

Bernard BARON

Barbara GROCHOWICZ, WSI Opole

### ZASTOSOWANIE POTENCJAŁU LOGARYTMICZNEGO WARSTWY POJEDYNCZEJ DO ANALIZY POLA ELEKTRYCZNEGO LINII PRZESYŁOWYCH

**Streszczenie.** W pracy zastosowano konstrukcję funkcji kształtu pozwalającą na aproksymację potencjału logarytmicznego zadanego na dowolnie usytuowanych okręgach płaszczyzny, podaną w pracy [3]. Pozwoliło to na dyskretyzację równań całkowo-brzegowych równoważnych problemowi Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a, opisującego pole elektryczne linii przesyłowych. Obliczenia testujące opracowanego algorytmu potwierdziły dużą dokładność obliczeń numerycznych.

### USE OF LOGARITHMIC POTENTIAL OF A SINGLE LAYER FOR ANALYSIS OF THE ELECTRIC FIELD OF POWER LINE

**Summary.** The construction of the shape function allowing the approximation of logarithmic potential given at arbitrary situated surface circles [3] has been used in the paper. It made possible to use integral - boundary equations, in discrete form, that are equivalent to Dirichlet problem in the two dimensional Laplace equation describing the electric field of power lines. The tests of elaborated algorithm have proved a very high accuracy of the numerical calculations.

## 1. DYSKRETYZACJA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Do opisu pola linii trójfazowych zastosowano równanie Fredcholma I rodzaju, podanego np. jak w pracy [ 1 ].

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^{N_p} \oint_{C_k} \sigma_k(y_1, y_2) \ln \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}} d\mathbf{l}_y = \underline{V}_l \quad (1)$$

dla  $x \in C_l, l = 1, 2, \dots, N_p$ .

Dyskretyzacja równań całkowych (1) w rozpatrywanym przypadku polega na zastosowaniu aproksymacji

$$\underline{V}(X) \cong \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} F(X, Y_k, r_k, \Delta\varphi_k, \varphi_{k,i}) \underline{E}_{k,i} \quad (2)$$

operatora całkowego, danego w postaci potencjału logarymicznego, występującego w równaniu (1), w wybranych punktach podziału powierzchni przewodów  $C_k$ . Najwygodniej jest przyjąć te punkty jako punkty węzłowe  $X = \underline{Y}_{k,i}$  ( $k=1, 2, \dots, N_p$ )  $\wedge$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ).

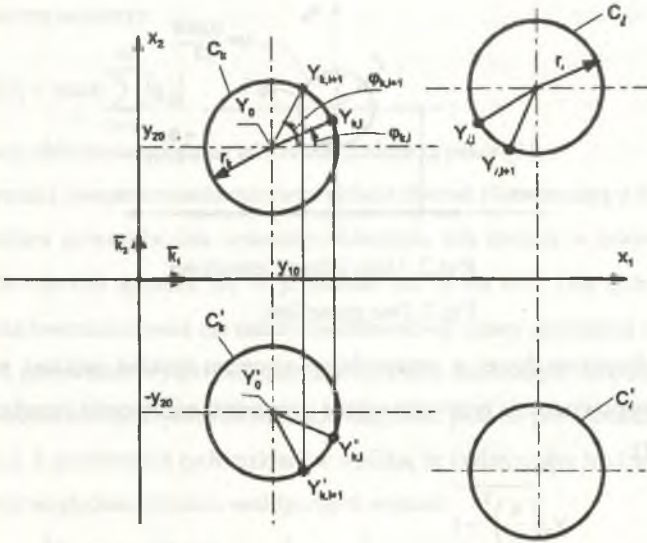
Tak przeprowadzona dyskretyzacja równania całkowego (1) prowadzi do układu równań liniowych algebraicznych ze względu na niewiadome zmienne węzłowe  $\underline{E}_{k,i}$ , stanowiące składowe normalne natężenia pola do powierzchni przewodów:

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} F(Y_{l,j}, Y_k, r_k, \Delta\varphi_k, \varphi_{k,i}) \underline{E}_{k,i} = \underline{V}_l \quad (3)$$

( $l = 1, 2, \dots, N_p$ )  $\wedge$  ( $j = 1, 2, \dots, N_l$ ).

Jeżeli punktów dyskretyzacji  $Y_{l,j}$  jest tyle, ile niewiadomych zmiennych węzłowych  $\underline{E}_{k,i}$ , to problem sprowadza się do rozwiązania algebraicznego układu równań liniowych (3).

Należy zauważyć, że macierz układu równań liniowych (3) jest macierzą rzeczywistą, natomiast prawa strona tego równania jest wektorem zespolonym. Wektor zespolony może być więc zapisany jako macierz dwukolumnowa, której kolumny odpowiadają odpowiednio części rzeczywistej i urojonej. Do rozwiązania układu równań (3) można więc zastosować algorytm Gaussa dla równań macierzowych [3].



Rys.1. Sposób dyskretyzacji konturów przewodów

Fig.1. Digitalization of the contours of conductors

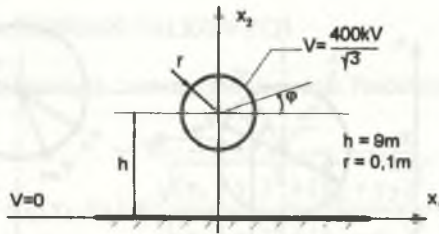
Z rozwiązania układu równań algebraicznych (3) otrzymujemy składowe normalne  $\underline{E}_{k,i}$  natężenia pola elektrycznego do powierzchni przewodów w poszczególnych punktach węzłowych  $Y_{k,i}$ . Jeżeli więc problem sprowadza się do poszukiwania maksymalnych wartości natężenia pola, to wystarczy ograniczyć się do znalezienia maksimum modułu natężenia pola z otrzymanego rozwiązania (3). Występuje ono bowiem zawsze na powierzchniach przewodów. Jeżeli chcemy badać rozkłady natężenia pola na zewnątrz przewodów, to przy obliczonych natężeniach powierzchniowych możemy korzystać ze wzoru (2) w postaci:

$$\bar{E}(X) = \sum_{n=1}^2 \bar{k}_n E_{x_n} = -\operatorname{grad}_x V(X) = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \left[ \operatorname{grad}_x F(X, Y_k, r_k, \Delta\varphi_k, \varphi_{k,i}) \right] \underline{E}_{k,i}, \quad (4)$$

$$\text{gdzie: } \underline{E}_{x_n}(X) = -\frac{\partial V(X)}{\partial x_n} \quad \text{dla } X \notin C_k. \quad (5)$$

## 2. TESTOWANIE ALGORYTMU

Opracowany algorytm przetestowano na przykładzie obliczeniowym dla linii jedнопроводowej o danych z rys.2.



Rys.2. Linia jednofazowa

Fig.2. One phase line

Dla linii jednofazowej o przewodzie walcowym rozkład wektora natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodu można wyznaczyć analitycznie stosując współrzędne dwuwalcowe [1]:

$$E_n(\varphi) = \frac{V \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1}}{LN \left| \frac{h}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1} \right|} \frac{1}{h + r_0 \sin \varphi} \quad (6)$$

W tabeli 1 podano wyniki obliczeń współczynników uwarunkowania macierzy  $G$  układu równań (3), generowanej dla danych z rys.2, w zależności od ilości elementów, na jakie podzielono kontur przewodu w przedziale od 10 do 100.

Tabela 1  
Współczynnik uwarunkowania macierzy  $k(G)$   
w zależności od ilości elementów  $N$

$N$	$k(G)$
10	65.653
20	133.429
30	200.723
40	332.033
50	335.349
60	402.650
70	469.945
80	670.986
90	604.531
100	671.995

W obliczeniach współczynnika uwarunkowania macierzy  $G = [g_{ij}]$  zgodnie z definicją:

$$k(G) = |G| |G^{-1}| \quad (7)$$

stosowano normę macierzy:

$$|G| = \max_j \sum_{i=1}^N |g_{ij}|$$

oraz procedury obliczenia macierzy odwrotnej podane w pracy [3].

Współczynniki uwarunkowania macierzy układu równań (3) wzrastają z ilością elementów podziału konturu przewodu. Jak wykazały obliczenia, ich zmiana w zakresie zmian ilości elementów  $N=10 \div 100$  zmienia się w przedziale od 65 do 672. Dla tych wartości zmian współczynnika uwarunkowania nie należy spodziewać się utraty stabilności rozwiązania.

W tabeli 2 porównano wyniki obliczeń analitycznych dokonanych na podstawie wzoru (6) z wynikami obliczeń numerycznych rozkładu natężenia pola na powierzchni przewodów dla danych z rys.2. Z porównania tych rozkładów wynika, że maksymalny błąd względny obliczeń numerycznych względem obliczeń analitycznych wynosi:

$$\max_{\varphi} \left| \frac{E_n(\varphi) - E'_n(\varphi)}{E_n(\varphi)} 100\% \right| = 0,01\% .$$

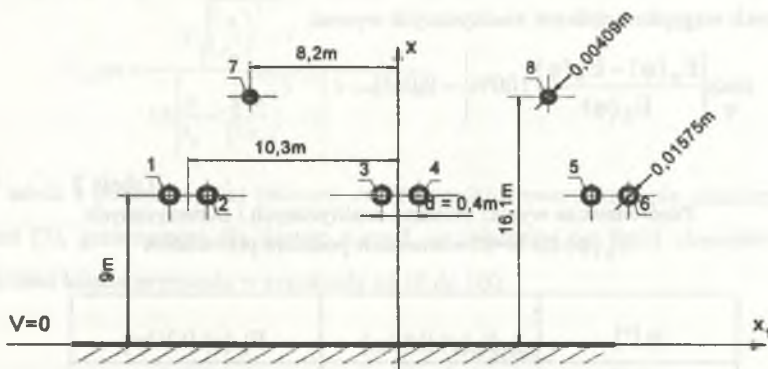
Tabela 2  
Porównawcze wyniki obliczeń analitycznych i numerycznych  
 $E'_0(\varphi)$  dla  $N=20$  elementów podziału przewodów

$\varphi$ [°]	$E_n(\varphi)$ [kV/m]	$E'_n(\varphi)$ [kV/m]
0.00	444.693	444.692
18.00	443.171	443.158
36.00	441.808	441.784
54.00	440.731	440.699
72.00	440.043	440.004
90.00	439.806	439.771
108.00	440.043	440.004
126.00	440.731	440.699
144.00	441.808	441.784
162.00	443.171	443.158
180.00	444.693	444.692
198.00	446.225	446.237
216.00	447.616	447.640
234.00	448.727	448.760
252.00	449.443	449.480
270.00	449.690	449.735
288.00	449.443	449.480
306.00	448.727	448.760
324.00	447.616	447.640
342.00	446.225	446.237

Tak duża dokładność obliczeń numerycznych związana jest zapewne z bardzo dobrą aproksymacją potencjału logarymicznego w postaci (2). Konstrukcja funkcji kształtu  $F(X, Y_0, r, \Delta\phi, \varphi)$  podana jest analitycznie przy wiernym zachowaniu kształtu konturów kołowych przewodów, dlatego też przybliżenie potencjału wynika tylko z liniowej aproksymacji natężenia pola na powierzchni przewodów, a to przy stosunkowo małych zmianach tych natężeń daje tak dokładne wyniki obliczeń numerycznych.

#### 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Opracowany algorytm zastosowano do obliczeń rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów linii przesyłowej 400 kV.



Rys.3. Konfiguracja linii przesyłowej 400 kV

Fig.3. 400 kV power line configuration

Geometryczne wyniki podano na rys.3. Potencjały przewodów względem ziemi przyjęto sinusoidalnie zmienne o wartościach zespolonych:

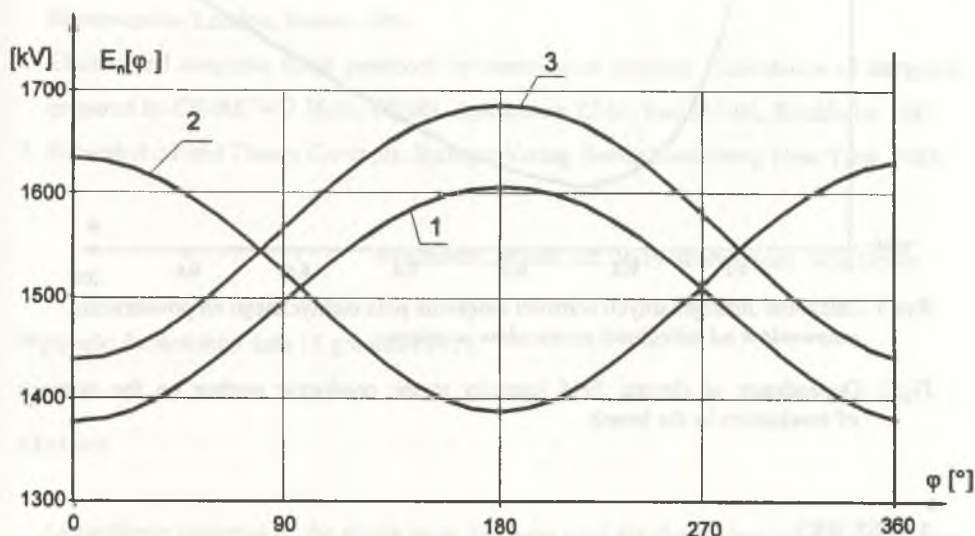
$$\underline{V}_1 = \underline{V}_2 = \frac{400}{\sqrt{3}} [\text{kV}] ,$$

$$\underline{V}_3 = \underline{V}_4 = \frac{400}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} [\text{kV}] ,$$

$$\underline{V}_5 = \underline{V}_6 = \frac{400}{\sqrt{3}} e^{j\frac{2\pi}{3}} [\text{kV}] ,$$

$$\underline{V}_7 = \underline{V}_8 = 0 .$$

Rozkład natężenia pola elektrycznego  $E_n$  na powierzchni przewodów obliczono zgodnie z algorytmem (3), przyjmując  $N_k=30$  ( $k=1,2,\dots,8$ ) równomiernych elementów podziału poszczególnych konturów przewodów.

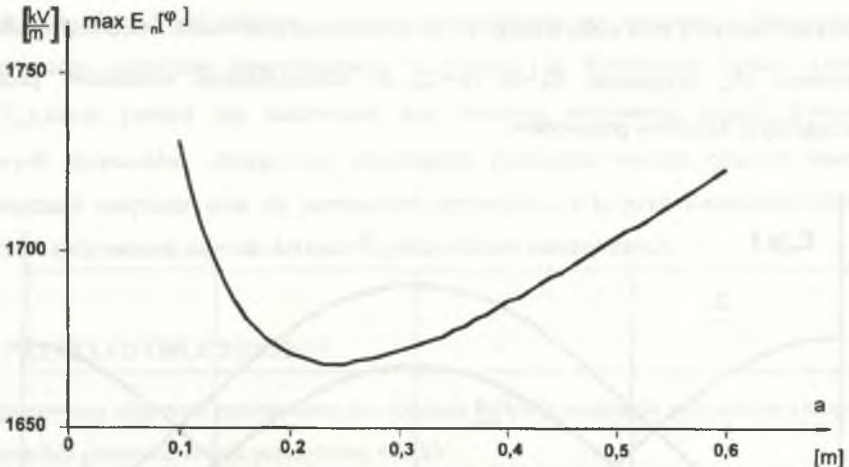


Rys.4. Rozkład natężenia pola na powierzchni przewodów 1, 2, 3 linii 400 kV o danych pokazanych na rys.3

Fig.4. Distribution of electric field intensity for the 400 kV line from Fig.3

Wyniki obliczeń dla przewodów 1, 2, 3 (rys.3) podano na rys.4. Maksymalna wartość natężenia pola dla rozpatrywanej konfiguracji występuje w fazie środkowej (przewody 3, 4) i wynosi  $\sim 1640$  kV/m wartości skutecznej, co odpowiada wartości szczytowej (maksymalnej) 2320 kV/m.

Opracowany algorytm zastosowano również do wyznaczenia zależności maksymalnej wartości natężenia pola na powierzchni przewodów roboczych, od odległości przewodów w wiązce. Współzależność tę pokazano na rys.5. Z obliczeń wynika, że otrzymana funkcja współzależności dla przyjętego modelu linii posiada stosunkowo płaskie minimum, zawarte w przedziale,  $a = 0,2 \div 0,3$  wynoszące  $\min_a \max_{\varphi} E_n(\varphi) = 1686$  kV/m.



Rys.5. Zależność maksymalnych wartości natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów od odległości przewodów w wiązce

Fig.5. Dependence of electric field intensity at the conductor surface on the distance of conductors in the bunch

## 5. WNIOSKI

Badania testujące opracowany algorytm wykazały, że dla obliczenia rozkładów natężenia pola na powierzchniach przewodów wystarczy przyjąć po około  $N=20$  elementów podziału jego konturów. W takim przypadku nie obserwuje się żadnych oznak niestabilności rozwiązania. Badania wykazały również, że analityczna postać aproksymowanego potencjału logarytmicznego jest szczególnie przydatna przy badaniu wpływu konfiguracji rozpatrywanych układów na maksymalne wartości natężenia pola na powierzchniach przewodów, jak również w warstwie przy powierzchni ziemi.

## LITERATURA

1. Baron B.: Analiza numeryczna równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pewnej klasy modeli obliczeniowych. ZN Pol. Śl., s. Elektryka z.97, Gliwice 1985.
2. Baron B., Gacek Z.: Problems of Univocal Estimation of Electric Field Intensity Round High Voltage Power Equipment. 8th Internal Symposium on High Voltage Engineering, Yokohama, Japan August 23-27, 1993.



3. Baron B., Grochowicz B.: Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanej na okręgach. ZN. Pol.Śl., s. Elektryka z.152, Gliwice 1996.
4. Baron B.: Metody numeryczne w Turbo Pascalu. Helion, Gliwice 1994.
5. Brebbiec A., Walker S.: Boundary Element Techniques in Engineering Newnes - Butterworthe, London, Boston 1980.
6. Electric and magnetic fields produced by transmission systems. Presentation of the guide prepared by CIGRE WG 36.01, CIGRE Symposium 22.81, Red.233-06, Stockholm 1981.
7. Schwab A.: Field Theory Concepts. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1988.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Skubis, prof. WSI Opole

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 grudnia 1995 r.

#### **Abstract**

Logarithmic potential of the single layer has been used for the analysis of the power line electric field. The solution of the Dirichlet problem for two dimensional Laplace equation has been reduced to the solution of the integral equation with logarithmic potential variable. The shape functions elaborated earlier [3] have been used for digitization of those integral equations (see equation (3)). The algebraic set of linear equations expressing charge density on the surface of the conductors is a result of this digitization. From those densities and from the shape functions electric potential and electric field intensity around electric power lines can be calculated by means of the equations (4) and (5). The analytical results obtained with the use of equation (6) are compared with the numerical results in the table 2. The cylinder - conducting surface system has been used for the tests. The tests of the elaborated algorithm have proved a very high accuracy of the numerical calculations. The example of the results obtained for 400 kV power line at the conductor surface have been shown in the figure 4.