ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2007
Seria: BUDOWNICTWO z. 111 Nr kol. 1756

Paweł FEDCZUK
Katedra Geotechniki i Geodezji
Politechnika Opolska

SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY MODEL NIENAWODNIONEGO OŚRODKA GRUNTOWEGO

Streszczenie. W pracy prezentuje się koncepcję modelu częściowo nawodnionego ośrodka gruntowego, uwzględniającego zjawisko ssania. Sprężysto-plastyczne zachowanie ośrodka, zdefiniowane w ramach teorii stanu krytycznego [1, 2] w formie rozwiniętej, opisuje rozszerzone przyrostowe równanie konstytutywne [3] (w postaci „naprężenie netto – odkształcenie i ssanie"). Model operuje równaniem powierzchni plastyczności sformułowanym przez Whelera i Shivakumara [4]. Prawo wzmocnienia (ograniczone do wariantu dla niezmiennej wartości ssania) wiąże przyrost plastycznej części wskaźnika porowatości z poziomem naprężenia i ssania.

ELASTO-PLASTIC MODEL OF UNSATURATED SOIL MEDIUM

Summary. The paper presents the concept of soil medium model with partially saturation, taking into consideration the suction effect. Elasto-plastic behavior of medium, defined by critical state theory [1, 2] in extension form, has been described by extended incremental constitutive relation [3] (in form "net stress – strain and suction" relationship). The model operates equation of plastic surface formulated by Wheeler and Shivakumar [4]. Hardening rule (restricted to variant for constant value of suction) connects the increment of plastic part of void ratio with stress and suction levels.

1. Wprowadzenie

Podjęte w ostatnich kilkunastu latach badania nad gruntami nienawodnionymi pozwoliły na matematyczny opis ich zachowania i zaowocowały propozycjami sprężysto-plastycznych modeli takich ośrodków [5, 6, 4, 7]. Modele tego typu uwzględniają wpływ trzech faz w medium gruntowym na stan naprężenia, operując naprężeniem netto, stanowiącym różnicę pomiędzy naprężeniem efektywnym a ssaniem (zdefiniowanym jako różnica pomiędzy ciśnieniem porowym wody i gazu zawartego w porach). W zakresie teoretycznym bazują one na rozwinięciu teorii stanu krytycznego [1, 2], gdzie do trzech czynników definiujących

powierzchnię stanu (efektywnych wielkości naprężenia ścinającego i średniego oraz wskaźnika porowatości lub objętości właściwej) dołączone jest ssanie.

W niniejszym opracowaniu prezentuje się koncepcję takiego modelu, stanowiącego rozwinięcie (dla gruntów częściowo nawodnionych) klasycznej propozycji Modified Cam-Clay [1]. Operuje on równaniem powierzchni plastyczności sformułowanym przez Wheelera i Shivakumara [4]. Uzupełnia je prawo wzmocnienia, wiążące przyrost plastycznej części porowatości z poziomem naprężenia i ssania, ograniczone do wariantu dla niezmiennej wartości ssania. Tak modelowane zachowanie szkieletu gruntowego opisuje rozszerzone przyrostowe prawo konstytutywne sprężysto-plastyczności [3].

2. Podstawy teoretyczne

2.1. Naprężenie netto i ssanie

Zgodnie z [8, 3] w dowolnym punkcie materialnym nienawodnionego izotropowego ośrodka gruntowego składową σ'_{ij} wektora naprężenia efektywnego $\boldsymbol{\sigma}'$ definiuje zależność

$$\sigma'_{ij} = (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\, u_a) + \delta_{ij}\, \chi\, (u_a - u_w) = \sigma^n_{ij} + \delta_{ij}\, \chi\, s \quad (i, j = 1,2,3) \tag{1}$$

w której: σ_{ij} – składowa wektora naprężenia całkowitego $\boldsymbol{\sigma}$, u_a, u_w – ciśnienia gazu i wody zawartych w porach gruntu, χ – parametr zależny od poziomu nawodnienia gruntu (stopnia wilgotności), δ_{ij} – delta Kroneckera. Różnica ujęta w pierwszą parę nawiasów to składowa wektora naprężenia netto $\boldsymbol{\sigma}^n$, natomiast w drugą – to ssanie s. Odpowiedniki netto standardowych niezmienniczych wielkości efektywnych – naprężenia średniego p' i ścinającego q' – specyfikują wzory

$$p^n = \frac{\sigma^n{}_{11} + 2\sigma^n{}_{33}}{3} = \frac{\sigma_{11} + 2\sigma_{33}}{3} - u_a \qquad q^n = \sigma^n{}_{11} - \sigma^n{}_{33} = \sigma_{11} - \sigma_{33} = q' \tag{2}$$

2.2. Przyrostowe równanie konstytutywne sprężysto-plastyczności

U podstaw sformułowania zależności konstytutywnej dla ośrodka gruntowego częściowo nawodnionego leży zestaw następujących założeń. Ośrodek gruntowy traktowany jest jako izotropowy. Pory gruntu są częściowo wypełnione wodą i gazem (występującym w postaci pęcherzyków w wodzie). Ssanie, będące efektem nienawodnienia gruntu, stanowi zmienną niezależną. Zachowanie sprężyste szkieletu gruntu częściowo nawodnionego definiuje rozszerzone prawo sprężystości [8, 3], natomiast plastyczne – precyzuje teoria stanu

krytycznego [1, 2] w formie rozwiniętej, uwzględniająca wpływ ssania na stan naprężenia. Sprężysto-plastyczny model takiego ośrodka gruntowego wymaga zdefiniowania: równania powierzchni plastyczności i prawa wzmocnienia. Dla tak sformułowanych założeń – stan naprężenia i odkształcenia w dowolnym punkcie materialnym szkieletu gruntowego wiąże komplet 6 podstawowych zależności: prawa addytywności odkształceń, konstytutywne sprężystości oraz płynięcia plastycznego, warunek zgodności, równanie powierzchni plastyczności i prawo wzmocnienia

$$
\begin{gathered}
d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \qquad d\boldsymbol{\sigma}^n = \mathbf{D}\,(d\boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{m}_H\, ds) \\
d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}^n} \right\} = d\lambda\, \mathbf{a}_F \qquad dF = \mathbf{a}_F^T\, d\boldsymbol{\sigma}^n + \frac{\partial F}{\partial s}\, ds + \frac{\partial F}{\partial \kappa}\, d\kappa = 0 \\
F(p^n, q', s, \kappa) = 0 \qquad \kappa = \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}^p, s)
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Wielkości $d\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ oznaczają wektory przyrostów części sprężystej i plastycznej przyrostu odkształcenia $d\boldsymbol{\varepsilon}$, $d\boldsymbol{\sigma}^n$ – wektor przyrostu naprężenia netto, $\mathbf{D}$ – macierz konstytutywną sprężystości gruntu (w warunkach drenażu), $\mathbf{m}_H$ – wektor uwzględniający efekt nienawodnienia gruntu, ds – przyrost ssania, $d\lambda$ – skalarowy mnożnik, $\mathbf{a}_F = \{\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}^n\}$ – gradient funkcji plastyczności F (określonej dla wartości naprężenia średniego netto p^n i intensywności naprężenia q', oraz ssania s i skalarowego parametru wzmocnienia κ), $\partial F/\partial s$, $\partial F/\partial \kappa$ – pochodne funkcji plastyczności F po ssaniu s i parametrze wzmocnienia κ.

Standardowe postępowanie opisane w [3], zrealizowane w sposób analogiczny do klasycznego [9, 2], daje przyrostowe równanie konstytutywne sprężysto-plastycznego ośrodka gruntowego częściowo nawodnionego

$$
\begin{gathered}
d\boldsymbol{\sigma}^n = \left[\mathbf{D} - \frac{(\mathbf{D}\,\mathbf{a}_F)(\mathbf{a}_F^T\,\mathbf{D})}{\mathbf{a}_F^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{a}_F + K_F} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} - \left[\mathbf{D}\,\mathbf{m}_H + \frac{(\mathbf{D}\,\mathbf{a}_F)(\mathbf{a}_F^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{m}_H)}{\mathbf{a}_F^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{a}_F + K_F} - \right. \\
\left. \frac{(\mathbf{D}\,\mathbf{a}_F)\left(\dfrac{\partial F}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial \kappa}\dfrac{\partial \kappa}{\partial s} \right)}{\mathbf{a}_F^T\,\mathbf{D}\,\mathbf{a}_F + K_F} \right] ds \qquad K_F = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right\}^T \mathbf{a}_F
\end{gathered}
\tag{4}
$$

gdzie K_F oznacza moduł wzmocnienia plastycznego. Zależność składa się z dwóch części, z których pierwsza jest identyczna z klasyczną relacją dla sprężysto-plastycznego ośrodka gruntowego nawodnionego, natomiast druga – uwzględnia wpływ ssania na stan naprężenia w szkielecie gruntowym.

3. Sprężysto-plastyczny model szkieletu gruntu częściowo nawodnionego

3.1. Założenia

Analiza prac związanych z modelowaniem sprężysto-plastycznego zachowania nienawodnionego ośrodka gruntowego [4, 5, 6, 7] pozwala sprecyzować następujące uwagi dotyczące własności takiego ośrodka i potraktować je jako wyjściowe założenia do „budowy" modelu. Opisane modele bazują na teorii stanu krytycznego [1, 2] w formie rozwiniętej, uwzględniającej efekty częściowego nawodnienia gruntu. Powierzchnię stanu definiują cztery wielkości: efektywne naprężenie ścinające q' i naprężenie średnie netto p^n, wskaźnik porowatości e oraz ssanie s. Wyróżnia się postulaty dotyczące odwzorowania: powierzchni stanu w przestrzeni naprężeń „$q' - p^n$" i charakterystyk konsolidacji w układzie „$e - \log p'$". W pierwszym przypadku (odwzorowania przestrzeni „$q' - p^n$") zmiana ssania powoduje:

a) „przesunięcie" powierzchni plastyczności F (aproksymującej powierzchnię stanu) poza początek układu,
b) zmianę „proporcji" kształtu powierzchni plastyczności F,
c) zmianę nachylenia M linii stanu krytycznego.

Natomiast w drugim przypadku (obrazie charakterystyk konsolidacji w układzie „$e - \log p'$") zmiana ssania wywołuje:

a) przesunięcie i zmianę nachylenia linii konsolidacji (w stosunku do charakterystyk dla gruntu nawodnionego),
b) nierównoległość i zbieżność linii konsolidacji NCL i CSL oraz pośrednich (na danym poziomie ssania s wraz ze spadkiem naprężenia p').

Zakłada się przy tym, że nachylenie κ sprężystej linii konsolidacji ilustrującej odciążenie jest stałe i niezależne od ssania.

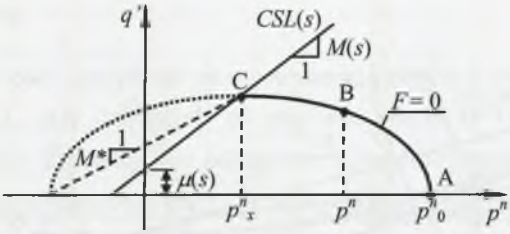
3.2. Równanie powierzchni plastyczności

Stosownie do przyjętej koncepcji modelu, jako rozwinięcia dla gruntów nienawodnionych klasycznej propozycji Modified Cam-Clay [1], powierzchnię plastyczności definiuje zależność sformułowana przez Wheelera i Shivakumara [4]. Tworzy ją, w przekroju płaszczyzną „$q' - p^n$" dla określonego poziomu ssania s, elipsa o równaniu mającym postać

$$F(q', p^n, s) = (q')^2 - \frac{M(s)p^n{}_x + \mu(s)}{p^n{}_0 - p^n{}_x}(p^n{}_0 - p^n)(p^n + p^n{}_0 - 2p^n{}_x) = 0 \tag{5}$$

poprawnym dla fragmentu ABC krzywej (rys. 1). Związane ze sobą wielkości $p^n{}_x$ i $p^n{}_0$ oznaczają wartości naprężenia średniego netto określające położenie wierzchołka C

i początku A elipsy, natomiast q' oraz p^n – współrzędne (naprężenie średnie netto i efektywną intensywność naprężenia) dowolnego punktu B leżącego na tej krzywej. $M(s)$ i $\mu(s)$ stanowią parę parametrów modelu, definiujących położenie „chwilowej" linii stanu krytycznego $CSL(s)$ (aktualnej dla poziomu ssania s).



Rys. 1. Przekrój powierzchni plastyczności F dla poziomu ssania s
Fig. 1. Cross-section of yield surface F for level of suction s

3.3. Prawo wzmocnienia

Proponowane prawo wzmocnienia stanowi uogólnienie klasycznej propozycji [2] dla modelu Modified Cam-Clay [1], uzależniającej przyrost plastycznej części wskaźnika porowatości od stanu naprężenia. Analizuje się zestaw charakterystyk konsolidacji w układzie „e – log p^n " (rys. 2) dla wariantu „przejścia" stanu naprężenia z poziomu (1) do (2), ograniczonego do opcji dla niezmiennej wartości ssania s=const. Wyprowadzona zależność musi być stosowana razem z korektą, opisującą zmianę położenia obrazu wierzchołka C w tym układzie.

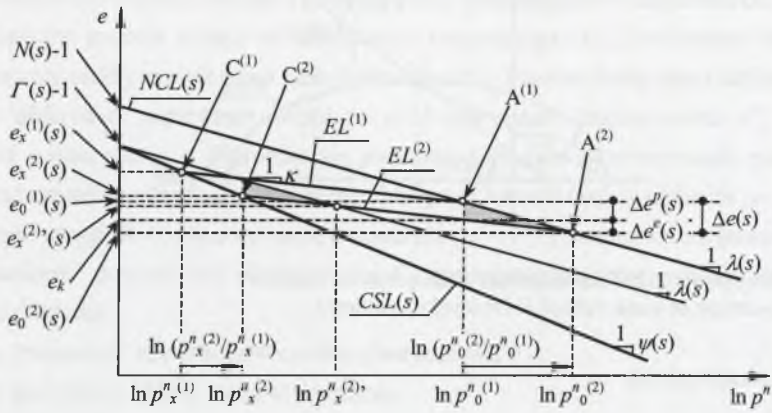
Całkowity przyrost wskaźnika porowatości $\Delta e_0(s)=e_0^{(1)}(s)-e_0^{(2)}(s)$ i jego sprężystej części $\Delta e_0^e(s)$ opisuje para zależności oparta odpowiednio na równaniu linii normalnej konsolidacji $NCL(s)$ i sprężystej linii odprężenia $EL^{(2)}$

$$\begin{aligned}\Delta e_0(s) &= [N(s)-1-\lambda(s)\ln p^n{}_0^{(2)}]-[N(s)-1-\lambda(s)\ln p^n{}_0^{(1)}] = \lambda(s)\ln(p^n{}_0^{(2)}/p^n{}_0^{(1)})\\ \Delta e_0^e(s) &= [e_k-\kappa\ln p^n{}_0^{(2)}]-[e_k-\kappa\ln p^n{}_0^{(1)}] = \kappa\ln(p^n{}_0^{(2)}/p^n{}_0^{(1)})\end{aligned} \tag{6}$$

w których $\lambda(s)$ i $N(s)$ – oznaczają nachylenie i przesunięcie linii $NCL(s)$, natomiast κ i e_k – nachylenie linii $EL^{(2)}$ i wartość jej przesunięcia na poziomie naprężenia ln $p^n{}_0^{(1)}$. Wprowadzenie otrzymanych relacji do prawa addytywności $\Delta e_0^p(s)=\Delta e_0(s)-\Delta e_0^e(s)$ i elementarne przekształcenie uzyskanej zależności daje szczególną postać poszukiwanego prawa wzmocnienia dla stałego poziomu ssania s=const

$$p^{n}{}_{0}{}^{(2)} = p^{n}{}_{0}{}^{(2)} \exp\left[\frac{\Delta e_{0}{}^{p}(s)}{\lambda(s)-\kappa}\right] \tag{7}$$

w którym $\Delta e^{p}(s)$ oznacza plastyczną część zmiany wskaźnika porowatości.



Rys. 2. Linie konsolidacji dla stałego poziomu ssania
Fig. 2. Lines of consolidation for constant level of suction

Korekta położenia punktu C bazuje na związku odchylonej linii $CSL(s)$ i równoległej do linii $NCL(s)$ oraz podobieństwie (oznaczonych szarym kolorem) trójkątów z rys. 2 dla obrazu „nowej" powierzchni plastyczności F. Od strony matematycznej sprowadza się to do określenia współrzędnych punktu przecięcia $C^{(2)}(\ln p^{n}{}_{x}{}^{(2)}, e_{x}{}^{(2)}(s))$ linii odprężenia $EL^{(2)}$ przechodzącej przez punkt $A^{(2)}(\ln p^{n}{}_{0}{}^{(2)}, e_{0}{}^{(2)}(s))$ z „odchyloną" linią $CSL(s)$ z układu równań

$$\begin{cases} e_{x}{}^{(2)} = e_{k}{}' - \kappa \ln p^{n}{}_{x}{}^{(2)} = \{N(s) - 1 - [\lambda(s)-\kappa] \ln p^{n}{}_{0}{}^{(2)}\} - \kappa \ln p^{n}{}_{x}{}^{(2)} \\ e_{x}{}^{(2)} = \Gamma(s) - 1 - \psi(s) \ln p^{n}{}_{x}{}^{(2)} \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $e_k{}'$ – oznacza przesunięcie linii odprężenia $EL^{(2)}$ przecinającej linię $NCL(s)$ w punkcie $A^{(2)}(\ln p^{n}{}_{0}{}^{(2)}, e_{0}{}^{(2)}(s))$. Poszukiwane współrzędne punktu $C^{(2)}$ definiują wzory

$$\begin{aligned} p^{n}{}_{x}{}^{(2)} &= \exp \frac{\Gamma(s) - N(s) + [\lambda(s)-\kappa] \ln p^{n}{}_{0}{}^{(2)}}{\psi(s)-\kappa} \\ e_{x}{}^{(2)}(s) &= \Gamma(s) - 1 - \psi(s) \frac{\Gamma(s) - N(s) + [\lambda(s)-\kappa] \ln p^{n}{}_{0}{}^{(2)}}{\psi(s)-\kappa} \end{aligned} \tag{9}$$

Uogólnienie prawa wzmocnienia (7) i korekty (9) dla przypadku dowolnej zmiany ssania $\Delta s = s_2 - s_1$ wymaga analizy zestawu charakterystyk konsolidacji dla dwóch poziomów ssania i zdefiniowania odpowiedniego prawa transformacji. Sformułowanie takiego uogólniającego rozszerzenia zostanie podane w aktualnie przygotowywanej oddzielnej publikacji.

3.4. Parametry modelu

Zaprezentowany model specyfikuje parametrycznie komplet 6 relacji funkcyjnych $M(s)$, $\mu(s)$, $N(s)$, $\lambda(s)$, $\Gamma(s)$, $\psi(s)$ (zależnych od poziomu ssania s) i zestaw 4 parametrów sprężystych (nachylenie sprężystej linii odprężenia κ, moduł sprężystości E, współczynnik Poissona ν, moduł nienawodnionego gruntu H, uwzględniający zjawisko ssania). Uzupełniają je 3 początkowe wartości: wskaźnika porowatości $e_0(s_0)$ i naprężenia średniego netto $p^n{}_0(s_0)$ (definiującego początkową „wielkość" powierzchni plastyczności F) i ssania s_0. W dotychczasowych badaniach doświadczalnych zachowanie gruntu nienawodnionego analizuje się dla określonych stałych poziomów ssania [4]. Efekty analizy wyników takich badań (w formie kompletów wartości liczbowych dla określonych poziomów ssania s) można zinterpolować wielomianami Legendre'a i traktować jako poszukiwane zależności funkcyjne.

4. Uwagi końcowe

Zastosowanie przedstawionego modelu w analizie obliczeniowej wymaga specyfikacji dodatkowych relacji konstytutywnych, definiujących wpływ zachowania wody i gazu w porach na zmiany ciśnień u_a i u_w, czyli na przyrost ssania s. Można wykorzystać tu zależności podane w pracy [7]. Konieczne jest też sformułowanie stosownego algorytmu obliczeniowego, uwzględniającego zależność konstytutywną (4) i koncepcję prognozowania zmian ssania, umożliwiającego analizę konkretnych zagadnień obliczeniowych.

Literatura

1. Roscoe K.H., Burland J.B.: On the generalized stress-strain behaviour of "wet" clay. "Engineering Plasticity", Eds Heyman J., Leckie F.A., Cambridge University Press, Cambridge 1968, 535 – 608.
2. Gryczmański M.: Sprężysto-plastyczne modele ośrodków. Program seminarium (niepublikowane).
3. Fedczuk P.: Przyrostowe równanie konstytutywne dla sprężysto-plastycznego modelu gruntu. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo, Zeszyt 28, Tom 2, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2006, 83 – 92.

4. Wheeler S.J., Sivakumar V.: An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil. "Geotechnique" 1995, 45, 35 – 53.
5. Alonso E. E., Gens A., Josa A.: A constitutive model for partially saturated soils. "Geotechnique" 1990, 40, 405 – 440.
6. Maâtouk A., Leroueil S., La Rochelle P.: Yielding and critical state of a collapsible unsaturated silty soil. "Geotechnique" 1993, 45, 465 – 477.
7. Geiser F., Laloui L., Vulliet L.: Unsaturated soil modeling with special emphasis on undrained conditions. "Numerical Models in Geomechanics – NUMOG VII", Eds Pande G. N., Pietruszczak S., Schweiger H. F., Balkema, Rotterdam 1999, 465 – 477.
8. Fredlund D.G., Rahardjo H.: Soil Mechanics for Unsaturated Soils. John Wiley & Sons, Inc., 1993.
9. Nayak G.C., Zienkiewicz O.C.: Elasto-plastic stress analysis. A generalized for various constitutive relations including strain softening. "International Journal for Numerical Method in Engineering" 1972, 5, 113 – 135.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Izbicki