ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA z. 117 Nr kol. 1337

Zbigniew BUCHALSKI
Politechnika Wrocławska
Instytut Cybernetyki Technicznej

PROBLEM PRZYDZIAŁU ZADAŃ I ZASOBÓW DO RÓŻNYCH MASZYN RÓWNOLEGŁYCH

Streszczenie. Praca dotyczy zagadnienia czasowo-optymalnego przydziału zasobu nieodnawialnego podzielnego w sposób ciągły i n zadań do m różnych maszyn równoległych. Każde zadanie może być wykonywane na dowolnej maszynie i w trakcie wykonywania nie może być przerywane. Przedstawiono algorytm heurystyczny. Algorytm ten przetestowany został dla losowo wybranych zestawów danych.

PROBLEM OF TASKS AND RESOURCES ALLOCATION IN DIFFERENT PARALLEL MACHINES

Summary. In the paper the problem of time-optimal allocation of n tasks and nonrenewable resources to m different parallel machines is considered. The mathematical model of the problem is formulated and heuristic algorithm is presented. Some computational results and effectiveness of this algorithm are shown.

1. Wstęp

Problematyka czasowooptymalnego rozdziału zadań i zasobów jest intensywnie rozwijana już od wielu lat [2, 4, 11, 12, 13, 14]. Niniejsza praca bazuje na wynikach badań tej problematyki i jest kontynuacją wcześniejszych prac autora [5, 6, 7, 8].

W prezentowanej pracy zakłada się, że czas wykonywania zadań na maszynach zależy od ilości zasobu nieodnawialnego podzielnego w sposób ciągły, przydzielonego tym maszynom. W rozdziale drugim formułuje się zadanie czasowo-optymalnego przydziału zadań i zasobu nieodnawialnego do m różnych maszyn równoległych.

Ponieważ problem należy do klasy NP-trudnych, więc jest dość skomplikowany. W rozdziale trzecim podaje się algorytm heurystyczny rozwiązujący postawiony problem. W rozdziale czwartym przedstawione są wyniki eksperymentów obliczeniowych przeprowadzonych na tym algorytmie.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy dyskretny system produkcyjny, o którym zakładamy, że:

(i) posiada m różnych maszyn $M = \{1,2,...,m\}$, na których należy wykonać n niezależnych zadań $J = \{1,2,...,n\}$,

(ii) zadanie może być wykonywane na dowolnej maszynie i w trakcie jego wykonywania nie może być przerywane,

(iii) posiada N jednakowych jednostek zasobu nieodnawialnego,

(iv) k-ta maszyna w trakcie wykonywania zadań jej przydzielonych $I_k \subset J$ wykorzystuje część jednostek zasobu nieodnawialnego u_k i w każdej chwili może wykonywać tylko jedno zadanie,

$$1 \le k \le m, \quad \sum_{k=1}^{m} u_k \le N, \quad u_k \ge 0,$$

(v) czas wykonania zadania i-tego na k-tej maszynie, jeżeli przydzielono jej u_k jednostek zasobu nieodnawialnego, określony jest funkcją

$$T_i(u_k, k) = a_{ik} + \frac{b_{ik}}{u_k}, \quad u_k \in \{1,2,...,N\}, \quad k \in M, \quad i \in J,$$

gdzie $a_{ik} > 0, b_{ik} > 0$ parametry określające i-te zadanie i k-tą maszynę.

Rozpatrywane zadanie sprowadza się do znalezienia czasowo-optymalnego przydziału zadań I_k i zasobu nieodnawialnego u_k do m maszyn równoległych przy spełnieniu powyższych założeń. Tak więc należy rozwiązać problem minimalizacji:

$$\min_{\substack{I_1, I_2, ..., I_m \\ u_1, u_2, ..., u_m}} \max_{1 \le k \le m} \left\{ \sum_{i \in I_k} T_i(u_k, k) \right\} \tag{1}$$

przy ograniczeniach:

(i) $I_l \cap I_s = \phi, \quad l,s = 1,2,...,m, \quad l \ne s, \quad \bigcup_{k=1}^{m} I_k = J,$

(ii) $\sum_{k=1}^{m} u_k \le N,$

(iii) $u_1, u_2, ..., u_m$ - całkowite dodatnie.

Ograniczenie (iii) powoduje, że postawiony problem jest dość skomplikowany. Dlatego też w dalszych rozważaniach przyjmiemy założenie upraszczające polegające na rezygnacji z dyskretności zasobu nieodnawialnego. Przy tym założeniu wyznaczymy przydział czasowo-optymalny zadań i zasobu do maszyn, a następnie zaokrąglimy otrzymaną wartość zasobu do najbliższych liczb naturalnych. Uwzględniając to, należy rozwiązać następujące zadanie minimalizacji dyskretno-ciągłej:

$$\min_{\substack{I_1,I_2,\ldots,I_m \\ u_1,u_2,\ldots,u_m}} \max_{1\le k\le m} \left\{ \sum_{i\in I_k} \widetilde{T}_i(u_k,k) \right\} \tag{2}$$

przy ograniczeniach:

(i) $I_l \cap I_s = \phi, \quad l,s = 1,2,\ldots,m, \quad l \neq s, \quad \bigcup_{k=1}^{m} I_k = J$

(ii) $\sum_{k=1}^{m} u_k \le N, \quad u_k \ge 0, \quad k = 1,2,\ldots,m$

gdzie:

$\widetilde{T}_i\colon[0,N]\times\{1,2,\ldots m\} \to R^+$ jest rozszerzeniem funkcji $T_i\colon\{1,2,\ldots,N\}\times\{1,2,\ldots m\} \to R^+$ określonym identycznym wzorem jak T_i, $\quad i \in J$.

$$\widetilde{T}_i(u_k,k) = a_{ik} + \frac{b_{ik}}{u_k}, \quad u_k \in [0,N], \quad i \in J.$$

Rozwiązaniami zadania (2) przy ograniczeniach (i), (ii) są wartości $u_k^*, I_k^*, k = 1,2,\ldots,m$.

LEMAT 1

Jeżeli $u_k^*, I_k^*, k = 1,2,\ldots,m$ są rozwiązaniami zadania (2), to:

(i) $\sum_{k\in M} u_k^* = N; \quad u_k^* > 0, k\colon I_k^* \neq \phi, k \in M; u_k^* = 0, k\colon I_k^* = \phi, k \in M,$

(ii) $\sum_{i\in I_k^*} \widetilde{T}_i(u_k^*,k) = const, k\colon I_k^* \neq \phi, \quad k \in M.$

Warunek (i) w LEMACIE 1 mówi, że w przydziale czasowo-optymalnym zadań i zasobów do maszyn wykorzystuje się wszystkich N zasobów, a warunek (ii), że czasy pracy tych maszyn, które wykonują jakieś zadania,są identyczne.

Zdefiniujmy teraz funkcję $Q(I_1,I_2,\ldots,I_m)$ określoną dla m zbiorów $I_1,I_2,\ldots,I_m$, dla których zachodzi $I_l \cap I_s = \phi, \quad l,s = 1,2,\ldots m, \quad l \neq s; \quad \bigcup_{k=1}^{m} I_k = J$.

Wartość funkcji $Q(I_1,I_2,\ldots,I_m)$ dla ustalonych m zbiorów $I_1,I_2,\ldots,I_m$ spełniających powyższe ograniczenia jest rozwiązaniem następującego układu równań:

$$\sum_{i\in I_k} a_{ik} + \frac{\sum_{i\in I_k} b_{ik}}{u_k} = Q(I_1,I_2,\ldots,I_m), k\colon I_k \neq \phi, k \in M, \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{k\colon I_k\neq\phi \\ k\in M}} u_k = N; \quad u_k > 0, k\colon I_k \neq 0, k \in M.$$

Zadanie (2) przyjmuje więc ostateczną postać:

$$\min_{I_1, I_2, \dots, I_m} Q(I_1, I_2, \dots, I_m), \tag{4}$$

przy ograniczeniach:

(i) $I_l \cap I_s = \phi, \quad l, s = 1,2,\dots,m, \quad l \neq s,$

(ii) $\bigcup_{k=1}^{m} I_k = J.$

Jeżeli $I_1^*, I_2^*, \dots, I_m^*$ jest rozwiązaniem zadania (4), to $u_k^*, I_k^*, k \in M$, gdzie

$$u_k^* = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i \in I_k^*} b_{ik}}{Q\left(I_1^*, I_2^*, \dots, I_m^*\right) - \sum_{i \in I_k^*} a_{ik}}, & k: I_k^* \neq \phi, k \in M, \\ 0, & k: I_k^* = \phi, k \in M \end{cases} \tag{5}$$

jest rozwiązaniem zadania (2).

Z definicji funkcji Q określonej przez (3) wynika, że wartość funkcji Q dla odpowiednich $I_1, I_2, \dots, I_m$ jest rozwiązaniem następującego równania:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sum_{i \in I_k} b_{ik}}{N\left(Q - \sum_{i \in I_k} a_{ik}\right)} = 1, \tag{6}$$

spełnia

$$Q > \sum_{i \in I_k} a_{ik}, k: I_k \neq \phi, k \in M \tag{7}$$

Można wykazać, że funkcja Q jest dobrze określona, tzn. istnieje jedno i tylko jedno rozwiązanie równania (6) spełniające (7) dla ustalonych $I_1, I_2, \dots, I_m$.

3. Algorytm heurystyczny

Przebieg algorytmu heurystycznego jest następujący:

Krok 1: Oblicz czasy wykonania zadań na poszczególnych maszynach dla $u_i = u_i^0, i = 1,2,\dots,n$.

Krok 2: Znajdź czasowo-optymalne uszeregowanie n zadań na m różnych maszynach $I_1, I_2, \dots, I_m$ przyjmując, że zadania są niepodzielne oraz czas realizacji i-tego zadania na k-tej maszynie jest równy $\widetilde{T}_i\left(u_i^0, k\right) \triangleq T_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,n, k \in M$.

Krok 3: Wyznacz liczby zasobu przydzielonego poszczególnym maszynom $(u_1, u_2, \dots, u_m)$, przy założeniu że maszyny te wykonują odpowiednio zadania $I_1, I_2, \dots, I_m$. Dla tych maszyn k, dla których $I_k = \phi$ (tzn. nie są na nich wykonywane żadne zadania), przyjmij, że $u_k = 0$; natomiast dla pozostałych maszyn wyznacz u_k w taki sposób, aby czasy pracy tych maszyn były identyczne oraz żeby

$$\sum_{\substack{k \in M \\ k: I_k \neq \phi}} u_k = N; u_k > 0, k: I_k \neq \phi, k \in M.$$

Omówimy teraz poszczególne kroki algorytmu:

Krok 1: Wielkości $u_i^0, i = 1,2,\dots,n$ powinny być tak zdefiniowane, aby charakteryzowały poszczególne zadania. Przyjęliśmy, że $u_i^0 = N, i = 1,2,\dots,n$. Stąd czas realizacji i-tego zadania na k-tej maszynie będzie równy $\bar{T}_i(N,k) = a_{ik} + \frac{b_{ik}}{N}, i = 1,2,\dots,n, k \in M$.

Krok 2: W kroku tym należy rozwiązać klasyczny problem szeregowania n niepodzielnych zadań na m równoległych maszynach. Problem ten jest, jak wiadomo, problemem NP-trudnym [1,3]. Jednakże istnieje szereg algorytmów heurystycznych [9,10] dla tego typu zagadnienia. Tutaj przyjęto algorytm C z pracy [10]. Algorytm ten ma następującą postać:

<u>krok a:</u> Dla każdego zadania wyliczamy wartość $T_{i,\min} = \min_{1 \le k \le m} T_{ik}, i = 1,2,\dots,n$. Następnie szeregujemy zadania wg niemalejących wartości $T_{i,\min}$, tworząc listę zadań,

<u>krok b:</u> Podstawiamy $I_k = \phi, t_k = 0, k = 1,2,\dots,m$,

<u>krok c:</u> Dla pierwszego zadania z listy (oznaczmy go przez i) znaleźć $1 \le k \le m$, dla których zachodzi $t_k + T_{ik} \le t_l + T_{il}, l = 1,2,\dots,m$, i podstawić $I_k = I_k \cup \{i\}, t_k = t_k + T_{ik}$ oraz wyrzucić to zadanie z listy. Jeżeli otrzymana lista nie jest pusta, to przejść do początku kroku c. W przeciwnym wypadku STOP.

Krok 3: W kroku tym należy znaleźć Q będące rozwiązaniem równania (6) i spełniające:

$$Q > \max_{\substack{k: I_k \neq \phi \\ k \in M}} \left\{ \sum_{i \in I_k} a_i \right\}$$

Następnie przyjąć, że:

$$u_k = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i \in I_k} b_{ik}}{Q(I_1^*, I_2^*, \dots, I_m^*) - \sum_{i \in I_k} a_{ik}}, & k: I_k \neq \phi, k \in M \\ 0, & k: I_k \neq \phi, k \in M \end{cases}$$

4. Przykłady testujące i wyniki obliczeń

Na bazie powyższego algorytmu przeprowadzono badania numeryczne. Dla określonej liczby n zadań, m maszyn wygenerowano 15 zestawów $a_{ij}, b_{ij}, i = 1,2,\dots,n, j = 1,2,\dots,m$. Liczby a_{ij}, b_{ij} wylosowane zostały ze zbioru $\{0{,}0.1{,}0.2,\dots,9.9{,}10.0\}$ przez generator o jednostajnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wyniki przedstawione zostały w tablicy 1.

Tablica 1

Wyniki badań numerycznych algorytmu heurystycznego

n/m	S sek	M sek
30/2	2,3	2
30/4	3,3	3
30/5	3,7	4
30/10	5,8	6
50/2	4,8	5
50/4	6,6	6
50/5	7,1	7
50/10	10,4	10
70/2	8,0	8
70/4	9,9	10
70/5	11,0	11
70/10	15,6	15

W kolumnie S znajduje się średni czas obliczeń w sek dla 15 zestawów danych przy różnych liczbach n zadań i m maszyn, a w kolumnie M mediana tych czasów.

Przejdźmy teraz do analizy różnicy między rozdziałem zadań i zasobów do różnych maszyn równoległych, wyznaczonym przez zaproponowany wyżej algorytm heurystyczny, a czasowo-optymalnym rozdziałem zadań i zasobów, ale tylko dla przypadku dwóch różnych maszyn, uzyskanym we wcześniejszych pracach autora [5].

Jako kryterium porównawcze rozważymy wartość:

$$\delta \triangleq \frac{Q(I_1^H, I_2^H, \dots, I_m^H) - Q(I_1^*, I_2^*, \dots, I_m^*)}{Q(I_1^*, I_2^*, \dots, I_m^*)} \times 100\%,$$

gdzie: $Q\left(I_1^H, I_2^H, \dots, I_m^H\right)$ - czas wykonania zadań dla przydziału suboptymalnego wyznaczonego przez podany algorytm heurystyczny,

$Q\left(I_1^*, I_2^*, \ldots, I_m^*\right)$ - czas wykonania zadań dla przydziału czasowo-optymalnego.

Wyniki dla m=2 przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Wynik porównania algorytmu optymalnego i heurystycznego

n/2	S_σ	M_σ
	%	%
30/2	2,9	2,8
50/2	3,1	3,0
70/2	3,0	2,9

W kolumnie S_σ znajduje się średnia wartość σ wyrażona w % dla 15 zestawów danych, a w kolumnie M_σ - mediana z wartości piętnastu σ.

Analizując tablicę 2 widzimy, że błąd względny między czasem wykonania zadań przy przydziale suboptymalnym a czasem wykonania zadań przy przydziale czasowo-optymalnym jest rzędu 3%.

Z powyższej analizy wynika, że zaproponowany algorytm heurystyczny charakteryzuje się stosunkowo krótkim czasem obliczeń w stosunku do algorytmu wyznaczającego przydział czasowo-optymalny i niewielką różnicą między czasem wykonania zadań dla przydziału suboptymalnego a czasem wykonania zadań dla przydziału czasowo-optymalnego. Dlatego też algorytm ten z powodzeniem można zastosować, gdy pracujemy w systemie on-line.

LITERATURA

1. Błażewicz J.: Złożoność obliczeniowa algorytmów i problemów szeregowania zadań. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1979.
2. Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Algorytmy sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1979.
3. Błażewicz J., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.: Scheduling subject to resource constraints: classification and complexity. Discrete Appl. Math., Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.
4. Bubnicki Z.: Optymalizacja kompleksów operacji w sterowaniu dyskretnymi procesami produkcyjnymi. Prace VII KKA, tom III, Rzeszów 1977.
5. Buchalski Z.: Pewne zagadnienie przydziału zadań i zasobu nieodnawialnego do dwóch różnych maszyn w dyskretnym systemie produkcyjnym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Automatyka, z. 74, str. 49-57.

6. Buchalski Z.: Some problem of time-optimal allocation of memory and tasks in multiprocessor computer systems. Polish Cyberntical Society, Vol. 2 Cybernetics in control and computer systems engineering, Warsaw 1985, pp. 41-49.
7. Buchalski Z.: Zagadnienia czasowo-optymalnego szeregowania zadań i rozdziału zasobów w systemie wielomaszynowym. Prace Konferencji Naukowo-Technicznej "Problematyka budowy i eksploatacji maszyn i urządzeń w ujęciu systemowym", AGH Kraków 1986, str. 62-69.
8. Buchalski Z.: Algorytm dla problemu szeregowania zadań na maszynach dla pewnych funkcji czasu wykonywania zadań. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Nr 970, Seria Automatyka, z. 94, str. 61-68.
9. Dempster M.A.H., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.: Deterministic and stochastic scheduling, Proceedings of an Advanced Study and Research Institute on Theoretical Approaches to Scheduling Problems, 1981.
10. Ibarra O.H., Kim C.E.: Heuristic algorithms for scheduling independent tasks on nonidentical processors. Journal of Assoc. Comput. Mach. 24, 1977, pp. 280-289.
11. Ishii H., Martel C., Masuda T., Nishida T.: A generalized uniform processor system. Oper. Res., vol. 33, nr 2, 1985, pp. 346-362.
12. Słowiński R.: Multiobjective Network Scheduling with Efficient Use of Renewable and Non-Renewable Resources. European Journal of Operational Research, nr 7, 1981, pp. 265-273.
13. Węglarz J.: Project Scheduling with Continously-Divisible Doubly Constrained Resources, Mgt. Sci, vol. 27, nr 3, 1981.
14. Węglarz J.: Sterowanie w systemach typu kompleks operacji. PWN, Warszawa-Poznań 1981.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Węglarz

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

Abstract

This paper deals with the problem of time-optimal allocation of nonrenewable resources and n tasks to m different parallel machines for some processing time function $T_i(u_k,k) = a_{ik} + \frac{b_{ik}}{u_k}, u_k \in \{1,2,\ldots,N\}, k \in M, i \in J$ where $a_{ik} > 0, b_{ik} > 0$ are parameters determined i-th task and k-th machines. It is shown, that the problem is of NP-type and it is very difficult problem. In this paper heuristic algorithm is presented. The results of the numerical experiments for n=30,50,70 and m=2,4,5,10 are enclosed.