

Janusz WALCZAK

## O PEWNEJ MODYFIKACJI PROBLEMU DOPASOWANIA ENERGETYCZNEGO DLA OBWODÓW JEDNOFAZOWYCH Z PRZEBIEGAMI NIESINUSOIDALNYMI

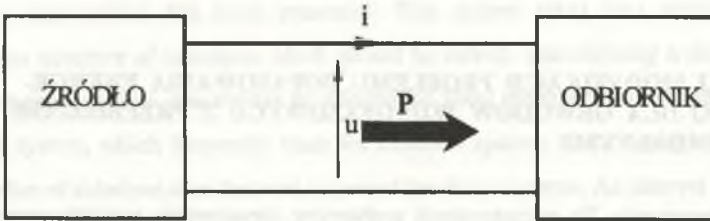
**Streszczenie.** Do rozpatrywania problemów dopasowania energetycznego w układach liniowych i nieliniowych może być stosowane podejście optymalizacyjne. W artykule rozpatrzono dwa problemy dopasowania dla układów liniowych z przebiegami niesinusoidalnymi. Pierwszy z nich jest klasycznym problemem dopasowania i polega na maksymalizacji mocy czynnej źródła o liniowej impedancji wewnętrznej. Drugi problem polega na maksymalizacji mocy czynnej źródła przy ograniczeniu na kształt prądu w obwodzie. Analiza tych problemów umożliwiła podanie warunków doboru układów dopasowujących, które realizują rozpatrywane stany dopasowania.

## ON MODIFICATION OF ENERGETICAL MATCHING PROBLEM IN ONE-PHASE SYSTEMS WITH NONSINUSOIDAL WAVEFORMS

**Summary.** For considerations of the matching problems in the linear and nonlinear systems, the optimization approach may be applied. Two matching problems for linear, nonsinusoidal systems have been analysed in the paper. The first one is a classical matching problem. It consists in maximization of active power of nonsinusoidal source with linear inner impedance. The second problem is based on maximization of active power of source by constrains on the shape of source current. Analysis of these problem has been presented. Conditions for design of equalizers realizing the matching state (in the above sense) have been also given.

## 1. WSTĘP

Klasyczny problem dopasowania energetycznego polega na określeniu warunków, przy których ze źródła do odbiornika przekazywana jest maksymalna moc czynna  $P$  (rys.1).



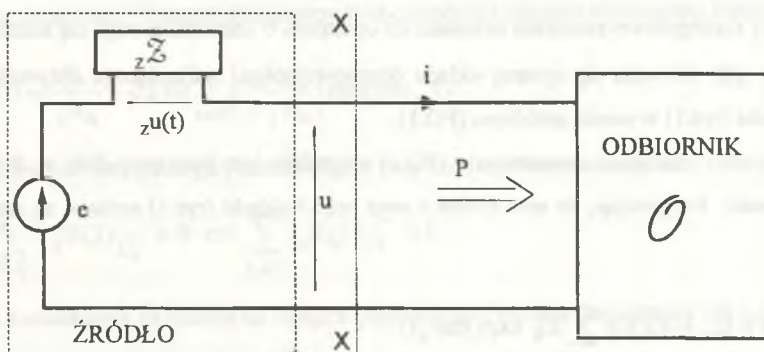
Rys.1. Układ: źródło-odbiornik

Fig.1. The system: source-load

Problem ten postawiony pierwotnie przez Bodego, Fano, Youla [3] doczekał się wielu uogólnień, lecz nie został w pełni rozwiązany do chwili obecnej. Dla jedno- i wielofazowych układów SLS złożonych ze źródła i odbiornika (rys.1) zagadnienie dopasowania były analizowane w wielu pracach [2], [3], [7], [8], [9]. Analizę warunków dopasowania dla prostych modeli nieliniowych układu z rys.1 częściowo przeprowadzono w ostatnich latach [5], [11]. Istotne trudności w rozwiązywaniu problemów dopasowania występują nie tylko dla parametrycznych i nieliniowych modeli układu z rys.1, ale również wtedy, gdy rozpatruje się układy z przebiegami niesinusoidalnymi, o złożonej strukturze topologicznej [6]. Inne trudności wynikają z narzucania dodatkowych ograniczeń na rozwiązanie problemu dopasowania. Jeden z takich problemów, polegający na analizie dopasowania przy dodatkowych warunkach dotyczących zadanego kształtu prądu w obwodzie, rozpatrzono w artykule.

## 2. DOPASOWANIA W UKŁADACH Z PRZEBIEGAMI OKRESOWYMI, NIESINUSOIDALNYMI

Dla układu jednofazowego (rys.2) z  $T$ -okresowymi przebiegami niesinusoidalnymi klasyczną wersję problemu dopasowania sformułować można w postaci zadania optymalizacyjnego (PO.1).



Rys.2. Model układu jednofazowego

Fig.2. Model of one-phase system

## PO.1

Wyznaczyć

$$\max_i P(i) = \max_i (u, i)_{L_T^2} = \max_i (e - z\Sigma i, i)_{L_T^2} . \quad (1)$$

Rozwiązania problemu (PO.1) poszukuje się w klasie sygnałów należących do przestrzeni Hilberta  $L_T^2$ . Jest to przestrzeń przebiegów T-okresowych, całkownych z kwadratem, w której normę i iloczyn skalarny określają wzory:

$$\|f\|_{L_T^2} = f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} , \quad (2)$$

$$(f, g)_{L_T^2} = P(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g(t) dt ; \quad f, g \in L_T^2 . \quad (3)$$

Należy zauważyć, że do rozwiązania problemu (PO.1) konieczna jest znajomość modeli elementów występujących po lewej stronie przekroju x-x (rys.1), tzn. sem  $e$  i operatora impedancyjnego  $z\Sigma$  źródła. Odnośnie do odbiornika wystarczy założyć, że przy wymuszeniu napięciowym  $u \in L_T^2$  jego odpowiedź prądowa jest również T-okresowa, zatem operator admitancyjny odbiornika  $\Theta$ , określony równaniem:

$$i(t) = [\Theta u](t) , \quad (4)$$

winien spełniać warunek:

$$\Theta : L_T^2 \rightarrow L_T^2 . \quad (5)$$

Bardziej szczegółowe założenia odnośnie do operatora  $\mathcal{O}$  odbiornika stają się niezbędne w momencie, gdy rozważa się syntezę układu dopasowującego, realizującego optymalny stan pracy układu (rys.1) w sensie problemu (PO.1).

Rozwiązanie problemu dopasowania (PO.1) wygodnie jest przeprowadzić w dziedzinie częstotliwości. Przyjmując, że sem źródła  $e$  oraz prąd i układu (rys.1) opisane są szeregami Fouriera:

$$e(t) = E_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h \in \mathbb{N}} E_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (6)$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h \in \mathbb{N}} I_h \exp(jh\omega_0 t), \quad (7)$$

gdzie:

$E_h = {}_1E_h - j {}_2E_h$ ,  $I_h = A_h - jB_h$  - wartości zespolone skuteczne przebiegów  $e$ ,  $i$  oraz że liniowy operator impedancyjny źródła  $z\mathcal{Z}$  opisany jest ciągiem impedancji  $\{zZ\} = \{zR_h + jzX_h\}$ ,  $h \in \mathbb{N}$ , na podstawie twierdzenia Parsevala można problem (PO.1) przedstawić w postaci wzoru:

$$\begin{aligned} \max_{(A_h, B_h)} P(A_h, B_h) &= \max_{(A_h, B_h)} \left\{ \operatorname{Re} \sum_{h \in \mathbb{N}} U_h I_h^* \right\} = \max_{(A_h, B_h)} \left\{ \operatorname{Re} \sum_{h \in \mathbb{N}} (E_h - zZ_h I_h) I_h^* \right\} = \\ &= \max_{(A_h, B_h)} \left\{ \sum_{h \in \mathbb{N}} ({}_1E_h A_h + {}_2E_h B_h) - zR_h (A_h^2 + B_h^2) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Z warunków koniecznych na ekstremum funkcjonału (8) wynika układ równań:

$$\frac{\partial P(A_h, B_h)}{\partial A_h} = {}_1E_h - 2zR_h A_h = 0, \quad (9)$$

$h \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial P(A_h, B_h)}{\partial B_h} = {}_2E_h - 2zR_h B_h = 0 \quad (10)$$

którego rozwiązania określają wzory:

$$A_h = \frac{{}_1E_h}{2zR_h}, \quad B_h = \frac{{}_2E_h}{2zR_h}, \quad (11)$$

$$I_h = A_h - jB_h = \frac{E_h}{2zR_h}. \quad (12)$$

Prąd  $i_d$ , stanowiący element stacjonarny funkcjonału (8), określa więc szereg Fouriera:

$$i_d(t) = \frac{E_o}{z R_h} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h \in N} \left( \frac{E_h}{2 z R_h} \right) \exp(jh\omega_o t) . \quad (13)$$

Jeżeli operator impedancyjny źródła  $z^Z$  jest pasywny, czyli można zapisać:

$$\bigwedge_{i \in L_T^2} (z^Z i, i)_{L_T^2} > 0 \Leftrightarrow \sum_{h \in N} z R_h |I_h|^2 > 0 , \quad (14)$$

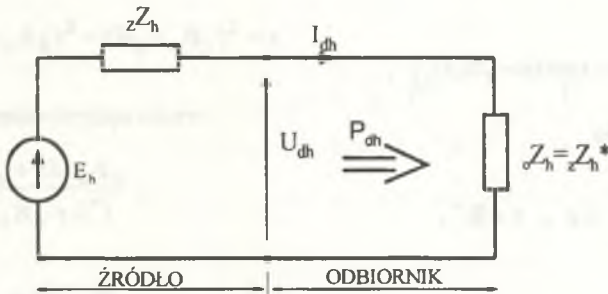
to forma kwadratowa określona na drugich pochodnych Frecheta funkcjonału (8) jest zawsze ujemnie określona. Zatem prąd  $i_d$  (13) realizuje maximum globalne problemu (PO.1) [1]. Prąd  $i_d$  (13) zapewnia transport maksymalnej mocy czynnej ze źródła do odbiornika i determinuje napięcie optymalne na zaciskach odbiornika  $u_d$ , które określa wzór:

$$u_d(t) = \frac{1}{2} E_o + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h \in N} \left( \frac{z R_h - j z X_h}{2 z R_h} \right) E_h \exp(jh\omega_o t) . \quad (15)$$

Ze wzorów (13), (15) wynika, że w optymalnym punkcie pracy układu z rys.1, określonym parą  $(u_d, i_d)$ , impedancje odbiornika  ${}_o Z_h$  wynoszą:

$${}_o Z_h = {}_o R_h + j {}_o X_h = \frac{U_{dh}}{I_{dh}} = z R_h - j z X_h = z Z_h^* , \quad h \in N . \quad (16)$$

Stan dopasowania (typu PO.1) układu źródło - odbiornik z rys.1 ilustruje rys.3.



Rys.3. Stan dopasowania energetycznego dla układu z rys.2

Fig.3. The matching state of system shown in Fig.2

Maksymalna moc czynna przekazywana ze źródła do odbiornika wynosi:

$$P_{\max} = \sum_{h \in N} P_{dh} = \operatorname{Re} \sum_{h \in N} U_{dh} I_{dh}^* = \sum_{h \in N} \frac{|E_h|^2}{4 z R_h} \quad (17)$$

Zastosowana w artykule metoda doprowadziła do znanych dla układów liniowych warunków dopasowania energetycznego (16) [4] i może być również stosowana dla układów nieliniowych [10]. W szczególności warunkiem koniecznym i wystarczającym dopasowania liniowego źródła (rys.1) do nieliniowego odbiornika jest spełnienie w punkcie pracy ( $u_d, i_d$ ) zależności (16).

Widmo prądu optymalnego (13) jest jednoznacznie zdeterminowane przez charakterystykę częstotliwości operatora  $z^Z$  źródła. Kształt tego prądu nie jest więc ustalony dowolnie.

Możliwa jest modyfikacja problemu dopasowania (PO.1), która prowadzi do nowego zagadnienia optymalizacyjnego dla układu z rys.1. Rozwiązanie tego zagadnienia umożliwi kształtowanie przebiegu prądu optymalnego w zadany sposób, co rozpatrzone poniżej.

### 3. MODYFIKACJA PROBLEMU DOPASOWANIA

Proponowana modyfikacja problemu (PO.1) dla układu z rys.2 polega na rozwiązaniu zadania optymalizacyjnego sformułowanego następująco:

#### PO.2

Wyznaczyć:

$$\max_i P(i) = \max_i (e^{-z^Z i}, i)_{L_T^2}, \quad (18)$$

przy ograniczeniu:

$$\|i - i_0\|_{L_T^2}^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (19)$$

gdzie:

$i_0$  - zadany prąd odbiornika,

$\varepsilon$  - średniokwadratowy błąd aproksymacji.

Rozwiązanie problemu (PO.2) stanowi prąd, różniący się dowolnie mało w sensie normy (19) od prądu zadanego  $i_0$ , przy czym prąd ten umożliwi transport maksymalnej możliwej

mocy czynnej  $P$  ze źródła do odbiornika. Przyjmując, że zadany prąd  $i_o$  opisany jest szeregiem Fouriera:

$$i_o(t) = {}_oA_o + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h \in \mathbb{N}} ({}_oA_h - j {}_oB_h) \exp(jh\omega_o t), \quad (20)$$

funkcjonał Lagrange'a problemu (PO.2):

$$L(i, \lambda) = (e - {}_z \xi i, i)_{L_T^2} + \lambda \left[ \varepsilon - \|i - i_o\|_{L_T^2}^2 \right], \quad (21)$$

w dziedzinie częstotliwości, można zapisać w postaci wzoru:

$$L(A_h, B_h, \lambda) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \left[ ({}_1E_h A_h + {}_2E_h B_h) - {}_z R_h (A_h^2 + B_h^2) \right] + \lambda \left[ \varepsilon - \sum_{h \in \mathbb{N}} (A_h - {}_oA_h)^2 + (B_h - {}_oB_h)^2 \right], \quad (22)$$

gdzie:

$\lambda$  - mnożnik Lagrange'a.

Z warunków koniecznych ekstremum tego funkcyjonału wynika układ równań:

$${}_1E_h - 2 {}_z R_h A_h - 2\lambda(A_h - {}_oA_h) = 0, \quad (23)$$

$$h \in \mathbb{N}$$

$${}_2E_h - 2 {}_z R_h B_h - 2\lambda(B_h - {}_oB_h) = 0, \quad (24)$$

$$\sum_{h \in \mathbb{N}} (A_h - {}_oA_h)^2 + (B_h - {}_oB_h)^2 = \varepsilon, \quad (25)$$

którego rozwiązania określają wzory:

$$A_h = \frac{{}_1E_h + 2\lambda^* {}_oA_h}{2({}_z R_h + \lambda^*)}, \quad (26)$$

$$B_h = \frac{{}_2E_h + 2\lambda^* {}_oB_h}{2({}_z R_h + \lambda^*)}, \quad (27)$$

gdzie:

$\lambda^*$  - wartość mnożnika Lagrange'a w punkcie stacjonarnym funkcyjonału (22).

Prąd  $i_o$ , stanowiący element stacjonarny funkcjonału (22), określa więc wzór:

$$i_d(t) = \frac{E_o + 2\lambda^* {}_oI_o}{2({}_zR_o + \lambda^*)} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h \in \mathbb{N}} \left[ \frac{E_h + \lambda^* {}_oI_h}{2({}_zR_h + \lambda^*)} \right] \exp(jh\omega_o t), \quad (28)$$

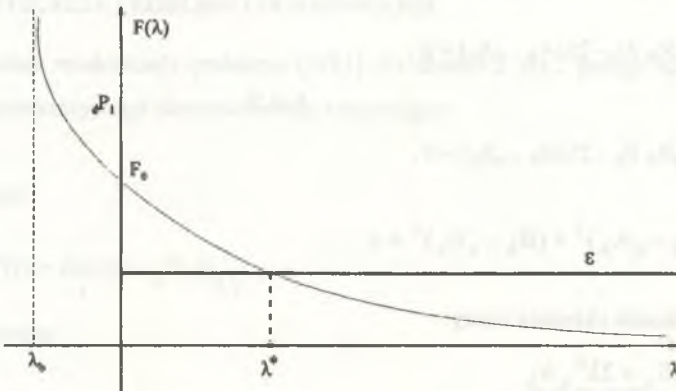
gdzie:

$${}_oI_h = {}_oA_h - j {}_oB_h, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Wartość mnożnika Lagrange'a wyznacza się z równania, wynikłego z podstawienia wzorów (26), (27) do wzoru (25):

$$\sum_{h \in \mathbb{N}} \frac{|E_h|^2 - 4 {}_zR_h ({}_1E_h {}_oA_h + 2 E_h {}_oB_h) + 4 {}_zR_h^2 ({}_oA_h^2 + {}_oB_h^2)}{4({}_zR_h + \lambda)^2} = F(\lambda) = \varepsilon. \quad (29)$$

Z założonej pasywności (14) operatora impedancyjnego źródła oraz z nierówności Cauchy-Buniakowskiego wynika, że dla  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  licznik wyrażenia (29) jest zawsze dodatni. Funkcja  $F(\lambda)$  w obszarze  $\lambda \in <0, \infty$  jest więc ściśle dodatnia oraz (co łatwo zauważyć) monotonicznie malejąca, rys.4.



Rys.4. Wykres funkcji  $F(\lambda)$ , (30)

Fig.4. Plot of function  $F(\lambda)$ , (30)

Dla

$$\varepsilon < F_0 = \sum_{h \in \mathbb{N}} \frac{\left( |E_h|^2 - 4 {}_zR_h ({}_1E_h {}_oA_h + 2 E_h {}_oB_h + 4 {}_zR_h |{}_oI_h|^2) \right)}{4 {}_zR_h^2} \quad (30)$$



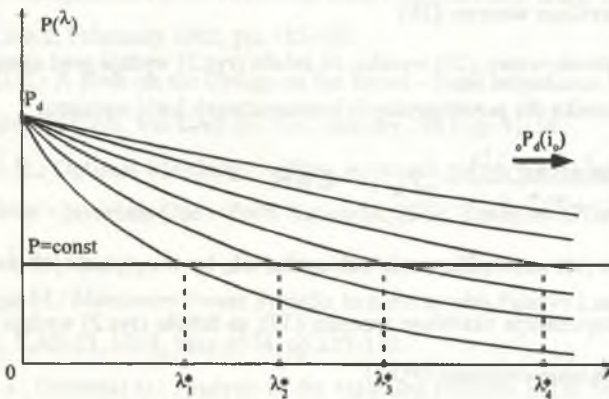
równanie (29) posiada w obszarze  $\lambda \in R^+$  jednoznaczne rozwiązanie. Dla  $\lambda < 0$  funkcja  $F(\lambda)$  jest meromorficzna, a ciąg jej biegunów  $\{\lambda_{bh}\}$  posiada oszacowanie (por. rys.4):

$$|\lambda_{bh}| \geq \lambda_d = \min_h |zR_h|, \quad h \in N. \quad (31)$$

W tym obszarze, z punktu widzenia problemu (PO.2), właściwości funkcji  $F(\lambda)$  są nieistotne. Powyższe stwierdzenie wynika z faktu, że warunki wystarczające maksimum problemu (PO.2) są spełnione, gdy:

$$\bigwedge_{h \in N} (zR_h + \lambda^*) > 0. \quad (32)$$

Dla  $\lambda^* = 0$  ograniczenie (19) jest nieaktywne, a moc czynną pobieraną przez odbiornik określa wzór (17), rys.5.



Rys.5. Wykres funkcji  $P(\lambda)$

Fig.5. Plot of function  $P(\lambda)$

Dla  $\lambda^* \rightarrow \infty$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) moc czynna  $oP_d$  pobierana przez odbiornik jest mocą przenoszoną przez zadany prąd  $i_0$  (por. problem (PO.2)). W przypadkach pośrednich, gdy  $\lambda^* \in (0, \infty)$ , moc czynną odbiornika określa wzór:

$$P(\lambda) = \sum_{h \in N} \frac{(zR_h + 2\lambda^*)}{4(zR_h + \lambda^*)} |E_h|^2 + \sum_{h \in N} \frac{\lambda^{*2} oP_{dh}}{(zR_h + \lambda^*)^2}, \quad (33)$$

gdy:

$${}_o P_{dh} = {}_1 E_h {}_o A_h + {}_2 E_h {}_o B_h - {}_z R_h |I_h|^2 = {}_o P_h - {}_z R_h |I_h|^2, \quad (34)$$

$${}_o P_d = \sum_{h \in N} {}_o P_{dh}. \quad (35)$$

Z powyższego wynika, że rozwiązanie problemu (PO.2) stanowi kompromis pomiędzy rozwiązaniem problemu (PO.1) (maksymalizacja mocy czynnej źródła) a sytuacją, gdy źródło (rys.2) wydaje zadany prąd  $i_o$ .

W optymalnym stanie pracy napięcie na zaciskach odbiornika wynosi:

$$u_d = e - z {}_d i_d, \quad (36)$$

gdzie:

$i_d$  - prąd określony wzorem (28).

Stąd i na podstawie wzoru (28) wynika, że źródło (rys.2) wydaje prąd optymalny (28), gdy impedancje odbiornika dla poszczególnych harmonicznych  $h \in N$  wynoszą:

$${}_o Z_h = \frac{2E_h ({}_z R_h + \lambda^*)}{E_h + 2\lambda^* {}_o J_h} - {}_z Z_h, \quad h \in N. \quad (37)$$

Jeżeli możliwe jest zmodyfikowanie odbiornika tak, by w optymalnym punkcie pracy ( $u_d$ ,  $i_d$ ) posiadał on impedancje określone wzorem (37), to źródło (rys.2) wydaje prąd optymalny stanowiący rozwiązanie problemu (PO.2).

#### 4. PODSUMOWANIE

Zastosowana w artykule metoda cechuje się tym, że optymalizację energetyczną układu (rys.1) przeprowadza się względem prądu odbiornika. Takie przyjęcie zmiennej decyzyjnej umożliwia również analizę układów z odbiornikami niekoniecznie liniowymi. Prezentowane podejście umożliwia uogólnienie klasycznych problemów dopasowania i podanie efektywnych warunków realizacji optymalnych stanów pracy układów.

## LITERATURA

1. Bertsekas D.P.: Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Academic Press. New York, 1982.
2. Carlin H.J.: On Optimum Broad - Band Matching. IEEE Trans. on CAS. Vol. CAS-28, No. 5, May 1981, pp.401-405.
3. Chen W.K.: Theory and Design of Broadband Matching Networks. Pergamon Press. New York, 1976.
4. Desoer C.A.: The Maximum Power Transfer Theorem for n-Ports. IEEE Trans. on CT., Vol.21, No.5, May 1973, pp. 328-330.
5. Ladvanszky J.: Maximum Power Transfer in Weakly Nonlinear Circuits. IEEE Int. Conf. on CAS, ISCAS'88 Helsinki, Finland, 1988, pp. 2723-2726.
6. Lin P.M.: Competitive Power Extraction from Linear n-Ports. IEEE Trans. on CAS. Vol. CAS-32, No.2, February 1985, pp. 185-191.
7. Pawsey D.C.: A Note on the Design on the Broad - Band Impedance Matching Networks IEEE Trans. on CAS. Vol.CAS-30, No1, January 1983, pp.51-54.
8. Rohrer A.R.: Optimal Matching: A New Approach to the Matching Problem for Real Linear Time - Invariant One - Ports Networks. IEEE Trans. on CT. Vol.15, No 2, June 1968, pp.118-124.
9. Vidyasagar M.: Maximum Power Transfer in n-Ports with Passive Loads. IEEE Trans. on CAS Vol. CAS-21, No 3, May 1974, pp.327-330.
10. Walczak J., Obrębski G.: Analysis of the Matching Problem in the Nonlinear One-Phase Systems. Proc. of MMTE'95, Pilzno, 28-29 June, 1995, pp.237-240.
11. Wyatt J.L., Jr., Chua L.O.: Nonlinear Resistive Maximum Power Theorem with Solar Cell Applications. IEEE Trans. on CAS. Vol. CAS-30, No 11, Sept. 1983, pp.823-828.

Recenzent: Dr hab. inż. Tadeusz Skoczkowski,  
Prof. Instytutu Elektrotechniki, Warszawa

## Abstract

Analysis of two energetical matching problems in one-phase system: source - load with nonsinusoidal waveforms has been presented in the paper. The first problem is called a classical one. It deals with maximization of active power supplied from nonsinusoidal voltage source to the load. This problem has been formalized in the form of the optimization task (1) where load current is a decision variable. It has been solved in spectral domain (13). Optimal load impedances  ${}_oZ_h$  (16) determining matching state of the system: source-load have been found out basing on the optimal current (13) and the optimal voltage (15) on the load terminals.

The second problem deals with maximization of the source active power by imposing the restriction on the given shape of the source current. It has been assumed that the restriction (19) is a square of mean-square norm of the difference between the source current  $i$  and the source current with given shape  $i_o$ . The condition (30) for existing of the discussed problem solution has been derived according to the approximation accuracy  $\epsilon$  (19). The limiting case of the solution for  $\epsilon \rightarrow 0$  has been considered as well. The conditions of matching problem (18), (19) have been determined basing on the optimal current (28) and the optimal voltage (36) on the source terminals. These conditions are determined by impedances  ${}_oZ_h$  (37).

Features of the methods described in the paper are as follows:

- solving of optimization tasks in relation to source current,
- determining of matching conditions on the ground of the knowledge of the optimal current and voltage on the source terminals.

These features make possible to use the described methods for analysis of matching problems in more complex cases.