ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2007
Seria: BUDOWNICTWO z. 111 Nr kol. 1756

Zbigniew SIKORA

Katedra Geotechniki i Geologii Stosowanej
Politechnika Gdańska

CZY PROBLEM BIFURKACJI W MECHANICE GRUNTÓW JEST WAŻNY?

Streszczenie. W artykule przedstawiono zastosowanie hypoplastycznego prawa konstytutywnego do przedstawienia pewnej klasy zagadnień związanych z bifurkacją rozwiązań zagadnień brzegowych. Sformułowano podstawowe twierdzenia i definicje teorii bifurkacji, za pomocą których, w dyskretnych punktach kwadratury Gaussa, istnieje możliwość stwierdzenia występowania punktów bifurkacji. Wykrycie punktu bifurkacji w obszarze rozwiązania pozwala określić warunki tworzenia się lokalizacji deformacji.

IS THE BIFURCATION PROBLEM RELEVANT IN SOIL MECHANICS?

Summary. A general form of hypoplastic constitutive equation utilized for formulation of specific bifurcation theory is presented. Some important theorems and definitions of possible bifurcation point and bifurcated solutions are drawn up. The procedure of bifurcation points presented in its computational form can be realized at least at the discrete Gauss points at which the localization of deformation might be possible. The relevancy of the bifurcation problem is underlined and its applicability in finite element methods is appreciated.

1. Wprowadzenie

W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie dynamiką układów opisanych równaniami nieliniowymi. Dotyczy to różnej natury układów fizycznych, chemicznych, biologicznych, demograficznych i wielu, wielu innych. Grunt jako skomplikowany ośrodek pod względem opisu mechanicznego posiada nieliniową charakterystykę naprężenie-odkształcenie. Zatem, równania opisujące stany równowagowe są również nieliniowe, więc i w mechanice

gruntów teoria bifurkacji (**TB**) ma swoje możliwe zastosowania. We wszystkich wyżej wspomnianych dziedzinach dąży się do tego, aby procesy w nich zachodzące były przewidywalne i w pewnym określonym sensie stabilne, tj. mało wrażliwe na zakłócenia. W takich układach najbardziej istotne są procesy opisujące stany równowagi, czy to statycznej czy też dynamicznej. Tutaj pojawia się istotne pytanie, czy założony i pożądany stan równowagi jest jedyny lub jak się zmienia i jaki jest obszar jego stateczności w przestrzeni parametrów, których wartości mogą ulegać zmianie? Z punktu widzenia geomechaniki obliczeniowej, w ramach której proces rozwiązywania skomplikowanych układów nieliniowych pozostaje często poza możliwością kontroli przez potencjalnego użytkownika, zwłaszcza dla programów o charakterze komercyjnym, wyżej postawione pytanie ma zasadnicze znaczenie.

W układach nieliniowych stateczność stanów równowagi często ma charakter lokalny w odniesieniu do warunków początkowych, a co za tym idzie również i do zakłóceń. Może się zdarzyć, że na skutek nieprzewidzianych zaburzeń układ przechodzi do innego niż zakładany stan równowagi, który może być nieakceptowany z punktu widzenia przebiegu procesu lub nawet groźny ze względu na bezpieczeństwo całego układu. W mechanice i inżynierii mechanicznej istnieją spektakularne przykłady katastrof, wynikających z niepożądanych gwałtownych zmian stanów równowagi układów i konstrukcji, na przykład wyboczenie konstrukcji prętowych lub cienkościennych struktur powłokowych, *flatter* samolotów, czy drgania mostów wiszących, czy spontaniczna utrata stateczności zboczy itp. Do tej właśnie klasy zagadnień należy powstawanie drgań samowzbudnych, zwłaszcza w układach z interakcjami mechanicznymi. Dla przykładu, rozwój superszybkich pojazdów szynowych o prędkościach rzędu kilkuset km/godz. spowodował, że wzrosło zainteresowanie dynamiką układu pojazd-tor. Wiadomo, że przy dużych prędkościach ruchu interakcja oscylatora, jakim jest pojazd z podatnym torem, może prowadzić do niestateczności dynamicznej, w wyniku której powstają pionowe i boczne drgania samowzbudne pojazdu. Zjawisko to jest badane od dawna w ramach wybranych zagadnień mechaniki gruntów połączonych z TB [6].

Między innymi z wyżej wymienionych powodów analizie powstawania drgań samowzbudnych poświęca się szeroką uwagę w literaturze i w badaniach naukowych, np. [7].

Zmiany stanów równowagi wiążą się z ***bifurkacjami***. Bifurkacja jest pojęciem matematycznym, które jest obecnie często przenoszone na grunt nauk stosowanych i techniki dla

określenia zjawiska pojawiania się nowych stanów równowagi przy jednoczesnej zmianie stateczności stanu dotychczasowego.

Bifurkacje są charakterystyczne również dla innych odwzorowań (co ma obecnie bardzo interesujące odniesienia, np. do kreowania sztucznej rzeczywistości [8]) jednak w mechanice, a szczególnie w geomechanice modele matematyczne opisane są przede wszystkim przez równania różniczkowe, zwyczajne lub cząstkowe, dlatego też nasza uwaga skupia się głównie na problemach bifurkacyjnych, związanych z równaniami różniczkowymi opisującymi zarówno równowagę ośrodka gruntowego, jak i stosowne równania konstytutywne.

Postęp w dynamice nieliniowej w ostatnich latach dokonuje się dwutorowo. Z jednej strony, nastąpiła „eksplozja" numerycznych rozwiązań takich zagadnień, których dotychczas nie można było analizować ze względu choćby na stopień nieliniowości czy rząd pochodnych, lub sprzężenia poszukiwanych rozwiązań. Metodą symulacji numerycznej można otrzymać dzisiaj wiele niedostępnych do niedawna rozwiązań dostatecznie dokładnych ilościowo i bardzo cennych w zastosowaniach praktycznych. Istnieją nawet tendencje do uniwersalizacji metod badania układów nieliniowych, szczególnie w ramach komercyjnie oferowanych pakietów oprogramowania. Należy jednak pamiętać, że „solwery" tych pakietów odzwierciedlają jedynie istniejący stan wiedzy na temat rozpatrywanych klas układów, a interpretacja wyników symulacji wymaga od użytkownika wiedzy z zakresu mechaniki oraz solidnego przygotowania z analizy numerycznej. Drugi ważny nurt w dynamice nieliniowej motywuje się przesłankami poznawczymi i interpretacyjnymi i dotyczą one badań teoretycznych, głównie jakościowych. Przed przystąpieniem do symulacji numerycznej ważne jest rozpoznanie, jakiego zachowania układu należy się spodziewać – jakie obszary parametrów i warunków początkowych są istotne z punktu widzenia interesujących rozwiązań. Taka wiedza wynika z analizy jakościowej, w tym również z analizy bifurkacyjnej rozwiązań stanów równowagi. Należy jednak podkreślić, że teoria bifurkacji bez algorytmów obliczeniowych i wspomagania komputerowego byłaby tylko zbiorem twierdzeń i być może eleganckich, ale mało użytecznych formuł (wyjąwszy elementarne przypadki o niskim wymiarze zastosowania). Konstruowanie nawet złożonych wyrażeń w modelach fizyczno-matematycznych jest zwykle efektywniejsze niż sama symulacja numeryczna „skażona" własną dynamiką. Ta właśnie dynamika symulacji jest czasem **źródłem**

fikcyjnych zjawisk, które trudno jest oddzielić od zjawisk rodzajowych właściwych rozpatrywanym układom dynamicznym [9].

Teoria bifurkacji nie jest i prawdopodobnie nie będzie teorią kompletną. Wynika to z faktu istnienia ogromnej różnorodności bifurkacji w układach wielowymiarowych i wieloparametrycznych. Celem tego artykułu jest przybliżenie niektórych aspektów TB, jakie są niezbędne z punktu widzenia procedur bifurkacyjnych analizowanych w zagadnieniach geomechaniki obliczeniowej. Jeśli ten artykuł wzbudzi zainteresowanie choćby w najmniejszym stopniu, cel autora zostanie osiągnięty.

2. Pewne zastosowanie TB w mechanice gruntów

Jednym z efektywnych zastosowań teorii bifurkacji w mechanice gruntów była konstrukcja rozwiązania zagadnienia równowagi ośrodka gruntowego z możliwością śledzenia procesu lokalizacji deformacji w postaci pasa deformacji o skończonej szerokości [9]. Zjawisko lokalizacji często obserwuje się w badaniach laboratoryjnych nie tylko z materiałami rozdrobnionymi. Jednym ze sposobów teoretycznego rozważania inicjacji i progresywnego tworzenia się pasa deformacji są analizy opierające się na założeniu występowania nieciągłych pól prędkości deformacji, **D**, tj. symetrycznej części gradientu prędkości przemieszczenia. Występowanie powierzchni nieciągłości wymaga zmodyfikowania klasycznej teorii równowagi ośrodków ciągłych i wprowadzenia takich warunków, które pozwalałyby na istnienie nieciągłego pola prędkości deformacji. Z tego też m.in. powodu wielu badaczy proponuje szczególne teorie konstytutywne, jedne mniej inne więcej kontrowersyjne w swych założeniach. Istotnym sprawdzianem adekwatności jawi się wówczas głównie wynik numeryczny rozwiązania problemu brzegowego lub jego uproszczenia, zbliżony do wyniku pomiarów eksperymentalnych. W takim podejściu istotne aspekty modelowania matematycznego mogą być zaniedbane, a sama postać funkcji konstytutywnej może powodować istotne trudności numeryczne, które w licznych przypadkach da się usunąć stosując wyrafinowane procedury numeryczne, np. regularyzacyjne. Takie postępowanie jednakże może spowodować zmianę typu podstawowego układu równań różniczkowych stanu równowagi, a to ściśle wiąże się z koniecznością zmiany warunków brzegowych; jednym z podstawowych wymagań odnośnie do warunków Hadamarda

poprawności postawienia zagadnienia brzegowego (istnienia, jednoznaczności i stabilności rozwiązania) [9]. Należy wyraźnie podkreślić, że zdecydowana większość rozwiązań zagadnień źle postawionych nie ma sensu fizycznego, a co za tym idzie, zastosowanie w praktyce takich rozwiązań jest błędne i może prowadzić do błędnego wnioskowania projektowego. W tej klasie problematyki zastosowanie reguł TB ma swoje istotne uzasadnienie i zapotrzebowanie, bowiem przekroczenie tzw. *punktu bifurkacji* w rozwiązaniu kontynualnym powoduje utratę wymagania jednoznaczności rozwiązania. Teoria bifurkacji, szczególnie w analizie zagadnienia lokalizacji deformacji wspomaga interpretację rozwiązania numerycznego równowagi statycznej. Teoretyczny opis formowania się pasa deformacji zapoczątkował Hadamard, [5], już na początku XX wieku. W latach późniejszych aż po dzień dzisiejszy w wielu ośrodkach naukowych wykorzystuje się możliwości TB, korzystając z licznych wyników analiz teoretycznych. Zainteresowanych odsyłam do obszernej na ten temat książki Vardoulakisa, [12], jednego z prekursorów zastosowań TB w mechanice gruntów.

3. Hypoplastyczne prawo konstytutywne

Równania konstytutywne materiałów rozdrobnionych są z reguły przedstawiane zgodnie z ideą sprężysto-plastyczności. Pomimo licznych modyfikacji, główne założenia sprężysto-plastyczności dotyczą rozkładu całkowitej deformacji na część sprężystą i plastyczną. Stosowanie praw sprężysto-plastycznych w materiałach rozdrobnionych, w wielu przypadkach, wymaga krytycznego uzasadnienia. Jedną z możliwych teorii konstytutywnych dla materiałów rozdrobnionych mogą być równania hypoplastyczne, które z formalnego punktu widzenia są pewnym uogólnieniem teorii hyposprężystości. Podział i zastosowanie praw konstytutywnych dla gruntów przedstawił Gryczmański w swej znakomitej monografii [3].

Koncepcja hypoplastycznego prawa konstytutywnego jest wygodnym narzędziem opisu mechanicznego, a inspiracją do tworzenia tego rodzaju funkcji konstytutywnych były istotne przesłanki oparte na wymaganiach praw fizycznych, [4]. W dalszej dyskusji, problem bifurkacji będziemy dyskutować na podstawie ogólnej postaci prawa hypoplastycznego, które można przedstawić za pomocą następujących wzorów:

$$\dot{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}} + \mathbf{WT} - \mathbf{TW} \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T},\mathbf{D}) = \mathbf{L}(\mathbf{T},\mathbf{D}) + \mathbf{N}(\mathbf{T})\|\mathbf{D}\| \tag{2}$$

lub w innej równoważnej postaci, np.:

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{H}(e,\mathbf{T},\mathbf{D}) \tag{3}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = a_1 f_b f_e\left[\mathbf{L}(\mathbf{T},\mathbf{D}) + f_d f_a \mathbf{N}(\mathbf{T},\mathbf{D})\right], \tag{4}$$

gdzie a_1 i f_a, f_b, f_e, f_d przedstawiają składowe materiałowe odpowiadające za opis zjawisk: argotropii, barotropii i pyknotropii, szczegóły p. [1]. Zmienne **T**, **D** i **W** występujące w powyższych równaniach to odpowiednio tensor Cauchy'ego, prędkość deformacji i prędkość obrotu. Parametr e przedstawia wskaźnik porowatości, a odpowiednio symbole $\dot{(*)}$ i $\bar{(*)}$ oznaczają pochodną po czasie i pochodną Jaumanna.

Dla uproszczenia analizy, równania (1-2) będą podstawą dalszych rozważań.

Aby równania (2) mogły opisać deformację nieodwracalną, funkcja tensorowa **h**(**T**,**D**) musi być nieliniowa względem **D** – faktycznie, podział funkcji (2) na część biliniową **L**(**T**,**D**), tj. liniową ze względu na każdą zmienną i **T** i **D**, i nieliniową **N** pomnożoną przez miarę Euklidesową prędkości deformacji $\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{D}^2)}$, która jest wyrażeniem nieliniowym względem **D**, a zatem spełnia wspomniane wyżej wymagania.

4. Określenie punktu bifurkacji

Formalny opis problemu bifurkacji można przedstawić na wiele sposobów, tutaj zastosujemy równania, które będą uproszczoną analizą i ściśle związaną z nowoczesną hypoplastyczną teorią konstytutywną.

4.1. Kilka ważnych twierdzeń o bifurkacji

Rozważmy tak zwane podwójnie zagadnienie początkowe w sensie lokalnym, co w literaturze znane jest pod pojęciem ***testów elementarnych*** lub *uproszczonego zagadnienia algebraiczno-różniczkowego*. Takie sformułowanie zagadnienia równowagi mieści się w klasie metod sprawdzania adekwatności praw konstytutywnych, w warunkach jednorodnego stanu

naprężenia, a zatem w warunkach podstawowych badań mechaniki gruntów sprawdzalnych eksperymentalnie, zatem

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T},\mathbf{D}) = \mathbf{h}(\mathbf{T},\dot{\mathbf{E}}) \tag{5.1}$$

$$\mathbf{T}(t_0) = \mathbf{T}_0 \tag{5.2}$$

$$\mathbf{E}(t_0) = \mathbf{E}_0, \tag{5.3}$$

gdzie **E** oznacza tensor deformacji.

Niech proces kontynuacji deformacji rozpocznie się w pewnym ustalonym stanie $\mathbf{E}_0$ w chwili t_0. W kolejnych przedziałach czasowych stan deformacji $\mathbf{E}(t)$ będzie całką po przedziale czasowym kolejnych stanów, które wyznaczone zostaną zgodnie z warunkami równań równowagi dla odpowiednio sformułowanych warunków brzegowych. Dla tak sformułowanego zagadnienia można przyjąć, że współrzędne tensora prędkości deformacji należą do zmiennego zbioru parametrów, zatem zagadnienie początkowe (5) można przedstawić w innej postaci, do której będą zastosowane ważne twierdzenia TB.

Rozważmy zatem sparametryzowaną rodzinę równań różniczkowych przedstawioną jako sumę części liniowej, $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{T}$ i części wielomianowej $\phi(\mathbf{T}, \lambda)$ o stopniu potęgi **T** większym od jedności, tj.

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T},\mathbf{D}) = \mathbf{h}(\mathbf{T},\lambda) = \mathbf{A}(\lambda)\mathbf{T} + \phi(\mathbf{T},\lambda), \tag{6}$$

gdzie

$$\begin{gathered} \mathbf{h} : R^n \times R \to R^n \\ \mathbf{h}(\mathbf{0},\lambda) = \mathbf{0} \\ \lambda = \|\mathbf{D}\| \end{gathered} \tag{7}$$

Dla odpowiednich założeń o różniczkowalności funkcji konstytutywnej taka postać jest zawsze możliwa i może to być rozumiane jako forma aproksymacji szeregiem Maclaurina. W ten sposób otrzymuje się jednorodne zagadnienie początkowe (z zerowymi warunkami początkowymi), bowiem łatwo zauważyć, że w przypadku (5) podstawienie $\overline{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_0$ również daje zagadnienie jednorodne, zatem pochodna Frécheta funkcji konstytutywnej dla warunku rozwiązania stacjonarnego $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ definiuje macierz:

$$\mathbf{A}(\lambda) = D_{\mathbf{T}}\mathbf{h}(\mathbf{0}, \lambda). \tag{8}$$

Dla ułatwienia, stopień wielomianu może być ograniczony do $1 \leq n \leq 3$.

Do określenia punktu bifurkacji wykorzystuje się tzw. „indeks Conleya" sformułowany w treści następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1 (Conleya, [11]). *Niech λ_0 będzie takie, że $\sigma(\mathbf{A}(\lambda_0)) \cap \sqrt{-1} \cdot R = \emptyset$, gdzie $\sigma(\mathbf{A})$ oznacza spektrum macierzy* **A**. *Przy takim założeniu można powiedzieć, że warunek początkowy jest izolowanym zbiorem niezmienników w sensie Conleya, a indeks Conleya jest sferą o wymiarze $v(\lambda_0)$ i przedstawia sobą sumę algebraicznych mnożników dodatnich rzeczywistych części wartości własnych macierzy $\mathbf{A}(\lambda_0)$.*

Na podstawie powyższego twierdzenia dla rozwiązania zagadnienia (5) ważna jest następująca definicja.

Definicja 1. *Punkt $(\mathbf{0}, \lambda_0) \in R^n \times R$ nazywa się* **punktem bifurkacji** *rozwiązań układu (6), określonych w taki sposób, że w dowolnym otwartym otoczeniu U punktu $(\mathbf{0}, \lambda_0)$ istnieje rozwiązanie (6) różne od rozwiązania w postaci (7) i rozwiązanie to jest zawarte w otoczeniu U.*

Jak widać z treści powyższych definicji i twierdzeń, inżynierskie rozwiązanie problemu bifurkacji rozwiązania nie wydaje się na pierwszy rzut zadaniem łatwym. Należy bowiem napisać procedurę obliczania indeksu Conleya, co ponownie nie jest zadaniem trywialnym. Niech więc,

$$\Lambda = \{\lambda \in R^k : \sigma(\mathbf{A}(\lambda_0)) \cap \sqrt{-1} \cdot R = \emptyset\} \tag{9}$$

Zgodnie z treścią twierdzenia 1 następujące twierdzenie określające warunki rozwiązania bifurkującego jest prawdziwe.

Twierdzenie 2 (Conleya, [11]). *Niech będą ustalone punkty $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ i załóżmy, że $v(\lambda_0) \neq v(\lambda_1)$, wtedy w przedziale $\{\mathbf{0}\} \times [\lambda_0, \lambda_1]$ znajduje się punkt bifurkacji, w którym rozwiązanie bifurkuje (rozgałęzia się) w określonym zbiorze ograniczonych rozwiązań zagadnienia*

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \lambda). \tag{10}$$

Na tej podstawie daje się sformułować **warunek dostateczny na istnienie punktu bifurkacji rozwiązań stacjonarnych** rodziny zagadnień (10), zatem niech $\Lambda_+, \Lambda_- \in R$ określają następujące zbiory

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \{\lambda \in R^k : det(\mathbf{A}(\lambda)) > 0\} \\ \Lambda_- &= \{\lambda \in R^k : det(\mathbf{A}(\lambda)) < 0\} \end{aligned} \tag{11}$$

wtedy kolejne ważne twierdzenie dowodzi istnienia punktów bifurkacji i rozwiązań bifurkujących.

Twierdzenie 3 (Krasnosielskiego, [2]). *Jeżeli* $\lambda_0 \in \Lambda_+$ *i* $\lambda_1 \in \Lambda_-$, *wtedy w przedziale* $\{0\}\times[\lambda_0, \lambda_1]$ *zawarty jest punkt bifurkacji stacjonarnych rozwiązań zagadnienia (10).*

Przykład numeryczny, na podstawie powyższych twierdzeń, w zastosowaniu do warunków metody elementów skończonych, można przeczytać w pracach [9, 10].

5. Wnioski i propozycje zastosowań

W przedstawionej analizie bifurkacyjnej w klasie równań hypoplastycznych, tj. w klasie równań przyrostowo nieliniowych, stosując tezy w/w twierdzeń opisuje się moment możliwego rozgałęzienia się tzw. rozwiązań trywialnych, co w obliczeniowej mechanice gruntów można uważać za moment powstania lokalizacji deformacji. W systemie metody elementów skończonych dla zagadnień brzegowych z różniczkowymi równaniami równowagi dyskretyzację oraz obliczenia przeprowadza się w punktach kwadratury Gaussa. Zatem, w każdym punkcie Gaussa można przeprowadzić analogiczną procedurę analizy bifurkacyjnej w celu sprawdzenia dostatecznego warunku istnienia punktu bifurkacji w sensie lokalnym.

W artykule przedstawiono jedną z możliwych analiz bifurkacyjnych. Szczegółowy opis modyfikacji metody elementów skończonych wraz z analizą bifurkacyjną można znaleźć w [9].

Z matematycznego lub mechanicznego punktu widzenia przeprowadzenie analizy bifurkacyjnej jest nieodzowne w celu pełnego zrozumienia i interpretacji rozwiązań numerycznych rozważanych systemów. Zagadnienie bifurkacji wiąże się ściśle z problemem jednoznaczności rozwiązania, a ten z kolei warunek jest jednym z trzech wymagań poprawności postawienia zagadnienia brzegowego. Rozwiązania zagadnień brzegowych niepoprawnie postawionych, również i rozwiązania numeryczne tych zagadnień, w większości przypadków nie mają sensu fizycznego. Fakt ten z inżynierskiego punktu widzenia, w szczególności w przypadkach prognoz inżynierskich, ma podstawowe znaczenie.

Literatura

1. Bauer E.: Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. Soils and Foundations, 36(1), 1996, 13–26.
2. Deimling K.: Nonlinear functional analysis. Springer Verlag, Berlin 1985.
3. Gryczmański M.: Wprowadzenie do opisu sprężysto-plastycznych modeli gruntów. IPPT, PAN, Warszawa 1995. Studia z Zakresu Inżynierii KILiW.
4. Gudehus G.: Physical background of hypoplasticity. W. Wu and H.S. Yu (editors), Modern trends in geomechanics, 17–37, Springer Proceedings in Physics, 2005. SPP 106.
5. Hadamard J.: Le¸cons sur la propagation des ondes et les ´equations de l'hydrodynamique. Librairie Scientifique, A. Herrmann, Paris 1903. Ch. 6.
6. Kisilowski J., Knothe K.: Advanced railway vehicle system dynamics. WNT, Warszawa 1991.
7. Kurnik W.: Bifurkacje dywergentne i oscylacyjne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
8. Schuster H.G.: Chaos deterministyczny. Wprowadzenie, PWN, Warszawa 1993.
9. Sikora Z.: Hypoplastic flow of granular materials – a numerical approach. Technical University of Karlsruhe, Karlsruhe 1992. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Fridericiana in Karlsruhe, Heft 123.
10. Sikora Z., Rybicki S.: Bifurcation conditions within hypoplastic constitutive theory. Vardoulakis I., Chambon R., Desrues J. (editors), Proc. of the 3rd Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soils and Rocks, 41–50, Balkema, 1993.
11. Smoller J.: Schock waves and reaction-diffusion equations, Springer Verlag, New York 1983.
12. Vardoulakis I., Sulem J.: Bifurcation analysis in Geomechanics, Blackie, London 1995.

Recenzent: Prof. dr inż. Zbigniew Lechowicz