ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: ELEKTRYKA z.152 Nr kol.1324

Edward WILCZYNSKI

POLE CZTEROPOTENCJAŁU ŁADUNKU PUNKTOWEGO

Streszczenie. Tematem artykułu jest dokładne wyprowadzenie pola czteropotencjału jako czteroprędkości ładunku próbnego w przypadku pola elektrostatycznego ładunku punktowego i pola magnetostatycznego prądu elektrycznego przewodu prostoliniowego. Celem pracy jest również podkreślenie atrakcyjności rachunku form zewnętrznych w obliczaniu zagadnień polowych. Ustalono związek funkcji Hamiltona $\mathcal{H}$ (44) ze składową czasową czteroprędkości ładunku próbnego. Praca jest kontynuacją i uzupełnieniem tematu zaprezentowanego w referacie [7].

FOUR-POTENTIAL FIELD OF A POINT CHARGE

Summary. The paper deals with precise derivation of the four-potential field as four-velocity of a sample charge and magnetostatic field of electric current in a rectilinear conductor. The relation between the Hamilton function $\mathcal{H}$ (44) and the space-like part of the four-velocity of the sample charge has been established. The paper also emphasizes the advantages of the calculus of exterior forms in problems concerning the field. The paper elaborates the subject discussed in the presentation [7].

1. PODSTAWY MATEMATYCZNE

Przyjmuje się model czasoprzestrzeni w postaci przestrzeni pseudoeuklidesowej o współrzędnych : $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ oraz przyjętym tensorze Minkowskiego η_{ik} nierównym zeru tylko na przekątnej głównej :

$$\eta_{ik} = \eta^{ik} = (-1, +1, +1, +1). \tag{1}$$

Baza naturalna [6]

$$\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{2}$$

jest identyczna z polami wersorów, tj. wektorów jednostkowych, których długość określamy za pomocą tensora (1) :

$$< \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} >= \eta_{\alpha\alpha} = 1, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{3}$$

$$< \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0} >= \eta_{o,o} = -1. \tag{4}$$

Kwadrat długości wektora kontrawariantnego $\overline{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ (umowa sumacyjna Einsteina), $i = 0, 1, 2, 3$ obliczamy identycznie :

$$< \overline{v}, \overline{v} >=< v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, v^k \frac{\partial}{\partial x^k} >= v^i v^k < \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} >=$$

$$= v^i v^k \eta_{ik} = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^0)^2. \tag{5}$$

Różniczki współrzędnych dx^i stanowią bazę dualną wektorów kowariantnych, czyli tzw. 1-form :

$$\omega = dx^i\, v_i, \qquad i = 0, 1, 2, 3\ . \tag{6}$$

Długość form bazowych dx^i (6) określa iloczyn skalarny zdefiniowany za pomocą składowych kontrawariantnych tensora metrycznego (1) :

$$< dx^i\, , dx^j >= \eta^{ij}. \tag{7}$$

W przestrzeni pseudoeuklidesowej wektor kontrawariantny $\overline{v}$ (5) może być zamiennie opisany za pomocą składowych kowariantnych (6). Większość obiektów fizyki da się przedstawić w postaci tensorów kowariantnych antysymetrycznych, tzw. m-form :

$$\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m} \quad v_{i_1, i_2 \ldots i_m}\ , \tag{8}$$

gdzie : $\wedge$ – operator iloczynu zewnętrznego (antysymetryzacja),
$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}$ – baza m-formy,
$v_{i_1, i_2 \ldots i_m}$ – współrzędne m-formy.

M–forma przestrzeni czterowymiarowej posiada $\binom{4}{m}$, $m \leq 4$, istotnych składowych, czyli 1-forma (np czteroprędkość) ma 4 składowe, 2-forma (np. tensor pola elektromagnetycznego) ma 6 składowych.

Przy przejściu do współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych (najczęściej układ cylindryczny i sferyczny) rezygnujemy z bazy naturalnej i dualnej różniczek współrzędnych. Konstruujemy tzw. bazę ortonormalną e_i oraz dualną bazę σ^i form ortonormalnych [2]. Ortonormalność wymienionych obiektów oznacza, że wektory baz e_i są wersorami, formy σ^i mają długość równą 1 lub -1, tensor metryczny ma identyczne składowe jak we wzorze (1) i zachodzą wzory (3), (4),(7) :

$$< e_i, e_k >= \eta_{ik}, \qquad < \sigma^i, \sigma^k >= \eta^{ik}, \qquad \eta_{ik} = \eta^{ik} = (-1,+1,+1,+1). \tag{9}$$

Przejście z układu prostoliniowego do krzywoliniowego ortogonalnego powoduje zmianę wartości $\eta_{ik}(1)$ tensora metrycznego na przekątnej głównej na wartość g_{ik} oraz przejście z form bazowych (różniczek) dx^i na formy bazowe (różniczki) $d\xi^i$, $< d\xi^i, d\xi^k >= g^{ik}$ Formy bazowe ortonormalne otrzymujemy jako iloczyn współczynników Lamego [3] i bazy $d\xi^i$:

$$\sigma^i = h^i \, d\xi^i, \qquad h^i = \sqrt{g_{ii}}, \tag{10}$$

gdzie h^i - współczynniki Lamego.

W powyższym wzorze oczywiście nie obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina. Dla bazy σ^i można zdefiniować poprzez wzory (9) tensor metryczny $\eta_{ik}(1)$ identyczny jak dla układu prostoliniowego. Operacja przejścia z bazy $d\xi^i$ do σ^i (tak samo jak z bazy $\frac{\partial}{\partial \xi^i}$ do e_i – wzory (46)) jest możliwa dla układów współrzędnych ortogonalnych.

Różniczkowanie pól wektorowych $\overline{v}$ i tensorowych $\overline{t}$

$$\overline{v} = v^i e_i, \qquad \overline{t} = t^{i_1,i_2 \dots i_m} e_1 \otimes \dots \otimes e_m \tag{11}$$

w układach krzywoliniowych wymaga obliczenia koneksji [6, 7]. Symbol $\otimes$ oznacza operator iloczynu tensorowego, a wyrażenie $e_1 \otimes \dots \otimes e_m$ jest bazą tensora. Koneksja znika w bazach (2),(6) układu współrzędnych prostoliniowego. Natomiast różniczkowanie odpowiedniej formy

$$\omega = \sigma^i v_i, \qquad \tau = \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_m} t_{i_1,i_2 \dots i_m} \tag{12}$$

w układzie krzywoliniowym można wykonać bez znajomości koneksji. Ta własność form oraz mała ilość składowych wieloform wskazują na ich dużą atrakcyjność w aplikacjach.

Operatory gradientu, dywergencji, laplasjanu tworzy się z m-form, m ≤ 4 za pomocą operatora Hodge'a $*$ [3, 2], który w przestrzeni 4–wymiarowej zamienia m-formę na (4–m)-formę. W obliczeniach nie jest potrzebny wzór na operator $*$ dla dowolnej m-formy τ (12). Wystarczy znać odpowiedni wzór przekształcający formy bazowe (bazę m-formy) :

$$* \ \sigma^{i_1 i_2 \dots i_m} = \frac{1}{(4-m)!} \eta^{i_1 k_1} \eta^{i_2 k_2} \dots \eta^{i_m k_m} e_{k_1 \dots k_m k_{m+1} \dots k_4} \sigma^{k_{m+1} \dots k_4}, \tag{13}$$

gdzie tensor zupełnie antysymetryczny e_{ijkl} przyjmuje wyłącznie wartości $+1, -1$ i 0 (0 – gdy jakiekolwiek dwie wartości wskaźników i, j, k, l są sobie równe, -1 – gdy wszystkie są różne między sobą i są parzystą permutacją ciągu 0123, 1 – gdy są nieparzystą permutacją ciągu 0123, np.: $e_{0123} = -e_{1023} = -1$, $e^{0123} = 1$). We wzorze (13) przyjęto następujące oznaczenie bazy m-formy τ (12) :

$$\sigma^{i_1 i_2 \dots i_m} = \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_m}. \tag{14}$$

Tensor e^{ijkl} uzyskujemy poprzez nasunięcie na jego składowe kowariantne tensora metrycznego η^{ik} (1),(9). Nasunięcie tensora e_{ijkl} na siebie względem wskaźników $m+1, \ldots, 4$ daje następujące wzory :

$$e_{i_1 \ldots i_m i_{m+1} \ldots i_4} e^{k_1 \ldots k_m i_{m+1} \ldots i_4} = -(4-m)! \begin{vmatrix} \delta^{k_1}_{i_1} & \ldots & \delta^{k_1}_{i_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{k_m}_{i_1} & \ldots & \delta^{k_m}_{i_m} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

gdzie symbol δ^k_i oznacza deltę Kroneckera.

Przykładowo ze wzorów (13),(15) wynikają tożsamości :

$$e_{abij} e^{cdij} = 2(\delta^d_a \delta^c_b - \delta^c_a \delta^d_b),$$

$$*\sigma^0 = \sigma^{123}, \qquad *\sigma^{123} = \sigma^0, \qquad *\sigma^{023} = \sigma^1, \tag{16}$$

$$*\sigma^{01} = \sigma^{23}, \qquad *\sigma^{12} = \sigma^{30}, \qquad *\sigma^{23} = \sigma^{10}, \qquad *(*\sigma^0) = \sigma^0. \tag{17}$$

Cyfra zero oznacza współrzędną czasową, natomiast 1,2,3 - współrzędne przestrzenne. Za pomocą operatora (13) oblicza się iloczyn skalarny (9) form bazowych lub ogólnie form (12) :

$$< \sigma^i, \sigma^k >= - * [\sigma^i \wedge (*\sigma^k)] = \eta^{ik}. \tag{18}$$

Różniczkowanie form (12) nazywamy różniczkowaniem zewnętrznym i oznaczamy symbolem d :

$$d\tau = d\left(\sigma^{i_1 i_2 \ldots i_m} t_{i_1, i_2 \ldots i_m}\right) =$$

$$= \left(d\sigma^{i_1 i_2 \ldots i_m}\right) t_{i_1, i_2 \ldots i_m} + (-1)^m \sigma^{i_1 i_2 \ldots i_m} \wedge \left(\frac{\sigma^k}{h^k}\right) \partial_k t_{i_1, i_2 \ldots i_m}, \tag{19}$$

gdzie $\partial_k t$ jest pochodną cząstkową, a różniczka zewnętrzna bazy m-formy ma postać :

$$d\sigma^{i_1 i_2 \ldots i_m} = d\left(h^{i_1} h^{i_2} \ldots h^{i_m} d\xi^{i_1} \wedge d\xi^{i_2} \wedge \ldots \wedge d\xi^{i_m}\right) =$$

$$= \partial_k \left(h^{i_1} h^{i_2} \ldots h^{i_m}\right) d\xi^k \wedge d\xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\xi^{i_m} \left(\frac{h^k h^{i_1} \ldots h^{i_m}}{h^k h^{i_1} \ldots h^{i_m}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial_k (h^{i_1} h^{i_2} \ldots h^{i_m})}{h^k h^{i_1} \ldots h^{i_m}}\right) \sigma^{k i_1 \ldots i_m}. \tag{20}$$

Do wyprowadzenia powyższej zależności wykorzystano wzór (10), wiążący ze sobą bazę σ^k i różniczkę współrzędnej ξ^k. Dla wielkości znajdujących się wewnątrz nawiasów "()" wzoru (20), w których powtarza się indeks k, nie obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina. Operator d przekształca m-formę na (m+1)-formę.

Dwukrotne różniczkowanie dd daje formę zerową :

$$d(d\tau) \equiv 0. \tag{21}$$

Różniczkowanie skalara κ (0-formy) jest tożsame z operacją gradientu $Grad$:

$$Grad(\kappa) = d\kappa = \partial_i \kappa \; d\xi^i = \left(\frac{1}{h^i} \partial_i \kappa\right) (h^i d\xi^i) = \left(\frac{\partial_i \kappa}{h^i}\right) \sigma^i = g_i \, \sigma^i, \tag{22}$$

gdzie współrzędne wektora $g_k = \left(\frac{\partial_k \kappa}{h^k}\right)$ określają współrzędne gradientu (jak i powstalej z różniczkowania 1-formy). We wzorze (22) dla wielkości ujętych w nawiasy "()" nie obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina.

Skojarzenie operatorów d (19) oraz $*$ (13) tworzy dywergencję Dyw oraz laplasjan Lap 1-formy ω (12) [2, 3] :

$$Dyw(\omega) = *[d(*\omega)], \tag{23}$$

$$Lap(\omega) = d\ Dyw(\omega) + *d[*d\omega]. \tag{24}$$

Różniczkowanie m-form (12), 0<m≤4 tworzy tensory rotacji Rot, np.: we wzorze (24) :

$$Rot(\omega) = *d\omega. \tag{25}$$

Można przyjąć że rotacja jest formą $d\omega$. Czasem korzystniej jest obliczać jej składowe w "ko-przestrzeni"(25), np. w celu obliczenia laplasjanu (24). Jak widać, $Grad$ i Lap są 1-formami, Dyw – 0-formą (skalarem), natomiast Rot – 2-formą (w przestrzeni 4–wymiarowej dla skalara κ i 1-formy ω).

Podstawiając do wzoru (24) zamiast 1-formy ω (12) skalar κ (22) otrzymujemy 0-formę laplasjanu :

$$Lap(\kappa) = *d[*d\kappa] = *d[*Grad(\kappa)]. \tag{26}$$

Należy zauważyć, że powyższe wzory nie zmieniają postaci w różnych układach krzywoliniowych.

2. POLE CZTEROPOTENCJALU LADUNKU PUNKTOWEGO JAKO CZTEROPRĘDKOŚĆ LADUNKU PRÓBNEGO

W ukladzie współrzędnych sferycznych ct, r, φ, θ ladunek punktowy Q umieszczony jest w początku ukladu współrzędnych. Jego czteropotencjal można opisać za pomocą czteroprędkości ω (12) (znormalizowana 1-forma [7]) o składowych w kierunku osi czasu ct i promienia r :

$$\omega = \sigma^i v_i = \sigma^0 v_t + \sigma^1 v_r, \tag{27}$$

gdzie $< \omega, \omega > = < \sigma^i v_i, \sigma^k v_k > = v_i v_k \eta^{ik} = (v_r)^2 - (v_t)^2 = -1$ – wzory (9),(18)

$v_i = (v_t, v_r, v_\varphi, v_\theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0\right)$,

$$v = \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}, \tag{28}$$

v - prędkość cząstki próbnej o ladunku q,

$$\sigma^0 = c\,dt, \qquad \sigma^1 = dr, \qquad \sigma^2 = r\ \sin\theta\ d\varphi, \qquad \sigma^3 = r\ d\theta. \tag{29}$$

Wzory (29) są oczywiście tożsame z zależnością (10).

Prędkość v (28) zależy wyłącznie od odległości r od centrum źródla pola. Wielkości v_t, v_r, v obliczymy z równań Maxwella wyrażonych w funkcji czteropotencjału ω (27) [3, 2, 7] :

$$d(d\omega) = 0, \tag{30}$$

$$* \, d[*d\omega] = 0. \tag{31}$$

Wzór (30) jest tożsamością (21), natomiast równanie (31) jest jednorodne ze względu na pustą przestrzeń wokół ładunku.

Jeżeli zastosujemy cechowanie Lorentza czteropotencjału $\omega \longrightarrow \omega'$ takie że $Dyw(\omega') = 0$ (wzór 23), to równanie Maxwella (31) przejdzie w klasyczną postać (24) :

$$Lap(\omega') = 0. \tag{32}$$

Wykonując wszystkie operacje równania (31) dla formy ω (27) otrzymujemy po kolei (przy wykorzystaniu zależności (16),(17),(19)) :

$$\begin{gathered} d\omega = d(\sigma^0 v_t + \sigma^1 v_r) = d(\sigma^0 v_t) = -\sigma^{01}\, \partial_r v_t\,, \\ * \, d\omega = -(*\sigma^{01})\, \partial_r v_t = -\sigma^{23}\, \partial_r v_t = \sigma^{32}\, \partial_r v_t\,, \\ d(*d\omega) = d(\sigma^{32})\, \partial_r v_t + \sigma^{321}\, \partial_r \partial_r v_t\,, \\ d(\sigma^{32}) = d(r^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi) = 2r \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \\ = \frac{2}{r}\,(dr)\,(r\, d\theta)\,(r \sin\theta\, d\varphi) = \frac{2}{r}\,\sigma^{132} = \frac{2}{r}\,\sigma^{321}\,, \\ d(*d\omega) = \sigma^{321}\left(\frac{2}{r}\,\partial_r v_t + \partial_r\partial_r v_t\right), \\ * \, d(*d\omega) = \sigma^{0}\left(\frac{2}{r}\,\partial_r v_t + \partial_r\partial_r v_t\right) = 0. \end{gathered} \tag{33, 34}$$

Przyrównując do zera formę (34) otrzymujemy równanie różniczkowe 2 rzędu z funkcją v_t, z następującym rozwiązaniem :

$$v_t = C_o \pm \frac{r_o}{r}. \tag{35}$$

Stałe C_o i r_o przyjęte tak jak we wzorze (35) dają gwarancję, że zachodzi nierówność $0 \le v \le 1$ dla funkcji $v(28)$. Znak plus występuje, gdy ładunek próbny q ma znak przeciwny do ładunku Q źródła pola, a minus, gdy ładunki mają zgodne znaki. W pierwszym przypadku prędkość $v(28)$ obliczona z funkcji v_t (35)

$$v_t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 1 + \frac{r_o}{r}, \qquad C_o = 1,\; r_o > 0 \tag{36}$$

wynosi :

$$v = \sqrt{\frac{r_o}{r}}\;\frac{\sqrt{2+\frac{r_o}{r}}}{1+\frac{r_o}{r}} = \sqrt{r_o}\;\frac{\sqrt{2r+r_o}}{r+r_o}. \tag{37}$$

Porównując siły obu stron równania ruchu Lorenza można otrzymać wyrażenie na promień r_o występujący we wzorach (35), (36),(37) [7] :

$$r_o = \frac{|Q\, q|}{4\pi\varepsilon_o m\, c^2}\,, \tag{38}$$

gdzie : m – masa ładunku q,
$\varepsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m – przenikalność elektryczna próżni.

Ze wzoru (37) wynika, że ładunek q, przeciwnego znaku niż ładunek źródłowy Q, startuje z prędkością $v(\infty) = 0$ i osiąga prędkość światła $v(0) = 1$ w punkcie spotkania się z ładunkiem Q. Wynik ten jest zgodny ze wzorami ruchu ładunku wyznaczonymi z równania Lorentza lub odpowiedniego równania Hamiltona - Jacobiego. W pewnym sensie wynik ten jest zgodny również z doświadczeniem, bo po spotkaniu się ładunków następuje ich anihilacja, czyli rzeczywiście osiągnięcie przez nie prędkości światła.

Czteropotencjał ω (27) pomnożony przez mc staje się czteropędem ładunku q :

$$p_i = m c v_i. \tag{39}$$

Jego składowa czasowa jest energią E_q cząstki q podzieloną przez prędkość światła :

$$\frac{E_q}{c} = m c v_t = m c \left(1 + \frac{|Q\, q|}{4\pi\varepsilon_o m\, c^2}\,\frac{1}{r}\right), \tag{40}$$

$$E_q = m c^2 + |q|\,\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_o r} = m c^2 - q\,\psi\,, \tag{41}$$

gdzie : $\psi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$ – potencjał skalarny ładunku punktowego,
q, Q – ładunki przeciwnego znaku.

Ze wzoru (41) wynika proporcjonalność energii cząstki próbnej do potencjału skalarnego (z uwzględnieniem stałej energii spoczynkowej $m c^2$), a więc znana dotychczas interpretacja potencjału skalarnego ψ. W artykule rozszerza się taką interpretację na cały czteropotencjał, wiążąc go z czteropędem (39) cząstki q i prędkością ω (27). Utożsamienie czteropotencjału pola elektromagnetycznego ω (30),(31) z prędkością ω (27) jest uogólnieniem interpretacji fizycznej potencjału skalarnego ψ (41), często powtarzanej w różnych monografiach z teorii pola elektromagnetycznego.

Natężenie pola elektrycznego obliczamy jako rotację (25), (33) pola (27) :

$$Rot(\omega) = \sigma^{32}\,\frac{r_o}{r^2} = \sigma^{32}\,\beta\frac{E}{c}\,, \tag{42}$$

gdzie : $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left[\frac{V}{m}\right]$ – natężenie pola elektrycznego w jednostkach SI,
$\beta = \frac{q}{m\,c}$ – stała związana z ładunkiem próbnym [7],
$\frac{1}{c}\beta\, E\left[\frac{1}{m}\right]$ – natężenie pola elektrycznego w jednostkach [1/m].

Wychodząc z całki działania dla cząstki q w polu elektromagnetycznym [4, str.60] formułuje się pęd uogólniony P i funkcję Hamiltona $\mathcal{H}$ reprezentującą całkowitą energię cząstki :

$$\mathcal{H} = \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 - v^2}} + q\,\psi, \tag{43}$$

gdzie: ψ – potencjał skalarny (41), v – prędkość (28).
Powstaje pytanie : Jaki związek łączy funkcje E_q i $\mathcal{H}$?
Trzeba przyjąć zależności (28),(36), (40),(41) :

$$\mathcal{H} - q\psi = E_q = \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 - v^2}} = m c^2 - q\psi, \tag{44}$$

z których wynika niezmienność funkcji Hamiltona $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = m\, c^2. \tag{45}$$

Powyższe związki wynikają z odpowiedniego relatywistycznego równania Hamiltona - Jacobiego, [5, str.372] i są zgodne z postulatem zachowania energii $\mathcal{H}$ ładunku poruszającego się swobodnie w stałym polu elektromagnetycznym [4, str.66].

Należy zauważyć, że część czasowa czteroprędkości traktowanej jako czteropotencjał pola powinna być proporcjonalna do energii E_q (41),(44) a nie do całkowitej energii cząstki $\mathcal{H}$ (w skład energii $\mathcal{H}$ wchodzi jej część mechaniczna nie mająca wpływu na pole elektromagnetyczne).

W polu magnetostatycznym mamy podobne zjawisko ($E_q = \mathcal{H}$ - następny punkt pracy).

3. TOR ŁADUNKU PRÓBNEGO W POLU PRZEWODU PROSTOLINIOWEGO Z PRĄDEM

W tej części pracy postąpimy odwrotnie w porównaniu z poprzednią. Założymy, że jest znany czteropotencjał pola elektromagnetycznego wokół przewodu z prądem. Następnie bezpośrednio z potencjału obliczymy pole czteroprędkości ładunków próbnych wokół przewodu. Jest to zarazem propozycja zastosowania w aplikacjach obliczeń toru cząstek naładowanych metodą "normalizacji" czteropotencjału, bo tak obrazowo można nazwać przedstawione w pracy wyniki.

Przyjmujemy układ współrzędnych cylindrycznych ct, r, φ, z z bazą ortonormalną e_i (nie obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina) :

$$e_i = h_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = (e_0, e_1, e_2, e_3) = (\overline{1}_t, \overline{1}_r, \overline{1}_\varphi, \overline{1}_z) , \tag{46}$$

gdzie : $h_i = \sqrt{g^{ii}}$ – współczynniki Lamego,

$\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ – baza naturalna,

$\xi_i = (ct, r, \varphi, z)$.

Jest to baza dualna do bazy różniczek (10) :

$$\sigma^i = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (c\,dt, dr, r\,d\varphi, dz).$$

Obie bazy spełniają równania (9). Wektory prawej strony wzoru (46) nazywamy wersorami (w klasycznej analizie wektorowej).

Zakładamy, że oś przewodu pokrywa się z osią z. Jego promień wynosi R, wewnątrz płynie prąd elektryczny o stałym rozkładzie gęstości j_z :

$$\overline{j} = j_z \overline{1}_z. \tag{47}$$

Rozkład potencjału wektorowego $\overline{A}$ i indukcji elektromagnetycznej $\overline{B}$ [3, str.32] w przestrzeni jest następujący :

a) $0 \le r \le R$

$$\overline{A}_1 = -\frac{1}{4}\mu_o j_z r^2 \overline{1}_z = A_1 \overline{1}_z , \tag{48}$$

$$\overline{B}_1 = |-\partial_r A_1| \overline{1}_\varphi = \frac{1}{2} j_z \mu_o r \overline{1}_\varphi = B_1 \overline{1}_\varphi , \tag{49}$$

b) $R \leq r < \infty$

$$\overline{A}_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{R}\right)\mu_o j_z R^2\,\overline{1}_z = A_2\,\overline{1}_z\,, \tag{50}$$

$$\overline{B}_2 = |-\partial_r A_2|\,\overline{1}_\varphi = \frac{1}{2}j_z\mu_o R^2\frac{1}{r}\,\overline{1}_\varphi = B_2\,\overline{1}_\varphi\,. \tag{51}$$

Zakładamy, że chcemy określić tory cząstek naładowanych poruszających się swobodnie w płaszczyźnie (r, z) dla $r \geq R$. Należy więc założyć dodatkowo, że energia cząstek E_q nie ulegnie zmianie w trakcie ruchu :

$$E_q = m\,c^2 + \frac{m\,v^2}{2} = \text{const}\,, \tag{52}$$

gdzie : $v = \frac{\sqrt{(dr)^2+(dz)^2}}{dt}$ – prędkość cząstek,
c – prędkość światła, m – masa pojedynczej cząstki q.

Zakładamy, że można pominąć potencjał skalarny pola elektromagnetycznego ($E_q = \mathcal{H}$ – wzór (44)). Prędkość ruchu cząstek v(52) jest stała i przyjęta z góry, a więc jest również znana ich energia E_q.

Szukane pole torów ładunków próbnych jest czteroprędkością, której składowa w kierunku osi z βA_2 jest proporcjonalna do potencjału wektorowego A_2 (50), a składowa czasowa $\frac{1}{qc}\beta E_q$ jest proporcjonalna do energii cząstek ($\beta = \frac{q}{mc}$ - stała [7]) :

$$v^i = \left(\frac{\beta}{qc}E_q,\ v^r,\ 0,\ \beta A_2\right). \tag{53}$$

Składowa v^r w kierunku promienia r wynika z warunku normalizacji czteroprędkości :

$$v^i\,v^k\,\eta_{ik} = -1 = -\left(\frac{\beta}{q\,c}E_q\right)^2 + (v^r)^2 + (\beta\,A_2)^2. \tag{54}$$

Z powyższego równania i wzoru (50) obliczamy składową v^r prędkości cząstek :

$$v^r = \sqrt{\left(\frac{\beta}{q\,c}E_q\right)^2 - 1 - \beta\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{r}{R}\right)^2\mu_o^2 j_z^2 R^4}. \tag{55}$$

Prędkość v(52) spełnia wzory :

$$\frac{v}{c} = \sqrt{(v^r)^2 + (\beta\,A_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\beta}{q\,c}E_q\right)^2 - 1} = \text{const}. \tag{56}$$

Tor ruchu $z(r)$ obliczamy z równania różniczkowego:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{v^z}{v^r} = \frac{\beta A_2}{\sqrt{\left(\frac{\beta}{qc}E_q\right)^2 - 1 - (\beta A_2)^2}} = f(r)\,, \tag{57}$$

$$z(r) = \int f(r)\,dr. \tag{58}$$

Dokonując linearyzacji funkcji $\ln \frac{r}{R}$ w pobliżu powierzchni przewodnika ($r \cong R$) można obliczyć całkę (58) i przekonać się, że tor ruchu cząstki ma kształt okręgu o promieniu R_t rosnącym wraz z energią E_q cząstki :

$$R_t = \frac{2\,v}{\mu_o\, j_z\, R\,\beta\, c}. \tag{59}$$

Oczywiście, wynik jest przybliżony ze względu na wspomnianą linearyzację (dlatego dotyczy części toru w pobliżu przewodnika). Środek okręgu leży w odległości $R/2$ od osi przewodnika (przedstawione rozwiązanie ma sens o ile $R_t \cong R/2$).

Równanie (57) daje wiele różnych wyników zależnych od przyjętych wartości początkowych rozważanego toru.

4. PODSUMOWANIE

Znajomość czteropotencjału pola wystarczy do bezpośredniego sformułowania równania różniczkowego (57) torów cząstek (prądu) poruszających się swobodnie i wykonania odpowiedniego całkowania (58). Chodzi w tym przypadku o prąd cząstek naładowanych, który ma niewielki wpływ na sumaryczne pole elektromagnetyczne. Uwzględnienie tego prądu w rozkładzie pola jest możliwe pod warunkiem ustalenia jego ilościowego przestrzennego rozkładu. Ale wtedy musimy z góry założyć, że znamy tory cząstek. Powstaje w ten sposób nowy problem do rozwiązania : generacja pola elektromagnetycznego przez cząstki naładowane poruszające się swobodnie w zadanym polu, których tory (a więc i prąd elektryczny) wynikają z sumarycznego pola. Zagadnienie to już nie może być tematem tej pracy, tym niemniej wydaje się być atrakcyjne w zastosowaniach przemysłowych. Wiąże się ono z siłą samoodziaływania cząstek [4, 5].

Uogólnienie interpretacji fizycznej czteropotencjału przedstawione w niniejszej pracy przyczynia się do pełniejszego zrozumienia natury pola elektromagnetycznego.

W świetle uzyskanych wyników wydaje się być prostsze rozwiązywanie zagadnień odwrotnych elektrodynamiki, w których z góry znamy tory cząstek naładowanych, a chcemy obliczyć pole. Można przyjąć, że czteropotencjal pola jest od razu równy czteroprędkości tych cząstek.

Zastosowanie rachunku form zewnętrznych do najprostszego zagadnienia elektrostatyki może sprawiać wrażenie niepotrzebnego komplikowania obliczeń. Ale ten rachunek tak samo wygląda w zastosowaniu do ogólnych zagadnień teorii pola elektromagnetycznego (w różnych układach krzywoliniowych). W tym sensie praca niniejsza jest propozycją stosowania w aplikacjach rachunku m-form i wstępem do dalszych prac autora z zastosowaniem tego typu obliczeń.

LITERATURA

1. Brodzki M.: Wstęp do teorii pola elektromagnetycznego w ujęciu geometrycznym. Skrypt Pol. Śląskiej nr 1553, Gliwice 1991.

2. Flanders H.: Teoria form różniczkowych. PWN, Warszawa 1969.

3. Ingarden R.S., Jamiołkowski A.: Elektrodynamika klasyczna. PWN, Warszawa 1980.

4. Landau L.D., Lifszyc E.M.: Teoria Pola. PWN, Warszawa 1977.

5. Suffczyński M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.

6. Radziszewski K.: Wstęp do współczesnej geometrii różniczkowej. PWN, Warszawa 1973.

7. Wilczyński E.: Geometryzacja postaci pól i równań elektrodynamiki w próżni. XVIII Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO '95, Gliwice - Ustroń 1995.

Recenzent: Dr hab. inż Paweł ZIMNY,
prof. Politechniki Gdańskiej

Wpłynęło do Redakcji dnia 21 listopada 1995 r.

Abstract

The paper elaborates the subject discussed in the presentation [7]. The paper as well as the presentation concentrate on the notion of the four-potential class of the electromagnetic field which is also the four-velocity of small sample charges. Their movement proves that the field exists.
The presentation [7] mainly dealt with proving the existence of such a four-potential class, whereas this paper focuses on the calculus of exterior forms and specific calculations in a more detailed way. If the results are presented by means of m-forms, it is easier to show clearly the applications of the idea of the four-potential class as the four-velocity of loaded particles.
The calculations have been made for the Coulomb field of a point charge and the field. of a rectilinear conductor with direct current. In the first case the proper class of the four-potential (four-velocity) has been obtained by solving Maxwell equations, whereas the second case is based on the assumption that the distribution of the field of the vector potential in space is known and, as a consequence, the four-potential class (the four-velocity class of the loaded particles) has been obtained by integration.
The relation between the Hamilton function $\mathcal{H}$ (44) and the space-like part of the four-velocity of the sample charge has been established.
The paper can be regarded as an introduction to the following subjects:
a) the formulation and calculation of some reverse problems in electrodynamics,
b) the calculation of the density distribution of electric current of free loaded particles if they contribute to the total electromagnetic field.