

Tomasz STRZELECKI, Stanisław KOSTECKI

Instytut Geotechniki i Hydrotechniki
Politechnika Wrocławska

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA GRANICZNEGO NIELINIOWEJ KONSOLIDACJI DARCY-BIOTA METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia konsolidacji gruntu pod działaniem ciężaru własnego, obciążenia zaporą ziemną i naporem wody zgromadzonej w zbiorniku retencyjnym. Wykonano obliczenia dla przypadku liniowego i nieliniowego modelu konsolidacji opisanej równaniami Darcy-Biota. Nieliniowość modelu wynika ze zmian wielkości parametrów mechanicznych i filtracyjnych na skutek zmiany porowatości gruntu. Związek pomiędzy parametrami modelu Darcy-Biota a porowatością określono na podstawie obliczeń numerycznych metodą elementów skończonych przy wykorzystaniu równań wynikających z teorii homogenizacji. Ponadto, w opisie matematycznym uwzględniono nieliniowe związki geometryczne. Porównano wyniki obliczeń konsolidacji liniowej i nieliniowej.

THE SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM OF NONLINEAR BIOT-DARCY'S CONSOLIDATION BY FINITE ELEMENT METHOD

Summary. In this paper the problems of consolidation under dead-weight of subsoil, load of earth dam and water load accumulated in reservoir are presented. The calculations were made for a linear and non-linear consolidation model described by Biot-Darcy's equations. Non-linearity in the Biot's model is a consequence of the modification of mechanical and filtration parameters, which is a result of changing the porosity of soil. Relations between the factors in Biot-Darcy's model and the porosity were established on the basis of the numerical calculations of Finite Elements Method by use of equations from the homogenization theory. In the mathematical description, non-linear geometrical relations were also included. The results of a linear and non-linear consolidation were also compared.

1. Wprowadzenie

W mechanice ośrodków porowatych, a w szczególności mechanice gruntów nawet proste modele reologiczne mają postać skomplikowaną. Z tego względu konieczne staje się poszukiwanie kompromisu pomiędzy złożonością opisu matematycznego przyjętego modelu w skali mikroskopowej i makroskopowej a możliwościami uzyskania jego rozwiązania. Stały postęp w doskonaleniu metod numerycznych, sprzętu i oprogramowania komputerowego umożliwia rozwiązywanie zagadnień inżynierskich na podstawie coraz bardziej matematycznie złożonych modeli, dzięki czemu uzyskuje się coraz lepsze przybliżenie rzeczywistych zjawisk fizycznych.

Badania laboratoryjne pokazują, że przyjęcie modelu liniowej sprężystości dla ośrodków porowatych jest zbyt dalekim uproszczeniem, szczególnie w odniesieniu do ośrodka gruntowego. Dla ośrodka gruntowego związki fizyczne, określające procesy przed osiągnięciem wartości granicznych, są nieliniowe. Szkielet ośrodka gruntowego składa się bowiem z oddzielnych ziaren lub płytek, pomiędzy którymi występują siły:

- tarcia statycznego pomiędzy poszczególnymi ziarnami,
- tarcia lepkiego, jeżeli pomiędzy ziarnami występuje faza ciekła, na przykład w postaci wód związanych siłami elektrostatycznymi, jak to ma miejsce w przypadku gruntów spoistych,
- wewnętrzne, występujące w materiale spajającym ziarna gruntu, który ma często inne własności mechaniczne niż ziarna gruntu, na skutek procesów chemicznych podczas filtracji zmineralizowanej wody przez ośrodek; materiał ma więc charakter kompozytu w skali mikroskopowej.

Proces odkształcania się ośrodka na skutek działania obciążenia ma w części charakter odwracalny, gdy przemieszczenia są wynikiem odkształceń sprężystych ziaren lub płytek, a w części nieodwracalny, kiedy przemieszczenia zachodzą lokalnie na skutek przekroczenia granicy wyżej wymienionych sił. Matematyczny model opisujący procesy naprężenie – odkształcenie, uwzględniający wyżej opisane zjawiska, byłby z pewnością modelem oddającym wiernie rzeczywistość, ale też nieporównanie bardziej złożony od powszechnie stosowanych obecnie modeli matematycznych procesów zachodzących w gruncie.

Celem niniejszej pracy jest oszacowanie, jaki wpływ na proces konsolidacji ma zmiana porowatości odkształcanego ośrodka, a przez to zmiana wartości stałych Biota w procesie pełzania ośrodka gruntowego. Do opisu matematycznego tych zjawisk autorzy wykorzystali

metodę zbieżności dwuskalowej znaną z teorii homogenizacji, opisaną m.in. w pracach Auriault & Sanchez Palencia (1977), Auriault (1983), Auriault i inni (1990).

Wyniki obliczeń numerycznych odkształceń ośrodka porowatego z uwzględnieniem wyprowadzonych relacji porównano z wynikami odkształcenia ośrodka wyznaczonego na podstawie klasycznego modelu Biota-Darcy'ego, w którym jednym z podstawowych założeń jest niezmiennosc współczynnika porowatości.

2. Parametry modelu Biota w funkcji porowatości ośrodka

Aby określić zależność parametrów modelu Biota-Darcy'ego od porowatości, rozwiązano numerycznie dwa oddzielne zagadnienia w układzie dwuwymiarowym:

- a) Zagadnienie przepływu cieczy newtonowskiej przez nieodkształcalną matrycę ośrodka porowatego w celu określenia zależności tensora przepuszczalności Darcy'ego od porowatości szkieletu.
- b) Zagadnienie odkształceń porowatego ośrodka sprężystego w celu określenia zależności parametrów modelu Biota-Darcy'ego – modułu odkształcenia postaciowego N i modułu odkształcenia objętościowego A , od porowatości ośrodka. Zależność pozostałych parametrów tego modelu Q i R od porowatości uzyskano na podstawie pracy Fatta (1959) oraz Biota & Willisa (1957).

Pierwsze zagadnienie analizowane było na podstawie modelu ośrodka, składającego się z powtarzalnych (periodycznych) komórek o prostym geometrycznie kształcie. Kształt komórki w postaci kwadratu z okręgiem w środku i czterema ćwiartkami okręgów w jej narożach reprezentuje ziarna szkieletu gruntowego (rys. 1). Poprzez zmianę średnicy okręgów aproksymowano zmianę porowatości ośrodka.

Zagadnienie drugie analizowane było na podstawie podobnego modelu periodycznego ośrodka, zbudowanego z komórek w postaci kwadratu z czterema kanalikami filtracyjnymi w kształcie okręgów. Przez zmianę ich średnicy modelowano zmianę porowatości rozważanego ośrodka. Przyjęcie takiego modelu symetrycznej komórki periodycznej jest dużym uproszczeniem rzeczywistości, stąd autorzy przeprowadzili liczne eksperymenty numeryczne dla określenia, jak istotny jest wpływ geometrii komórki na rezultat obliczeń filtracji i odkształceń ośrodka. Stwierdzono, że struktura ośrodka porowatego w skali mikro tylko w niewielkim stopniu wpływa na wyniki i stąd przyjęcie modelu uproszczonego jest w tym przypadku uzasadnione.

2.1. Zależność tensora przepuszczalności Darcy'ego od porowatości

Wyznaczenie tensora przepuszczalności w funkcji porowatości w przypadku płaskiego ustalonego przepływu filtracyjnego przez periodyczną komórkę o powierzchni Ω_f , ograniczoną brzegiem Γ możemy na podstawie prac Aurialta (1986), Strzelecki i inni (2007) sprowadzić do zagadnienia brzegowego opisanego równaniem Stokesa i równaniem ciągłości przepływu:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 1, \quad x, y \in \Omega_f, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = (u, v) \quad (2)$$

z warunkami brzegowymi na kontakcie cieczy z ciałem stałym:

$$\vec{v}|_{\Gamma} = \vec{0}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

z warunkami periodyczności na brzegach komórki, gdzie zachodzi kontakt ciecz-ciecz z sąsiednimi komórkami :

$$[u] = 0, \dots [v] = 0, \dots [p] = 0 \quad (4)$$

gdzie $\vec{v} = (u, v)$ i p oznaczają odpowiednio prędkość i ciśnienie cieczy, symbol $[u]$ oznacza warunek periodyczności: $u(\alpha)|_{\Gamma} = u(\alpha + L)|_{\Gamma}$, gdzie $\alpha = x, y$, L jest charakterystycznym wymiarem komórki.

Opisane równaniami (1)-(4) zagadnienie przepływu jest niemożliwe do rozwiązania metodą numeryczną, bowiem macierz główna układu jest osobliwa. Proponujemy więc modyfikację tego układu przez wykonanie operacji dywergencji na równaniu (1):

$$\nabla \cdot (-1/\rho \cdot \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g}) = 0, \quad \vec{g} = (1, 0) \quad \text{w } \Omega_f \quad (5)$$

Wychodząc ze znanej tożsamości matematycznej, zastępujemy w równaniu (5) operator Laplace'a wyrażeniem $\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times \nabla \times \vec{v}$ i korzystając następnie z równania (2) oraz relacji $\nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{v}) \equiv 0$, otrzymujemy:

$$\nabla^2 p = 0 \quad (6)$$

Równaniem (6) zastępujemy równanie ciągłości przepływu (2) i wprowadzamy dodatkowy zamykający warunek brzegowy, wynikający z teorii homogenizacji (Strzelecki i inni, 2007):

$$\int_{\Omega_f} p d\Omega_f = 0 \quad (7)$$

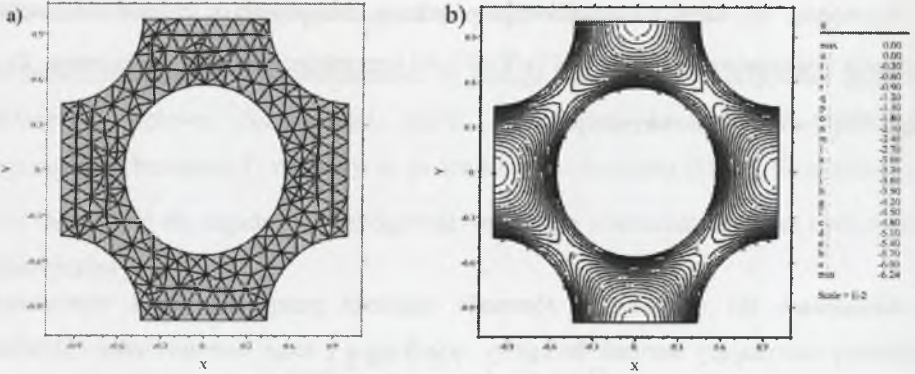
Zagadnienie (1)-(4) sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= 1 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \nabla^2 p &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

z warunkami brzegowymi (3), warunkami periodyczności (4) oraz warunkiem zamykającym dla funkcji ciśnienia (7). Rozwiązaniem tego układu jest pole prędkości, które, zgodnie z zasadami opisanymi w pracy Strzeleckiego i innych (2007), całkujemy po obszarze komórki Ω_f , aby wyznaczyć składowe tensora przepuszczalności \bar{k}_{11} i \bar{k}_{12} . Dla wyznaczenia pozostałych składowych \bar{k}_{21} i \bar{k}_{22} przyjmujemy działanie jednostkowej siły masowej wzdłuż osi y i powtarzamy procedurę obliczeń.

W ramach testów numerycznych metodą elementów skończonych przyjmowano komórkę kwadratową o długości bezwymiarowej 2, dla której wykonano obliczenia dla różnych położeń ziarna w komórce.

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń dla rozkładu symetrycznego, dla którego siatkę elementów skończonych i rozkład poziomej prędkości przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1a) Obszar obliczeniowy – siatka elementów skończonych, b) wykres izolinii poziomej prędkości filtracji w skali mikroskopowej

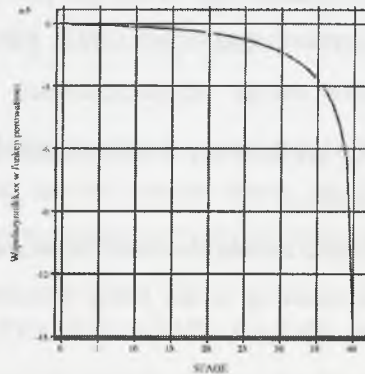
Fig. 1a) Calculation domain – finite element mesh, b) plot of isolines of horizontal filtration velocity in micro scale

W procesie obliczeń uzyskano tensor przepuszczalności \bar{k}_{ij} , którego składowe poza główną przekątną można przyjąć równe zero, a wartości na przekątnej z uwagi na symetrię są takie same. Stąd można przyjąć, że tensor przepuszczalności wyraża się za pomocą wartości współczynnika przepuszczalności k .

Zmienność współczynnika filtracji k w funkcji porowatości przedstawiono na rys. 2.

2.2. Zależność parametrów Biota N i A od porowatości

Zagadnienie brzegowe procesu odkształceń sprężystych fazy stałej ośrodka dla rozważanego przypadku sprowadza się na podstawie pracy Aurialta (1986) do rozwiązywania w skali mikro następującego układu równań:



Rys. 2. Zależność współczynnika filtracji od porowatości
 Fig. 2. Relation between filtration coefficient and porosity

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} e_{kh}(\bar{w})) = 0, \quad \bar{w} = (w_x, w_y), \quad x, y \in \Omega_s \quad (9)$$

z warunkiem brzegowym i warunkami periodyczności:

$$\begin{aligned} \left[(a_{ijkh} e_{kh}(\bar{w})) N_j \right]_{\Gamma} &= 0 \\ [\bar{w}] &= 0, \quad [a_{ijkh} e_{kh}(\bar{w})] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie \bar{w} jest wektorem przemieszczeń, a_{ijkh} jest tensorem sprężystości czwartego rzędu, e_{kh} jest tensorem odkształcenia rzędu drugiego.

Opierając się na podstawie procedur metody zbieżności dwuskalowej, zakładamy, że wszystkie rozważane funkcje zależą od dwóch zmiennych określających odpowiednio zmiany makroskopowe i mikroskopowe. W przypadku zagadnienia płaskiego rozważymy proces odkształceń komórki periodycznej Ω_s spowodowany jednostkowymi odkształceniami ze skali makroskopowej w płaskim stanie odkształcenia:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\hat{N}E_x + \bar{A}(E_x + E_y) + 2\hat{N}\frac{\partial w_x}{\partial x} + \bar{A}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\right), \\ \sigma_{yy} &= 2\hat{N}E_y + \bar{A}(E_x + E_y) + 2\hat{N}\frac{\partial w_y}{\partial y} + \bar{A}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\right), \\ \sigma_{xy} &= 2\bar{N}\left[E_{xy} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

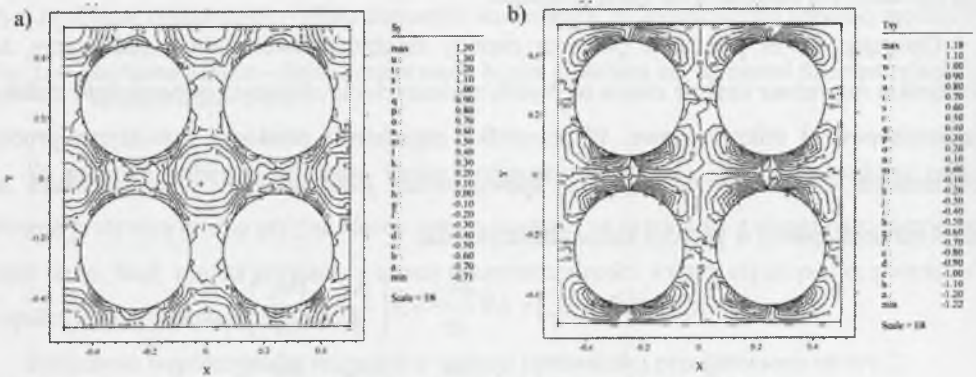
natomiast układ równań równowagi ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

W przedstawionych związkach fizycznych płaskiego modelu sprężystego w skali makroskopowej E_x oznacza wydłużenie względne wzdłuż osi x , E_y – wydłużenie względne wzdłuż osi y , E_{xy} – odkształcenie postaciowe, \hat{N}, \bar{A} są stałymi Biota, w przypadku gdy ośrodek nie ma porów, czyli jest ciałem ciągłym. Powyższy układ musi spełniać warunki brzegowe oraz warunki periodyczności (10), z zamykającym warunkiem całkowym (13):

$$\int_{\Omega_s} w_x d\Omega_s = 0, \quad \int_{\Omega_s} w_y d\Omega_s = 0 \quad (13)$$

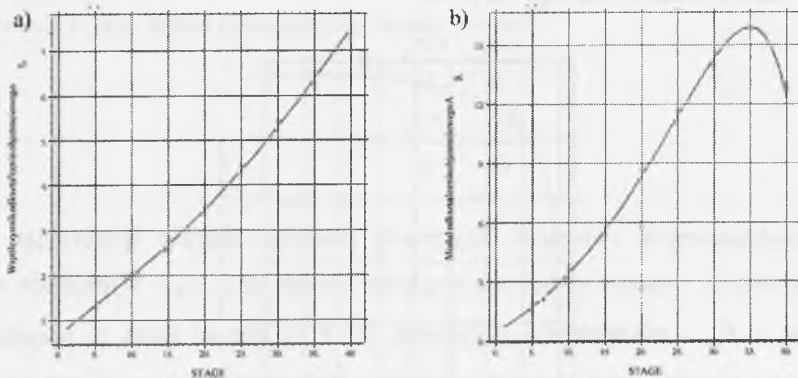
Obliczenia wielkości poszukiwanych parametrów uzyskano przyjmując $E_x = 1$, $E_y = 0$, $E_{xy} = 0$. Analogiczne rozwiązanie dostajemy ze względu na symetrię przyjętej geometrii obszaru, gdy $E_x = 0$, $E_y = 1$, $E_{xy} = 0$. Poszukiwane wartości $2N+A$ i A otrzymujemy wyznaczając kolejno wartość średnią składowych wektora w_x i w_y . Rozkład składowej przemieszczenia kierunku osi x i y w skali periodycznej komórki przedstawiono na rys. 2.



Rys. 3. Rozkład przemieszczenia w skali lokalnej: a) składowa pozioma przemieszczenia, b) składowa pionowa

Fig. 3. Displacement distribution in local scale: a) horizontal displacement, b) vertical displacement

Na rysunku 4 przedstawiono funkcję parametrów N i M w zależności od porowatości ośrodka.



Rys. 4. Zależność stałych Biota od porowatości: a) stała $2N+A$, b) stała A

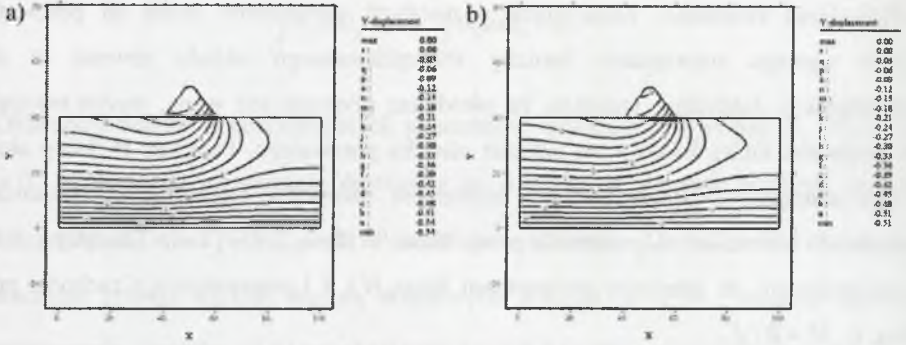
Fig. 4. Relations between Biot-Darcy's factors and porosity: a) for $2N+A$, b) for A

Znalezienie zależności funkcyjnych pozostałych parametrów Biota od porowatości ośrodka wymaga rozwiązania bardziej skomplikowanego układu równań w skali mikroskopowej. Zakładając jednakże, że ośrodkiem płynnym jest woda, można przyjąć, iż faza ciekła jest mniej ściśliwa niż szkielet ośrodka porowatego. Parametr R , który określa związek pomiędzy dylatacją cieczy a ciśnieniem rozmytym cieczy, zależy liniowo od porowatości. Natomiast na podstawie pracy Biota Willysa (1959) oraz Emmricha (1984) można stwierdzić, że pomiędzy parametrami Biota H i R i porowatością f zachodzi prosta relacja, tj. $H = R/f$.

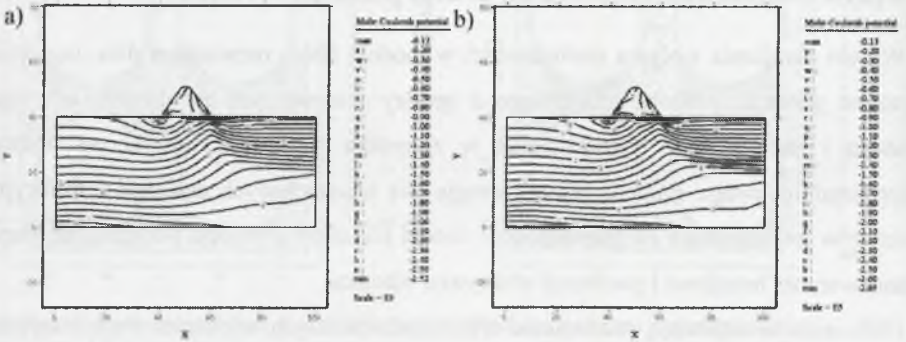
3. Wpływ nieliniowości modelu na proces pełzania ośrodka

W celu określenia wpływu nieliniowości w modelu Biota rozwiązano dwa zagadnienia, dotyczące pełzania podłoża gruntowego i grodzy ziemnej pod działaniem ich ciężaru własnego i naporu wody zgromadzonej w zbiorniku wodnym. Pierwsze na podstawie klasycznego liniowego modelu Biota i drugie dla wyznaczonych zależności funkcyjnych parametrów modelu Biota od porowatości – model nieliniowy. W obu przypadkach przyjęto te same warunki brzegowe i parametry efektywne ośrodka.

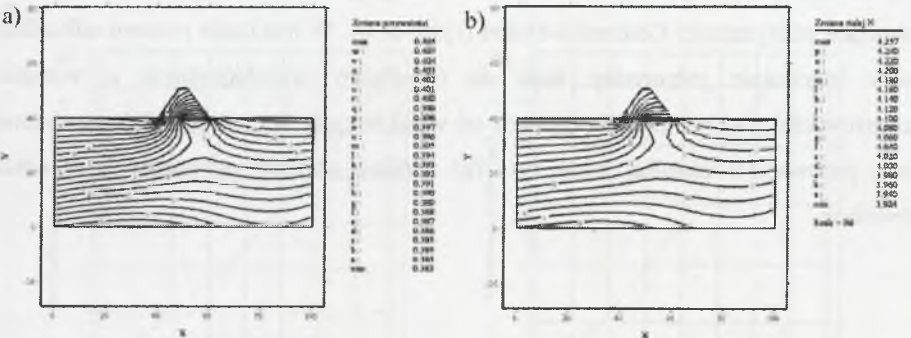
Obliczenia umożliwiają porównanie wszystkich istotnych wielkości stanu naprężenia, odkształcenia i pola wektorowego prędkości filtracji. Ograniczona objętość niniejszej pracy nie pozwala na pełny przegląd różnic pomiędzy modelem liniowym i nieliniowym. Zdecydowaliśmy się na przedstawienie porównania jedynie naprężeń pionowych (rysunek 5) i potencjału plastyczności Coulomba-Mohra (rysunek 6). W rezultacie procesu odkształcenia ośrodek pierwotnie jednorodny staje się ośrodkiem niejednorodnym o wartościach parametrów efektywnych modelu różnych od wyjściowych. Na rysunku 7a) przedstawiono zmianę porowatości ośrodka, a na rys. 7b) rozkład wartości parametru N w obszarze konsolidacji.



Rys. 5. Izolinie wektora przemieszczeń pionowych: a) model liniowy, b) model nieliniowy
 Fig. 5. Isolines of vertical displacement vector: a) linear model, b) non-linear model



Rys. 6. Wykres izol linii potencjału plastyczności Coulomba-Mohra dla: a) modelu liniowego, b) modelu nieliniowego
 Fig. 6. Isolines of Mohr -Coulomb plasticity potential for: a) linear model, b) non-linear model



Rys. 7a) Izolinie porowatości w obszarze konsolidacji po zakończeniu procesu pełzania ośrodka, b) izolinie wartości parametru efektywnego N po zakończeniu procesu konsolidacji
 Fig. 7a) Isolines of porosity in consolidation domain after the end of creeping process, b) isolines of value of an effective factor N after the end of consolidation process

4. Podsumowanie

Do określania parametrów efektywnych ośrodka zaadaptowano stosowaną w teorii homogenizacji metodę przejścia ze struktury mikroskopowej do makroskopowej. Dzięki temu uzyskano nieliniowy model konsolidacji, wynikający ze zmiany w czasie porowatości ośrodka oraz parametrów ciała Biota. Z porównania wyników eksperymentów numerycznych dla modelu liniowego i nieliniowego wynika, że wpływ nieliniowości na przemieszczenia i naprężenia ośrodka jest niewielki i mieści się w granicach 7% dla przyjętych parametrów fizycznych i geometrycznych ośrodka. Również kształt krzywych opisujących parametry ciała Biota jest taki sam w modelu liniowym i nieliniowym. Autorzy uważają jednak, że różnice w wielkości naprężeń i odkształceń ośrodka mogą być znacznie bardziej wyraźne i wpływ nieliniowości modelu na zachowanie się ośrodka gruntowego może być istotny, gdy mamy do czynienia z ośrodkiem uwarstwionym, w którym występują przewarstwienia gruntów słabych.

Niniejsza praca jest jednym z etapów analiz zmierzających do uszczegółowienia opisu konsolidacji oraz filtracji i „znalezienia” nowych rozwiązań z zakresu mechaniki ośrodka gruntowego.

Literatura

1. Auriault J.-L., Sanchez - Palencia E.: Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. „J. de Mécanique”, No. 16, 4, 1977, p. 575–603.
2. Auriault J.-L.: Homogenization: Application to Porous Saturated Media dans Two Phase Medium Mechanics. Publikacje Politechniki Gdańskiej, 1983, p. 1–56.
3. Auriault J.-L.: Mécanique des Milieux Poreux Saturés Déformables. Cours de 3^{ème} cycle MMGE, Grenoble 1986, p. 1–71.
4. Auriault J.-L., Strzelecki T., Bauer J., He S.: Porous Deformable Media Saturated by a Very Compressible Fluid. “Eur. J. Mech. A/Solid”, No. 9, 4, 1990, p. 373–392.
5. Biot M.A., Willis D.G.: The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. “J. Appl. Mech.”, 1957.
6. Emmrich R.: Experimental verification of electrokinetic consolidation model (praca doktorska). Politechnika Wrocławska, Institut of Geotechniki, Report ser. PRE No. 307, Wrocław 1984.

7. Fatt L.: The Biot-Willis Elastic Coefficients for a Sandstons. "J. Appl. Mech.", 1959, 26, p. 296–297.
8. Strzelecki T.(ed.), Kostecki S., Żak S.: Modelowanie przepływów przez ośrodki porowate (in polish). DWE, Wrocław 2007.

Recenzent: Dr hab. inż. Zenon Szycio, prof. Pol. Białostockiej