

Zenon SZYPCIO

Instytut Inżynierii Budowlanej  
Politechnika Białostocka

## KONCEPCJA STANÓW EFEKTYWNYCH PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA OŚRODKÓW ROZDROBNIONYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono równania dylatacji dla warunków: trójosiowego ściskania, trójosiowego rozciągania, dwuosiowego ściskania i prostego ścinania otrzymane z definicji stanów efektywnych plastycznego płynięcia. Otrzymane równania dylatacji mogą być z powodzeniem stosowane do weryfikacji wyników badań laboratoryjnych i budowy nowych modeli ośrodków rozdrobnionych.

## CONCEPT OF EFFECTIVE STATE OF PLASTIC FLOW IN GEOMATERIALS

**Summary.** In this paper the dilatancy equation for condition of: triaxial compression, triaxial extension, biaxial compression and simple shear obtained from definition of effective state of plastic flow are presented. The dilatancy equation can be used in verification of laboratory tests results and constitutive modeling of geomaterials.

### 1. Efektywne prędkości odkształceń plastycznych

Za efektywne prędkości odkształceń plastycznych uważa się prędkości postaciowe odkształceń plastycznych. Zatem, tensor efektywnych prędkości odkształceń plastycznych

$$\dot{\epsilon}_{ij}^o = \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad (1)$$

gdzie  $\dot{\epsilon}_{ij}^o$  jest dewiatorem tensora prędkości odkształceń.

## 2. Efektywne naprężenia plastycznego płynięcia

Tensor efektywnych naprężeń plastycznego płynięcia oznaczony jako  $\sigma_{ij}^{\circ}$  spełnia następujące cztery warunki:

- 1) *Tensor efektywnych naprężeń plastycznego płynięcia i tensor naprężeń efektywnych Terzagiego są współplaszczynowe.*

Zatem

$$s'_{ij} = s_{ij} = (1 + \chi_1) s_{ij}^{\circ} \quad (2)$$

$$p' = (1 + \chi_2) p^{\circ} \quad (3)$$

gdzie  $s_{ij}$ ,  $s_{ij}^{\circ}$  są to dewiatory odpowiednio tensora efektywnego naprężenia w sensie

Terzagiego i tensora efektywnych naprężeń plastycznego płynięcia,  $p'$  i  $p^{\circ}$  odpowiednio średnie naprężenia normalne, a  $\chi_1$  i  $\chi_2$  są skalarnymi wielkościami zależnymi od stanu naprężenia i prędkości odkształceń plastycznych.

- 2) *Całkowita moc dysypowana jest równa mocy dysypowanej stanów efektywnych plastycznego płynięcia*

$$\dot{w} = \dot{w}^{\circ} \quad (4)$$

gdzie

$$\dot{w} = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (5)$$

$$\dot{w}^{\circ} = \sigma_{ij}^{\circ} \dot{\epsilon}_{ij}^{\circ} \quad (6)$$

- 3) *Minimalne efektywne naprężenie główne jest równe minimalnemu efektywnemu naprężeniu głównemu plastycznego płynięcia*

$$\sigma_3' = \sigma_3^{\circ} \quad (7)$$

- 4) *Tensor efektywnych naprężeń plastycznego płynięcia powinien spełniać warunek stanu efektywnego plastycznego płynięcia*

$$F^{\circ}(\sigma_{ij}^{\circ}) = 0 \quad (8)$$

W pracy przyjmuje się funkcję  $F^{\circ}$  w postaci

$$F^o = p^o \sin \Phi^o - \sqrt{J_2^o} \left\{ \cos \theta + \frac{\sin \theta \sin \Phi^o}{\sqrt{3}} \right\} = 0 \quad (9)$$

Kąt tarcia wewnętrznego w stanach efektywnych plastycznego płynięcia  $\Phi^o$  jest równy kątowi tarcia wewnętrznego w stanach krytycznych

$$\Phi^o = \Phi_{cv} \quad (10)$$

Kąt

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{J_3^o}{J_2^{o/2}} \right) \quad (11)$$

$J_2^o, J_3^o$  - drugi i trzeci niezmiennik dewiatora efektywnych naprężeń plastycznego płynięcia.

### 3. Stany efektywne plastycznego płynięcia

Jako stany efektywne plastycznego płynięcia traktuje się stany określone tensorem efektywnych naprężeń plastycznego płynięcia  $\sigma_{ij}^o$  i tensorem efektywnych prędkości odkształceń plastycznego płynięcia  $\dot{\epsilon}_{ij}^o$ .

Reprezentantem stanów efektywnych plastycznego płynięcia są dobrze znane stany krytyczne i stany transformacji fazowej. Ogólnie, dla każdego stanu naprężenia i prędkości odkształceń można określić stany efektywne plastycznego płynięcia. W tym sensie stany efektywne plastycznego płynięcia są pewnym uogólnieniem stanów krytycznych i transformacji fazowej. Stany krytyczne i stany transformacji fazowej są szczególnym przypadkiem stanów efektywnych plastycznego płynięcia, dla których

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^o \quad (12)$$

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^o \quad (13)$$

## 4. Równania dylatacji

### 4.1. Trójosiowe ściskanie

Korzystając z definicji stanów efektywnych plastycznego płynięcia dla warunków trójosiowego ściskania, równanie dylatacji ma postać

$$\frac{q}{p'} = M_c^o - \left( 1 - \frac{1}{3} M_c^o \right) \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p}, \quad (14)$$

lub

$$\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \frac{1 + \sin \Phi^o}{1 - \sin \Phi^o} - \frac{3 - \sin \Phi^o}{3(1 - \sin \Phi^o)} \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_1^p}, \quad (15)$$

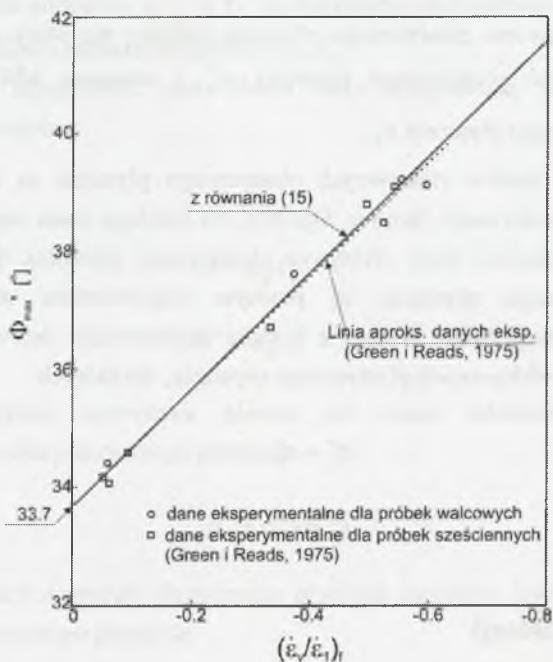
gdzie

$$M_c^o = \frac{6 \sin \Phi^o}{3 - \sin \Phi^o}, \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p + \dot{\epsilon}_3^p, \quad (17)$$

$$\dot{\epsilon}_q^p = \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_3^p). \quad (18)$$

Niech o prawidłowości otrzymanego równania dylatacji świadczą wyniki eksperymentalne otrzymane w badaniach trójosiowego ściskania przez Greena i Readsa [2] na próbkach walcowych i sześciennych (rys.1).



Rys. 1. Zależność  $\Phi'_{\max} - (\dot{\epsilon}_v / \dot{\epsilon}_1)_f$  dla piasków badanych przez Greena i Readsa (1975)

Fig. 1. Relationships between  $\Phi'_{\max} - (\dot{\epsilon}_v / \dot{\epsilon}_1)_f$  for sands tested by Green and Reads (1975)

Na rysunku 1 pokazano maksymalne wartości

$$\Phi_{\max} = \arctg \sqrt{\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}} - \frac{\pi}{4} \quad (19)$$

otrzymane z równania (15) dla  $(\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\epsilon}_3^p)$  uzyskanych w chwili utraty nośności próbki (failure) dla  $\Phi^0 = \Phi_{cv} = 33,7^\circ$ .

**4.2. Trójosiowe rozciąganie**

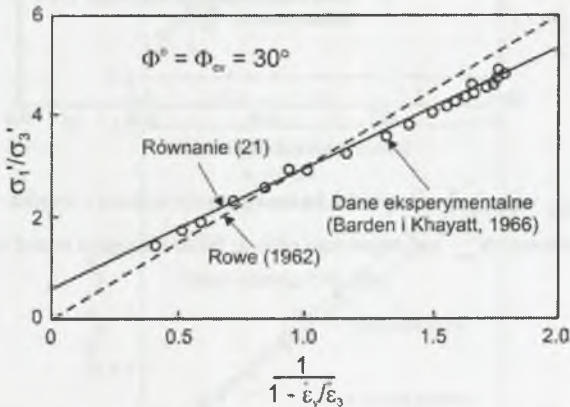
W warunkach trójosiowego rozciągania równanie dylatacji ma postać

$$\frac{q}{p'} = M_c^0 - \left(1 - \frac{2}{3} M_c^0\right) \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} \tag{20}$$

lub

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} = \frac{1 + \sin \Phi^0 - \frac{2}{3} \sin \Phi^0 \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_3^p}}{\left(1 - \sin \Phi^0\right) \left(1 - \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_3^p}\right)} \tag{21}$$

Poprawność równań dylatacji dla trójosiowego rozciągania potwierdzają wyniki badań Bardena i Khayatta [1] pokazane na rysunku 2.



Rys. 2. Zależność  $\sigma_1'/\sigma_3'$  od  $1/(1 - \dot{\epsilon}_v/\dot{\epsilon}_3)$  dla piasku River Welland

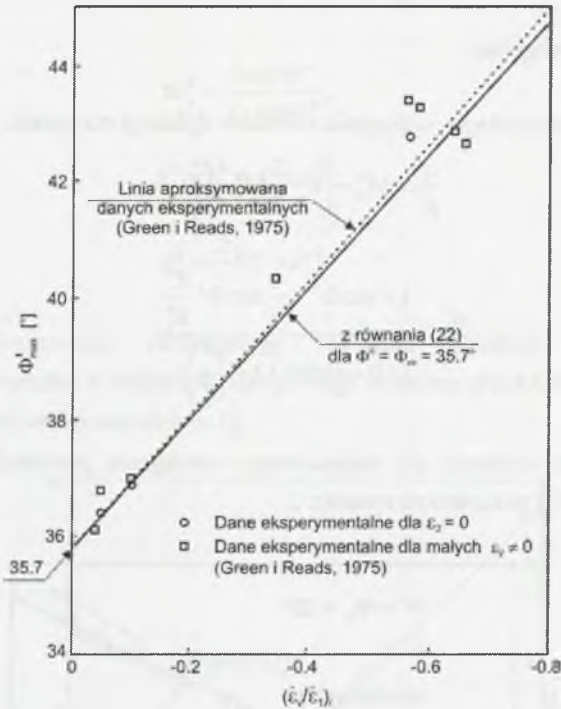
Fig. 2. Relationships between  $1/(1 - \dot{\epsilon}_v/\dot{\epsilon}_3)$  and stress ratio  $\sigma_1'/\sigma_3'$  for River Welland sand

**4.3. Dwuosiowe ściskanie**

Korzystając z definicji stanów efektywnych plastycznego płynięcia, równanie dylatacji dla warunków dwuosiowego ściskania otrzymamy w postaci [4]

$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3'} = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi^0}{2}\right) - \frac{1}{1 - \sin \Phi^0} \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_1^p} \tag{22}$$

Poprawność powyższej zależności w pełni potwierdzają badania Greena i Readsa [2] (rys. 3).



Rys. 3. Zależność  $\Phi'_{max} - (\dot{\epsilon}_v/\dot{\epsilon}_1)_r$  dla piasku badanego przez Greena i Readsa

Fig. 3. Relationship between  $\Phi'_{max}$  and strain rate ratio at failure for sand tested by Green and Reads

#### 4.4. Proste ścinanie

Analizując warunki prostego ścinania dla stanów efektywnych plastycznego płynięcia otrzymamy

$$\operatorname{tg}\Phi_{ss} = \frac{\sin\Phi^0 \cos^2\Phi^0 + \cos\Phi^0 \left\{ 1 - \sin\Phi^0 (1 - \sin\Phi^0) \right\} \frac{\dot{h}}{\dot{s}}}{\cos^3\Phi^0 + (1 - \sin\Phi^0) \sin^2\Phi^0 \frac{\dot{h}}{\dot{s}}} \quad (23)$$

Równanie Taylora i Bishopa [5] dla bezpośredniego ścinania ma postać

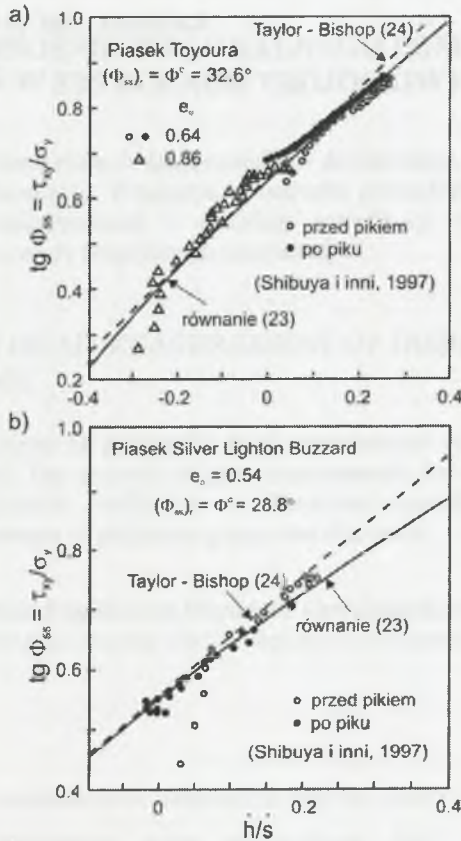
$$\operatorname{tg}\Phi_{ds} = \operatorname{tg}\Phi_r + \frac{\dot{h}}{\dot{s}} \quad (24)$$

gdzie:  $\text{tg}\Phi_{ss} = \frac{\tau}{\sigma_n}$  przy prostym ścinaniu,  $\text{tg}\Phi_{ds} = \frac{\tau}{\sigma_n}$  przy bezpośrednim ścinaniu,

$\dot{h}$  – prędkością wzrostu próbki podczas ścinania,  $\dot{s}$  – prędkością przemieszczenia poziomego, a  $\Phi_r$  – wartością rezydualną kąta tarcia wewnętrznego przy bezpośrednim ścinaniu.

Wartości  $\Phi_{ss}$  otrzymane z równania (23) są bardzo bliskie wartościom  $\Phi_{ds}$  otrzymanym z równania (24) dla  $\Phi^o = \Phi_r$ .

Poprawność równania (23) potwierdzają badania piasku Toyoura i Silver Lighton Buzzard [3].



Rys. 4. Zależność  $\lg\Phi_{ss} - \dot{h}/\dot{s}$  przy prostym ścinaniu: a) piasek Toyoura, b) piasek Silver Lighton Buzzard

Fig. 4. Relationships between stress ratio and dilatancy throughout shearing: a) Toyoura sand, b) Silver Leighton Buzzard sand

**Literatura**

1. Barden L., Khayatt A.: Geotechnique, 1966, Vol. 16, No. 2, 338-357.
2. Green G. F., Reads D. W.: Geotechnique, 1975, Vol. 25, No. 4, 333-356.
3. Shibuya S., Mitachi T., Tamate S.: Geotechnique, 1997, Vol. 47, No. 4, 769-790.
4. Szypcio Z.: Stany efektywne plastycznego płynięcia ośrodków rozdrobnionych. Politechnika Białostocka, Białystok 2002.
5. Taylor D. W.: Fundamentals of soil mechanics. John Wiley and Sons, New York 1948.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Ryszard Izbicki