ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2007
Seria: BUDOWNICTWO z. 111 Nr kol. 1756

Stanisław MAJEWSKI, Rafał KRZYWOŃ, Leszek SZOJDA, Grzegorz WANDZIK
Katedra Inżynierii Budowlanej
Politechnika Śląska

# SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNY MODEL MATERIAŁÓW GEOLOGICZNYCH

**Streszczenie.** Opisano prosty sprężysto-plastyczny model materiałowy, wzorowany na wcześniejszych modelach dla betonu opracowanych przez Willama i Warnke (1974) oraz Chena (1991). W artykule przedstawiono autorskie uogólnienie modelu na inne materiały określane ogólną nazwą materiałów geologicznych lub krótko geomateriałów. Zaproponowany matematyczny opis zachowania materiału należy zakwalifikować do modeli uproszczonych, które umożliwiają jednak bardziej realistyczny opis zachowania konstrukcji w trójwymiarowej przestrzeni, w porównaniu z wynikami otrzymywanymi w analizach wykorzystujących modele sprężyste.

# ELASTO-PLASTIC MODEL FOR GEOMATERIALS

**Summary.** A simple, elasto-plastic material model for geological media is presented further on. It is based on the model, which was proposed for concrete by Willam and Warnke (1974), Chen (1991). In this paper, its' generalization for other geological materials is presented. Thus it is not enhanced model in the area of material modelling, but just an engineering proposal, which makes possible a little more realistic analysis of complex 3-D structural systems than the simplified, linearly elastic models do.

## 1. Materiały geologiczne

Pomimo zewnętrznych różnic takich materiałów konstrukcyjnych, jak beton, zaprawy cementowe, skały zwięzłe, ceramika budowlana oraz grunty, istnieje możliwość opisania ich zachowania w warunkach stanu naprężenia za pomocą wspólnego modelu materiałowego. Z tego względu wszystkie te materiały określa się jako materiały geologiczne lub krótko geomateriały. Zdefiniowanie wspólnego modelu materiałowego dla tych materiałów w istotny sposób wpływa na efektywność algorytmu obliczeniowego złożonych zagadnień mechaniki konstrukcji. Dotyczy to zwłaszcza problemów współpracy budowli z podłożem, których

złożoność sprawia, że przy ich analizie w użyciu wciąż jest liniowo sprężysty model materiałowy zarówno w odniesieniu do materiałów konstrukcji, jak i do gruntu.

Możliwość dokładniejszej analizy tych zagadnień stwarzają metody numeryczne (MES), pod warunkiem że zachowanie materiałów jest opisane za pomocą realistycznego modelu materiałowego. W dalszym ciągu zostanie przedstawiony prosty, sprężysto-plastyczny model zachowania materiałów geologicznych w warunkach złożonego stanu naprężenia. Model ten został pierwotnie zaproponowany dla betonu [1], [2], w niniejszej pracy zostanie przedstawione jego uogólnienie na inne materiały, które ze względu na podobieństwo kryterium zniszczenia bywają określane jako materiały geologiczne.

Nie jest przypadkiem, że niniejszy referat został przygotowany na sesję naukową z okazji jubileuszu profesora Macieja Gryczmańskiego. Wszyscy autorzy niniejszego referatu zajmują się w swej pracy naukowej głównie betonem, jednakże to właśnie seminarium naukowe profesora Gryczmańskiego, które zorganizował on w roku 1995, po swoim powrocie na macierzysty Wydział Budownictwa Politechniki Śląskiej, stanowiło inspirację do spojrzenia na mechanikę betonu z pozycji opisu wykraczającego poza założenia modelu liniowo sprężystego i ograniczenia wynikające z pomijania oczywistego faktu, że świat, w którym żyjemy, jest co najmniej trójwymiarowy, a stany naprężenia i odkształcenia są opisywane za pomocą sześciu i więcej składowych.

## 2. Model materiałowy betonu MWW3

### 2.1. Ogólna charakterystyka modelu

Proponowany model jest sprężysto-plastycznym modelem ze stowarzyszonym, izotropowym prawem wzmocnienia i osłabienia. Podstawą opisu takiego modelu jest zdefiniowanie powierzchni ograniczającej, określającej kryterium zniszczenia materiału. Pierwowzorem powierzchni zniszczenia modelu MWW3 jest analogiczna powierzchnia trójparametrowego modelu Willama-Warnke [3], w którym prostoliniowy południk rozciągania powierzchni granicznej przechodzi przez punkty odpowiadające wytrzymałości betonu na jednoosiowe rozciąganie $f_t$ i równomierne, dwuosiowe ściskanie $f_{cc}$, a południk ściskania przez odpowiadający wytrzymałości betonu na jednoosiowe ściskanie $f_c$ oraz punkt przecięcia południka rozciągania z osią naprężeń średnich $f_m$.

W przestrzeni naprężeń, określonej przez naprężenie średnie $\sigma_m$, styczne naprężenie oktaedryczne $\tau_{okt}$ oraz kąt Lodego $\Theta$, równanie powierzchni granicznej modelu WW ma postać:

$$\frac{(m_{cc}-m_t)}{m_{cc}m_t}r_{(\Theta)}\sigma_m+\tau_{okt}\sqrt{\frac{3}{5}}-r_{(\Theta)}f_c=0 \tag{1}$$

Południk rozciągania ($\Theta = 0 \pm 2\pi/3$) jest linią prostą o równaniu:

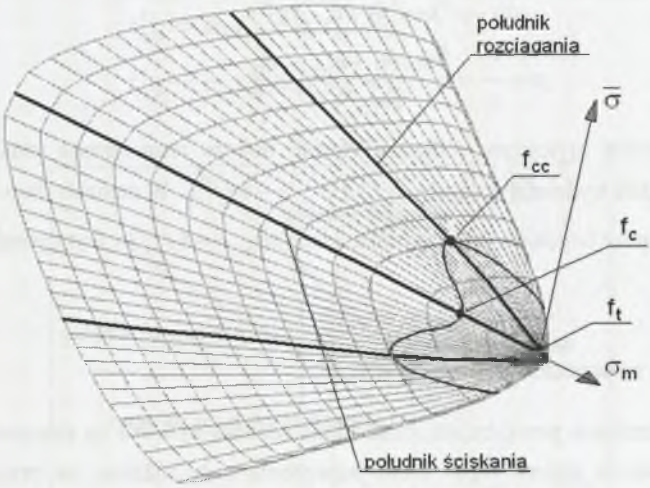
$$\frac{(m_{cc} - m_t)\sqrt{2}}{2m_{cc} + m_t}\sigma_m + \tau_{okt} - \frac{f_c m_{cc} m_t \sqrt{2}}{2m_{cc} + m_t} = 0 \tag{2}$$

Równanie południka ściskania ($\Theta = \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3}$) ma postać:

$$\frac{(m_{cc} - m_t)\sqrt{2}}{3m_{cc}m_t + m_{cc} - m_t}\sigma_m + \tau_{okt} - \frac{f_c m_{cc} m_t \sqrt{2}}{3m_{cc}m_t + m_{cc} - m_t} = 0 \tag{3}$$

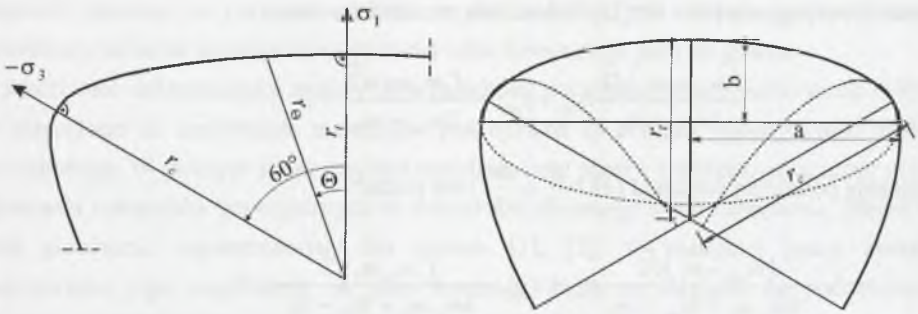
W równaniach tych: $m_t = f_t / f_c$, $m_{cc} = f_{cc} / f_c$.

Trójwymiarowy widok powierzchni granicznej modelu MWW3 w przestrzeni naprężeń pokazano na rysunku 1.




Rys. 1. Powierzchnia zniszczenia modelu MWW3 w przestrzeni naprężeń
Fig. 1. Failure surface of the model MWW3 in stress space

Kształt przekroju dewiatorowego powierzchni zniszczenia, Willam i Warnke aproksymowali za pomocą trzech wzajemnie stycznych elips (rys. 2).




Rys. 2. Aproksymacja eliptyczna przekroju dewiatorowego powierzchni zniszczenia
Fig. 2. Elliptical approximation of the deviatoric section of the failure surface

$$r_\Theta = r_c \rho_{(\Theta)}$$
$$\rho_{(\Theta)} = \frac{2(1-\rho^2)\cos\Theta + (2\rho - 1)\sqrt{4(1-\rho^2)\cos^2\Theta + 5\rho^2 - 4\rho}}{4(1-\rho^2)\cos^2\Theta + (1-2\rho)^2}, \tag{4}$$
$$\rho = \frac{r_t}{r_c} = \frac{3m_{cc}m_t + m_{cc} - m_t}{2m_{cc} + m_t}$$

Trójparametrowe kryterium Willama-Warnke dobrze reprezentuje zniszczenie betonu w zakresie naprężeń hydrostatycznych $f_t/3 \geq \sigma_m \geq -4f_c/3$. W stanach dwu- i trójosiowego rozciągania oraz przy trójosiowym ściskaniu, kiedy $\sigma_m < -4f_c/3$, wytrzymałość betonu jest przeszacowana.

## 2.2. Kryterium zniszczenia modelu MWW3

Podstawą określenia powierzchni zniszczenia modelu MWW3 są również wyniki badań betonu w warunkach trójosiowego stanu naprężenia z tą różnicą, że przyjęto odmienną metodę wyznaczenia równań tej powierzchni. Przyjęto następujący tok postępowania:

1. Dla południka rozciągania poszukujemy najlepszej, prostoliniowej aproksymacji wszystkich wyników badań usytuowanych wzdłuż tego południka z dodatkowym wymaganiem, by południk ten przechodził przez punkt, odpowiadający wytrzymałości na równomierne dwuosiowe ściskanie. Aproksymacja dostępnych w literaturze [4] wyników badań oraz badań własnych daje:

$$t_o^t = \frac{\tau_{okt}}{f_c} = -0{,}47 s_m + 0{,}185 \quad \text{dla} \quad s_m = \frac{\sigma_m}{f_c} \tag{5}$$

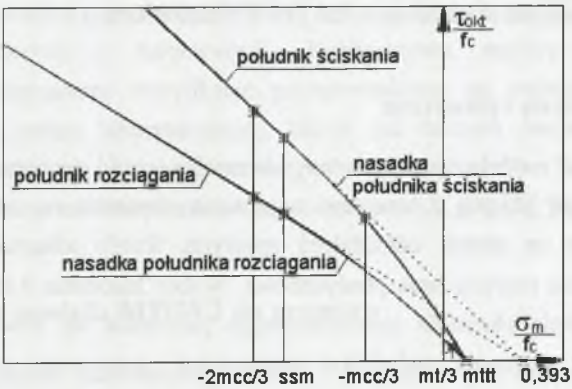
2. Dla południka ściskania również poszukujemy najlepszej, liniowej aproksymacji wyników badań z dodatkowym warunkiem, by przecinał on oś naprężeń średnich w tym samym punkcie, co wyznaczony uprzednio południk rozciągania. Na podstawie wspomnianych wyżej wyników badań otrzymamy:

$$t_o^c = \frac{\tau_{okt}^c}{f_c} = -0{,}713 s_m + 0{,}28 \quad \text{dla} \quad s_m = \frac{\sigma_m}{f_c} \tag{6}$$

Dla obydwu południków uzyskany wynik dobrze reprezentuje wytrzymałość betonu dla $\sigma_m \leq -2f_{cc}/3$ i niezadowalająco w strefie mniejszych naprężeń ściskających i w strefie rozciągania. Dla poprawienia reprezentacji w tym obszarze konstruujemy nasadkę (rys. 3), której paraboliczne południki są styczne do odpowiednich południków wyznaczonej według punktów 1 i 2 powierzchni, a ponadto:

- południk rozciągania powinien przechodzić przez punkt odpowiadający wytrzymałości na jednoosiowe rozciąganie,
- południk ściskania powinien przechodzić przez punkt odpowiadający wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie.

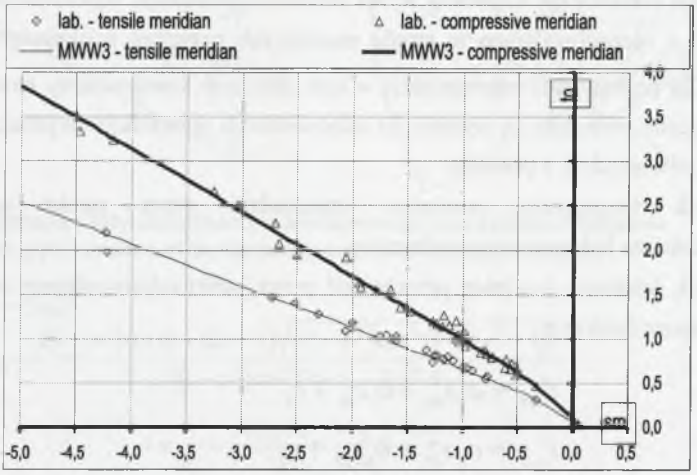
$$\begin{aligned} t_{o,n}^t &= a_t s_m^2 + b_t s_m + c_t \\ t_{o,n}^c &= a_c s_m^2 + b_c s_m + c_c \end{aligned} \tag{7}$$




Rys. 3. Konstrukcja nasadki powierzchni zniszczenia
Fig. 3. Construction of the failure surface cap

Sześć współczynników w równaniach południków rozciągania i ściskania nasadki (7) oraz dodatkowo współrzędną punktu styczności $s_t$ do południków prostoliniowych oraz wartość $m_{ttt}$ określającą położenie wierzchołka powierzchni granicznej (a zarazem wytrzymałość na równomierne, trójosiowe rozciąganie) wyznaczymy z podanych wyżej warunków oraz z warunków styczności do odpowiednich południków głównej części powierzchni.

Tak określona powierzchnia dobrze reprezentuje wytrzymałość betonu przy naprężeniach średnich $\sigma_m > -(4 \div 5)f_c$ (rys. 4).

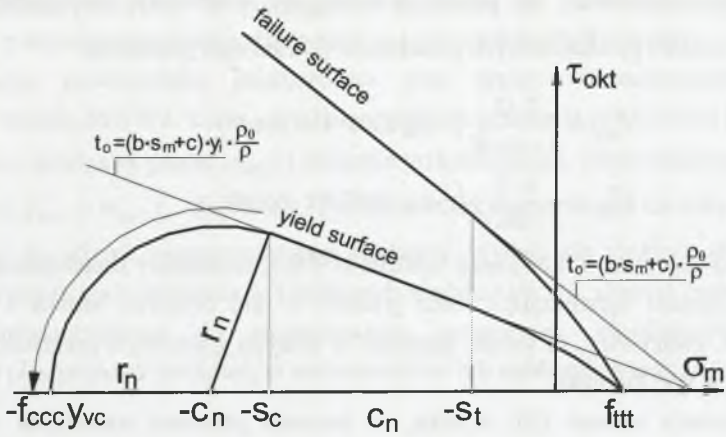



Rys. 4. Południki rozciągania i ściskania powierzchni MWW3
Fig. 4. Tensile and compressive meridians of the MWW3 failure surface

## 2.3. Stadium sprężyste i plastyczne

W opisywanym modelu założono, że odwracalna część tensora odkształcenia jest związana zależnością liniową z tensorem naprężenia. Oznacza to, że efekty nieliniowe powstają wyłącznie na skutek odkształceń trwałych. Strefy odkształceń sprężystych i plastycznych oddziela powierzchnia plastyczności. Wobec założenia o izotropowym prawie wzmocnienia/osłabienia równanie prostoliniowego południka tej powierzchni uzyskamy przez pomnożenie równania południka powierzchni granicznej przez współczynnik plastycznego wzmocnienia/osłabienia $y_i < 1$ (rys. 5).

Powierzchnia graniczna modelu MWW3 jest otwarta w stronę ściskania. Aby uwzględnić możliwość powstawania odkształceń nieodwracalnych na ścieżkach zbliżonych do hydrostatycznego ściskania, główną część powierzchni plastyczności (z prostoliniowymi południkami) zamknięto od strony ściskania nasadką, której kołowe południki będą styczne do południków części głównej (rys. 4). Dopóki ścieżka naprężeń nie przebije tej nasadki, mamy do czynienia ze sprężystym stadium pracy przy zbliżonej do hydrostatycznej kompresji materiału, po przebiciu pojawiają się odkształcenia nieodwracalne przy tego typu obciążeniu.




Rys. 5. Powierzchnia plastyczności
Fig. 5. Yield surface

### 2.4. Weryfikacja modelu MWW3

Model betonu określony symbolem MWW3 był wielokrotnie weryfikowany na różnych elementach betonowych i żelbetowych. Każdorazowe analizy skutkowały jego udoskonalaniem. Najprostsze weryfikacje przeprowadzano na podstawie komputerowej symulacji prostych badań laboratoryjnych, takich jak badania betonu na jednoosiowe ściskanie, rozciąganie oraz rozłupywanie (próba „brazylijska"). Wyniki tych analiz i pozytywną weryfikację modelu przedstawiono w pracach [1], [2], [5], [6].

## 3. Zastosowanie modelu MWW3 do gruntów

Zastosowanie modelu materiałowego MWW3 do gruntów jest bezpośrednio możliwe w zakresie kryterium zniszczenia i powierzchni granicznej. Jak zaznaczono w punkcie 2.2, w modelu MWW3 przekrój dewiatorowy powierzchni zniszczenia może być aproksymowany trzema wzajemnie stycznymi elipsami (koncepcja Willama i Warnkego) albo nierównokątnym sześciobokiem właściwym dla modelu Coulomba-Mohra. Ten ostatni jest chętnie stosowany w mechanice gruntów, a równanie powierzchni granicznej w stosowanym w modelu MWW3 układzie współrzędnych $\sigma_m, \tau_{okt}, \Theta$ określającym przestrzeń naprężeń ma postać:

$$\tau_{okt} = \frac{\left(-\sigma_m \sin\Phi + c\cdot\cos\Phi\right)\sqrt{2}}{\sin\Phi\cdot\cos\left(\Theta+\pi/3\right)+\sqrt{3}\cdot\sin\left(\Theta+\pi/3\right)} \tag{8}$$

Po podstawieniu $\Theta = 0$ dla południka rozciągania i $\Theta = \pi/3$ dla południka ściskania uzyskamy równania prostoliniowych południków powierzchni granicznej:

$$\tau_{okt}^{t} = \frac{2\sqrt{2}}{3+\sin\Phi}\left(-\sigma_m \sin\Phi + c\cdot\cos\Phi\right)$$
$$\tau_{okt}^{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3-\sin\Phi}\left(-\sigma_m \sin\Phi + c\cdot\cos\Phi\right) \tag{9}$$

Chcąc się utrzymać w konwencji modelu MWW3, należałoby skonstruować po stronie rozciągania nasadki ograniczające pracę gruntów w tym obszarze. Można z tego jednak zrezygnować, zważywszy, że ścieżki naprężeń w podłożu gruntowym praktycznie nigdy nie rozwijają się w tym kierunku.

Z porównania równań (20) wynika, że stosunek promieni wodzących w przekroju dewiatorowym na południku rozciągania i ściskania (rys. 2, wzór (20)) wynosi:

$$\rho = \frac{r_t}{r_c} = \frac{3-\sin\Phi}{3+\sin\Phi} \tag{10}$$

Znajomość $\rho$ pozwala określić wzór na promień $\rho_\Theta$ dla dowolnego kąta Lodego $\Theta$. Dla sześciokątnego przekroju dewiatorowego właściwego dla klasycznego modelu Coulomba-Mohra na podstawie wzoru (8) uzyskamy:

$$\rho_\Theta = \frac{r_\Theta}{r_c} = \frac{3-\sin\Phi}{(3+\sin\Phi)\cos\Theta + \sqrt{3}(1-\sin\Phi)\sin\Theta}. \tag{11}$$

Można również dla gruntu przyjąć gładki przekrój dewiatorowy w postaci trzech wzajemnie stycznych elips (rys. 2). Podstawiając (21) do (4), uzyskamy:

$$\rho_\Theta = \frac{r_\Theta}{r_c} = \frac{8\sin\Phi\cdot\cos\Theta - (\sin\Phi - 1)\sqrt{3\left(3\sin^2\Phi + 2\sin\Phi\left(3-8\sin^2\Theta\right)+3\right)}}{3\sin^2\Phi + 2\sin\Phi\left(8\cos^2\Theta - 3\right)+3}. \tag{12}$$

Zarówno przy sześciobocznym przekroju dewiatorowym właściwym dla modelu Coulomba-Mohra, jak i dla gładkiego przekroju złożonego z trzech wzajemnie stycznych elips przy $\Phi = \pi/4$ wartość $\rho_\Theta$ zmienia się od $\rho_t = 0.619$ na południku rozciągania do $\rho_c = 1.0$ na południku ściskania. Przy $\Phi = 0$ w modelu C-M przekrój dewiatorowy jest sześciobokiem regularnym, a gładka aproksymacja prowadzi do przekroju kołowego.

Gładki przekrój dewiatorowy jest propozycją atrakcyjną, trzeba jednak mieć na uwadze, że podczas gdy sześciokątny przekrój Coulomba-Mohra dobrze reprezentuje wytrzymałość gruntu na ścinanie, to przy gładkiej aproksymacji eliptycznej wytrzymałość ta będzie nieco zawyżona. Ponieważ ścinanie jest często przyczyną wyczerpania nośności gruntów, słuszne wydaje się pozostanie przy sześciokątnym przekroju dewiatorowym powierzchni zniszczenia.

Dzięki wyokrągleniu powierzchni w narożach unika się problemów numerycznych, związanych z niejednoznacznością rzutowania na powierzchnię plastyczności.

Formułując powierzchnię plastyczności oraz prawa wzmocnienia/osłabienia w kategoriach modelu MWW3, trzeba określić początkowe położenie powierzchni plastyczności (granicę pracy sprężystej gruntu $e_{\lim}$) i ciśnienie prekonsolidacji, odpowiadające punktowi o współrzędnej $f_{ccc} = m_{ccc} f_c$ dla betonu. Trzeba również skonstruować nasadkę powierzchni plastyczności po stronie hydrostatycznego ściskania. Wydaje się możliwe sformułowanie praw wzmocnienia oraz osłabienia w kategoriach modelu MWW3, chociaż brak jest obecnie podstaw doświadczalnych do sformułowania parametrów, określających ewolucję powierzchni plastyczności związaną ze wzmocnieniem lub osłabieniem materiałowym.

## 4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono propozycję prostego, sprężysto-plastycznego modelu materiałowego z izotropowym prawem wzmocnienia i osłabienia opartym na stowarzyszonym prawie płynięcia. Jego pierwowzorem jest znany w mechanice betonu trójparametrowy model Willama i Warnkego, który ze względu na wprowadzone modyfikacje oznaczono symbolem MWW3. Dla zmodyfikowanej powierzchni granicznej Willama i Warnkego sformułowano powierzchnię plastyczności oraz rządzące jej ewolucją prawa wzmocnienia i osłabienia. Model został wykalibrowany dla betonów na kruszywach naturalnych o szerokim spektrum wytrzymałości na ściskanie [1], [4], wliczając w to również beton świeży w wieku 1, 3 i 7 dni [7], a jego skuteczność zweryfikowano na licznych przykładach analizy elementów betonowych i żelbetowych. Potwierdzono również jego skuteczność do analizy konstrukcji murowanych z ceramicznej cegły pełnej [8] oraz zagadnień współpracy budowli z podłożem [9]. Dotychczasowe analizy wykonane z wykorzystaniem modelu MWW3 stanowią realną podstawę do przypuszczenia, że po dalszych pracach badawczych, teoretycznych i analizach weryfikacyjnych model ten może być efektywnym elementem oprogramowania do analizy różnych zagadnień konstrukcyjnych, wliczając w to problemy współpracy budowli z podłożem.

### Literatura

1. Majewski S.: Mechanika betonu konstrukcyjnego w ujęciu sprężysto-plastycznym. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, seria „Monografie", Gliwice 2003.
2. Majewski S.: MWW3 – Elasto-plastic model for concrete. Archives of Civil Engineering, no. 1/2004, p. 11-43.

3. Willam K. J., Warnke E. P.: Constitutive Models for the Triaxial Behaviour of Concrete. IABSE Seminar on Concrete Structures subjected to Triaxial Stresses, Bergamo 1974. IABSE Proc. vol. 19, p. 1-30.
4. Chen W.F., Zhang H.: Structural Plasticity. Theory, Problems and CAE Software. Springer Verlag, 1991.
5. Krzywoń R.: Nośność i sztywność prętów żelbetowych w złożonym stanie naprężenia. Dysertacja doktorska, Gliwice 2004.
6. Wandzik G.: Numeryczna symulacja przebicia płyty żelbetowej. Dysertacja doktorska, Gliwice 2000.
7. Klemczak B.: Lepko-sprężysto-plastyczny model materiałowy do numerycznej symulacji zjawisk zachodzących we wczesnym okresie dojrzewania betonu. Dysertacja doktorska, Gliwice 2000.
8. Drobiec Ł.: Analiza murów z cegły pełnej ze zbrojeniem w spoinach wspornych poddanych obciążeniom pionowym. Dysertacja doktorska, Gliwice 2004.
9. Szojda L.: Analiza numeryczna współdziałania murowanych budynków ścianowych z deformującym się podłożem. Dysertacja doktorska, Gliwice 2001.

Recenzent: Dr hab. inż. Jan Gaszyński, prof. Pol. Krakowskiej