $k_{t,i}$  - sztywność  $i$ -tego tłumika;  $c_{t,i}$  - tłumienie  $i$ -tego tłumika;  $\mathbf{A}^e_i$ ,  $\mathbf{A}'_i$  - wektor połączeń (alokacji) elementów konstrukcji (tłumików).

#### 4. Symulacja numeryczna

W rozważaniach przyjęto komin stalowy o wysokości 60 m, którego schemat przedstawiono na rys. 1a, Współczynniki  $\delta_k = 0.063$ ,  $\xi_k = 0.01$  przyjęto na podstawie literatury [3,4,5]. Częstości drgań własnych komina wyznaczono za pomocą programu ABAQUS v. 6.4 ([6]). Model MES składał się z 25 elementów belkowych typu B21. Przyjęto do rozważań dwa przypadki rozmieszczenia tłumików:

- pojedynczy tłumik o masie  $m_1 = 300$  kg umieszczony na wysokości 60 m (rys. 1b);
- dwa tłumiki o masach  $m_2 = m_3 = 150$  kg umieszczone na wysokości 50 m i 60 m (rys. 1c).

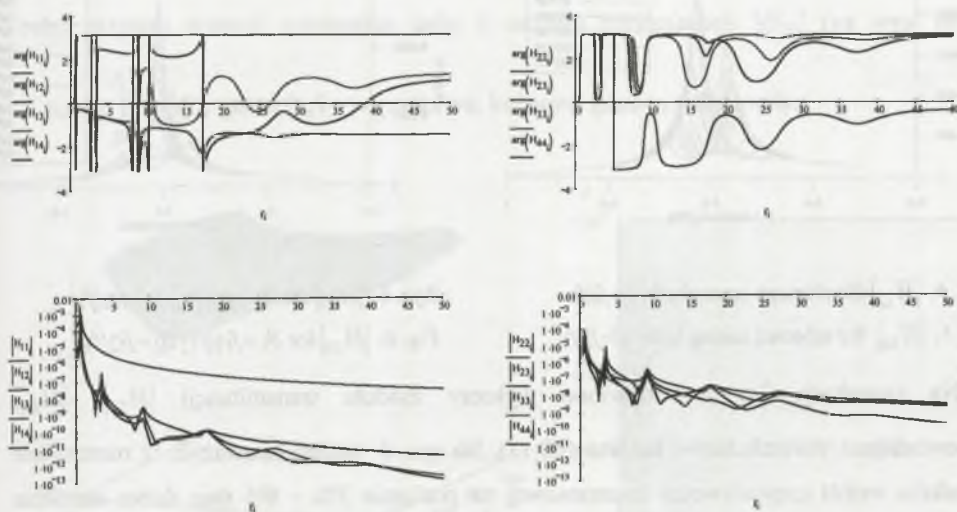


Rys. 1. Schemat geometryczny komina: a) bez tłumików; b) pojedynczy tłumik na wys. 60 m; c) z dwoma tłumikami na wysokościach 50 m i 60 m

Fig. 1. Chimney's geometry: a) without dampers; b) single damper at 60 m; c) two dampers at 50 m, 60 m

Macierz  $\mathbf{C}_t$  została zbudowana w sposób bezpośredni,  $\mathbf{C}_k$  - w sposób pośredni, z wykorzystaniem modelu tłumienia Rayleigha. Wyznaczono transmitancje konstrukcji głównej

z zainstalowanymi tłumikami (pojedynczym na wysokości 60 m oraz dwoma tłumikami na wysokości 50 m, 60 m).

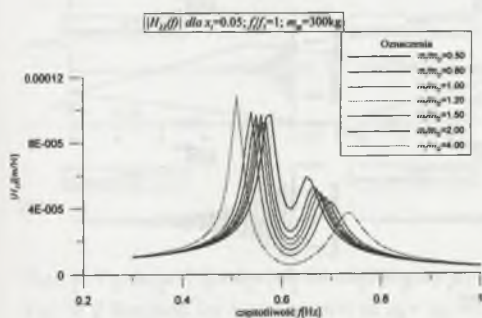


Rys. 2. Argumenty i moduły transmitancji układu ( $f_i = f_p = 0.6162$  Hz, tłumienie  $\xi_i = 0.05$ )

Fig. 2. Arguments and modulus of transmission for structure ( $f_i = f_p = 0.6162$  Hz, damping  $\xi_i = 0.05$ )

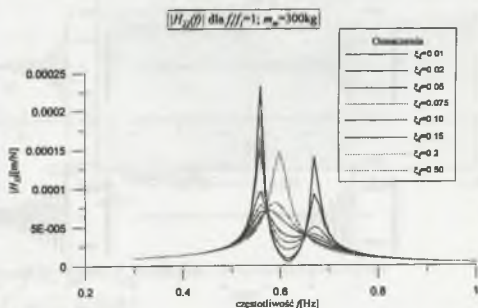
Przeprowadzono także strojenie konstrukcji poprzez zmianę następujących parametrów tłumików: stosunku mas  $\mu = \frac{m_i}{m_p}$  ( $m_i$  - masa tłumika,  $m_p$  - masa porównawcza); nastrojenia

tłumika  $\delta = \frac{f_i}{f_p}$  ( $f_i$  - częstotliwość drgań tłumika(tłumików),  $f_p$  - częstotliwość drgań własnych konstrukcji) oraz tłumienia własnego tłumika (tłumików)  $\xi_i$ .



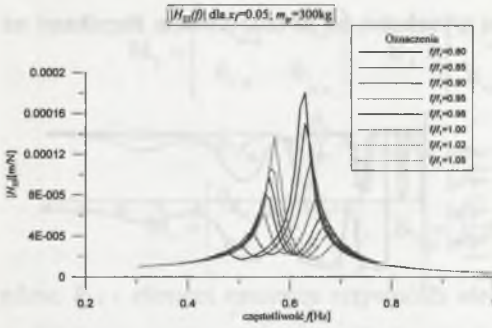
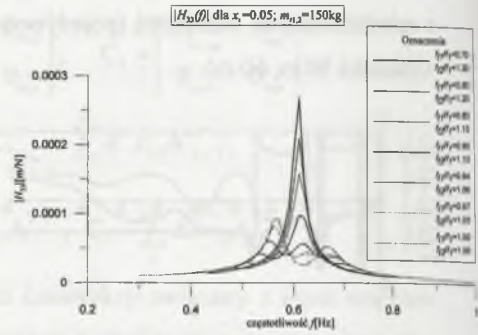
Rys. 3.  $|H_{22}|$  dla różnego stosunku mas  $\mu$

Fig. 3.  $|H_{22}|$  for selected mass ratio  $\mu$



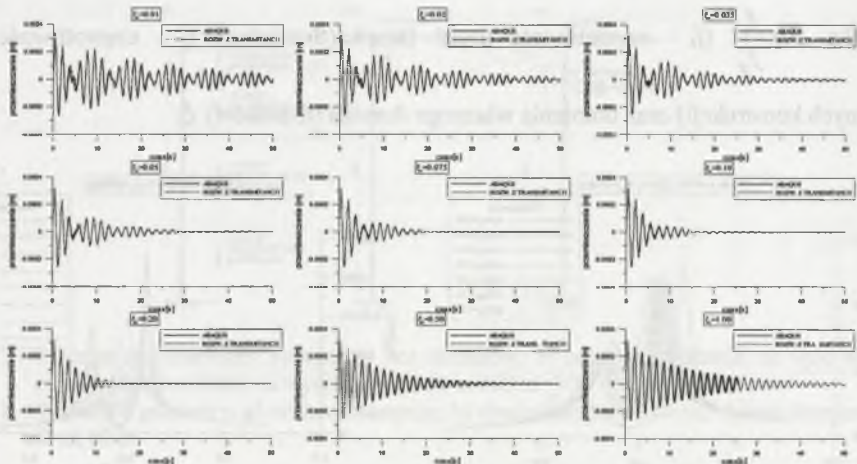
Rys. 4.  $|H_{22}|$  dla różnego tłumienia  $\xi_i$

Fig. 4.  $|H_{22}|$  for selected damping  $\xi_i$

Rys. 5.  $|H_{22}|$  dla różnego nastrojenia  $\delta = f_1/f_1$ Fig. 5.  $|H_{22}|$  for selected tuning level  $\delta = f_1/f_1$ Rys. 6.  $|H_{33}|$  dla  $\delta_1 = f_1/f_1$ ;  $\delta_2 = f_2/f_1$ Fig. 6.  $|H_{33}|$  for  $\delta_1 = f_1/f_1$ ;  $\delta_2 = f_2/f_1$ 

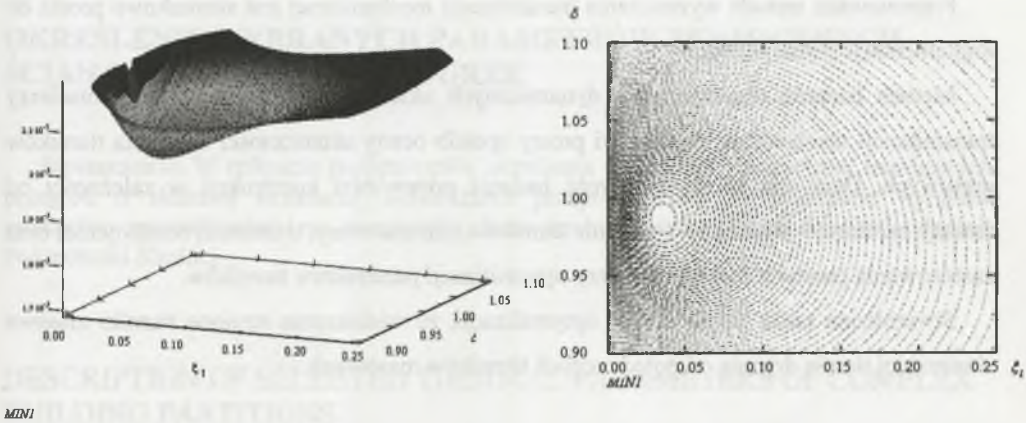
Na rysunkach 3-6 przedstawiono wykresy modułu transmitancji  $|H_{22}|$ ,  $|H_{33}|$ , odpowiadające wierzchołkowi komina (60 m). Na rys. 6. można zauważyć, iż rozstrojenie tłumików wokół częstotliwości rezonansowej na poziomie 3% – 6% daje dobre tłumienie całej konstrukcji w szerszym zakresie częstotliwości niż w przypadku pojedynczego tłumika.

W przypadku obciążenia impulsowego 1kN przyłożonego na wysokości 60 m wyznaczono transformaty Fouriera obciążenia oraz odpowiedzi budowli  $y(t)$  na wysokości 60 m. Otrzymane wykresy przemieszczeń wierzchołka komina nałożono na przebiegi czasowe przemieszczeń otrzymane w wyniku bezpośredniego całkowania równań ruchu (ABAQUS).

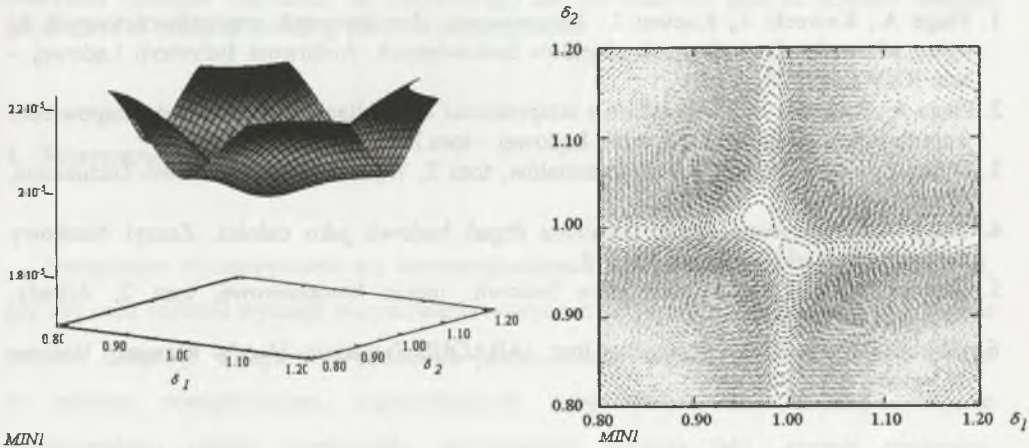
Rys. 7. Przebiegi czasowe przemieszczeń przy różnych wartościach  $\xi_t$  dla pojedynczego tłumika wyznaczonych z transmitancji oraz z obliczeń ABAQUSFig. 7. Time series of displacements for different values of coefficient  $\xi_t$  in the case of single damper obtained with transmittation and ABAQUS

W odniesieniu do zainstalowanego pojedynczego tłumika przeprowadzono optymalizację parametrów  $\xi_i$  oraz  $\delta$  przy ustalonym trzecim parametrze  $\mu$  (rys.8). Jako kryterium (funkcję celu) przyjęto wartość minimalną całki z modułu transmitancji  $|H_{22}|$  (na wys. 60 m)

$$Z = \min \int_{f_p}^{f_k} |H_{22}| df, \text{ gdzie } f_p, f_k - \text{ początkowa, końcowa granica całkowania.}$$



Rys. 8. Funkcja  $Z$  dla pojedynczego tłumika przy  $\mu = 0.2$   
Fig. 8.  $Z$  function for single damper at  $\mu = 0.2$



Rys. 9. Funkcja  $Z$  dla dwóch tłumików przy  $\mu_0 = \mu_2 = 0.2$ ;  $\xi_{i1} = \xi_{i2} = 0.04$   
Fig. 9.  $Z$  function for two dampers at  $\mu_0 = \mu_2 = 0.2$ ;  $\xi_{i1} = \xi_{i2} = 0.04$

Na rys. 9. przedstawiono wyniki obliczeń funkcji  $Z$  dla zainstalowanych dwóch tłumików. Optymalizację parametrów  $\delta_1$  i  $\delta_2$  wykonano przy ustalonych parametrach  $\xi_i$  oraz  $\mu$ .

Optymalne nastrojenie tłumików otrzymano dla dwóch punktów  $\delta_1=0.97$ ;  $\delta_2=1.01$  przy  $Z=1.989 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{Hz}/\text{N}$  oraz  $\delta_1=1.01$ ;  $\delta_2=0.97$  przy  $Z=1.989 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{Hz}/\text{N}$ .

## 5. Wnioski

Proponowana metoda wyznaczania transmitancji mechanicznej jest stosunkowo prosta do implementacji numerycznej.

Metoda badania charakterystyk dynamicznych układów przy wykorzystaniu macierzy transmitancji mechanicznych stanowi prosty sposób oceny skuteczności działania tłumików masowych. Daje ona także możliwość badania odpowiedzi konstrukcji w zależności od zmiany parametrów tłumików (strojenie tłumików, zmiana masy, tłumienia, rozstrojenie) oraz zastosowania prostych funkcji celu przy optymalizacji parametrów tłumików.

Stwierdzono także na podstawie optymalizacji, że wielokrotne strojone tłumiki masowe skuteczniej tłumią drgania od pojedynczych tłumików masowych.

## LITERATURA

1. Flaga A., Kawecki J., Kucwaj J.: Zastosowanie charakterystyk częstotliwościowych do opisu własności dynamicznych obiektów budowlanych. *Archiwum Inżynierii Lądowej* – tom XXV z. 4 1979.
2. Flaga A., Kawecki J.: Twierdzenie o wzajemności transmitancji i wzajemności odpowiedzi impulsowych. *Archiwum Inżynierii Lądowej* – tom XXV z.1, 1979.
3. Dyląg Z. i inni: *Wytrzymałość materiałów*, tom 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
4. Flaga A.: Praktyczne ujęcie tłumienia drgań budowli jako całości. *Zeszyt Naukowy Politechniki Krakowskiej*, nr 6, 1979.
5. Rakowski G. i inni.: *Mechanika budowli: ujęcie komputerowe*, tom 2, Arkady, Warszawa 1992.
6. Hibbitt, Karsson & Sorensen, Inc.: *ABAQUS/Explicit User's Manual, Volume II, Version 6.3* (2002).

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Romuald Świdka