ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1996
Seria: AUTOMATYKA z.117 Nr kol.1337

Jan KAŁUSKI
Politechnika Śląska

TEORIOGROWY MODEL BALANSOWANIA LINII MONTAŻOWEJ

Streszczenie: W pracy zaproponowano teoriogrowy model balansowania linii montażowej. W tym celu problem alokacji operacji do stanowisk na linii montażowej rozpatrzono jako n - osobową hierarchiczną dynamiczną grę z koalicjami. Omówiono struktury: hierarchiczną, koalicyjną i informacyjną danej gry. Sformułowano wynik gry dynamicznej z koalicjami bez rozszerzenia i z rozszerzeniem informacyjnym. Rozwiązano dwa przykłady balansowania linii montażowej obrazujące proponowany teoriogrowy model.

GAME - THEORETICAL MODEL OF THE ASSEMBLY LINE BALANCING PROBLEM

Summary: The author of this paper attemted to apply dynamic n - person games with coalitions to describe particular discrete industrial processes, i.e. the assembly line. The presented game theoretical-model will concern widely know classic problem of assembly line balancing without taking into account additional constraints. In this paper a classic problem of assembly line balancing is formulated and the prospect of game-theoretical processes description of multi - stage allocation to work places is presented. Next the game - theoretical approach to dynamic hierarchical systems analysis is shown. Finally two examples of game - theoretical representations of simple assembly line balancing problems are solved.

1. Wstęp

Problem balansowania (równoważenia) szeregowej linii montażowej po raz pierwszy był opublikowany przez M.E.Salvesona [13], [16], chociaż wcześniej pracę magisterską (nie publikowaną) na ten temat wykonał B.Bryton [3]. Problem ten polega na pogrupowaniu operacji montażowych w dopuszczalne podzbiory, które tworzą stanowiska pracy na linii montażowej. Operacje te wykonywane są przez monterów lub roboty.

Proces montażu na linii szeregowej jest dyskretnym procesem przemysłowym. W odróżnieniu od procesów ciągłych w czasie i zdyskretyzowanych w czasie, dyskretne procesy przemysłowe są to kompleksy operacji uwarunkowane w czasie i przestrzeni niepodzielnością wykonywania poszczególnych operacji. Procesy te modelowane są obecnie z wykorzystaniem przede wszystkim różnego rodzaju metod dyskretnego programowania matematycznego.

Najczęściej używanymi metodami w tym zakresie są: dyskretne programowanie dynamiczne, programowanie liniowe, metody sieciowe, metoda podziału i ograniczeń oraz powstała na bazie tej metody i programowania dynamicznego - metoda programowania wieloetapowego. Metoda programowania wieloetapowego pozwala na stosunkowo prosty opis modelowanego procesu. Jej algorytmy: binarny, szeregowania, przydziału oraz harmonogramowania dają duże możliwości w modelowaniu dyskretnych procesów przemysłowych. Prace dotyczące zastosowań metod programowania matematycznego w omawianych procesach są tak liczne, że nawet ich skromna monografia zajęłaby wielosetstronicowe opracowanie. Kompletne studium i literatura, dotycząca balansowania linii montażowej, zostały zawarte w monografii F.Mareckiego [10].

Wymienione metody opisu dyskretnych procesów przemysłowych są metodami deterministycznymi. Nieliczne próby opisu tych procesów za pomocą metod probabilistycznych można znaleźć w pracach [6], [8], [10] oraz [7], gdzie oprócz prostej randomizacji problemu również wykorzystywane są dyskretne i ciągłe procesy Markowa z przeliczalną lub nieprzeliczalną liczbą stanów.

W 1984 roku w książce pod tytułem "Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych " [1] zwrócono uwagę na możliwość zastosowania metod teorii gier do analizy i syntezy niektórych dyskretnych procesów przemysłowych. Po dzień dzisiejszy autorowi niniejszego opracowania nie są jednak znane próby opisu omawianych procesów z wykorzystaniem metod tej teorii, chociaż opis procesów ze zdarzeniami dyskretnymi z zastosowaniem niektórych metod teorii gier zostały zapoczątkowane już w [5].

Teoria gier, wywodząca się bezpośrednio z teorii polioptymalizacji, służy do opisu sytuacji konfliktowych występujących w procesie (grze) między co najmniej dwoma decydentami (graczami). Konflikty mają różny przebieg: antagonistyczny lub nieantagonistyczny w zależności od charakteru prowadzonej gry i celu gry, który przyświeca poszczególnym graczom. Teoria gier od chwili swego powstania stała się znakomitym narzędziem matematycznym służącym do opisu zagadnień przede wszystkim w ekonomii, psychologii i wojskowości. W ostatnich latach obserwujemy liczne zastosowania tej teorii również w różnych dziedzinach techniki. Znaczące wyniki otrzymano na przykład w teorii sterowania dynamicznych systemów (na przykład ekosystemy - sterowanie zanieczyszczeniami środowiska naturalnego z uwzględnieniem kosztów (zob. np. [2],[4],[13]), gdzie występujące sytuacje konfliktowe można było modelować za pomocą dwuosobowych gier antagonistycznych różniczkowych oraz wieloosobowych gier nieantagonistycznych (kooperacyjnych).

Zachęcony tymi wynikami autor niniejszego opracowania poczynił próbę zastosowania teorii wieloosobowych gier dynamicznych z koalicjami do opisu wybranego dyskretnego procesu przemysłowego, jakim jest proces montażowy. Przedstawiony teoriogrowy model będzie dotyczył szeroko znanego klasycznego problemu balansowania tej linii bez

uwzględnienia dodatkowych ograniczeń. Uwzględniane są jedynie: zbiór operacji z relacjami kolejności oraz czasy operacji przy zadanym cyklu linii montażowej. W związku z tym w punkcie drugim niniejszej pracy sformułowano klasyczny problem balansowania linii montażowej oraz pokazano możliwość teoriogrowego opisu wieloetapowego procesu alokacji operacji do stanowisk pracy. W punkcie trzecim pracy przedstawiono teoriogrowe podejście do analizy dynamicznych hierarchicznych systemów [9], [12]. Na podstawie tego w punkcie czwartym przedstawiono model problemu balansowania linii montażowej w postaci wieloosobowej wieloetapowej gry dynamicznej z koalicjami. Model ten ma charakter hierarchiczny, tzn. określony jest decydent centralny realizujący globalny cel sterowania i ustalający kolejność wykonywania poszczególnych zadań na linii montażowej oraz lokalni decydenci (gracze) realizujący lokalne zadania na agregacie znajdującym się na danym stanowisku pracy linii montażowej, którzy mogą tworzyć odpowiednie koalicje. Podano sformalizowany opis zachowań graczy oraz maxmin wynik gry. W punkcie piątym rozwiązano dwa przykłady teoriogrowego opisu prostych zadań balansowania linii montażowej bez dodatkowych ograniczeń. Do sprawdzenia teoriogrowego rozwiązania drugiego przykładu gry zastosowano metodę programowania wieloetapowego W zakończeniu opracowania zawarto uwagi i wnioski co do stosowania teorii gier w dyskretnych procesach przemysłowych oraz wykaz cytowanej literatury.

2. Problem balansowania linii montażowej

Za pracą [10] problem BLM sformułujemy w następujący sposób: Należy pogrupować operacje montażowe w dopuszczalne podzbiory, które tworzą stanowiska pracy na linii montażowej. Przyjmuje się, że dany jest zbiór operacji z relacjami kolejności oraz dane są czasy wykonywania operacji. Wyróżnia się dwa warianty BLM:

- dla zadanego cyklu należy wyznaczyć minimalną liczbę podzbiorów operacji, które tworzą stanowiska pracy,
- dla zadanej liczby stanowisk pracy należy wyznaczyć minimalny cykl.

W naszym pracowaniu będzie rozważany pierwszy wariant BLM w jego klasycznej formie. Klasyczny problem BLM sformułujemy w następującej postaci:
Dany jest zbiór operacji montażowych :

$$\Omega = \{\omega_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

gdzie, ω_i - i- ta operacja, n - liczba operacji.
Relacja kolejności wykonywania operacji dana jest macierzą:

$$G = [\gamma_{k,i}], \quad k, i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Elementy tej macierzy są liczbami binarnymi

$$\gamma_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli operacja } \omega_k \text{ jest bezpośrednim} \\ & \text{poprzednikiem operacji } \omega_i; \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \tag{3}$$

Czasy operacji dane są następującym wektorem:

$$\Theta = [\vartheta_i] \tag{4}$$

gdzie ϑ_i - czas wykonania operacji ω_i.

Cykl c montażu spełnia warunek:

$$\max_{1 \le i \le n} \vartheta_i \le c < \sum_{i=1}^{i=n} \vartheta_i \tag{5}$$

Niech Ω_m, $m = 1, 2, \ldots, M$, m - ty kolejny podzbiór operacji tworzący stanowisko pracy (M - nieznana liczba podzbiorów operacji). Wówczas dopuszczalny balans linii montażowej musi spełniać następujące ograniczenia:

$$\begin{aligned} &\bigcup_{m=1}^{m=M} \Omega_m = \Omega, \\ &\Omega_\mu \cap \Omega_m = \Phi, \quad \mu \ne m \\ &\sum_{\omega_i \in \Omega_m} \vartheta_i \le c, \quad m = 1, 2, \ldots, M \\ &\forall_k \forall_i \exists_{\mu \le m} [(\gamma_{k,i} = 1) \wedge (\omega_k \in \Omega_\mu)] \Rightarrow (\omega_i \in \Omega_m) \end{aligned} \tag{6}$$

Natomiast optymalny balans linii montażowej musi spełnić kryterium minimalizacji nie wykorzystanego czasu pracy, tzn.:

$$\sum_{m=1}^{m=M} (c - \sum_{\omega_i \in \Omega_m} \vartheta_i) \to \min \tag{7}$$

Zauważmy, że minimalizacja nie wykorzystanego czasu pracy równoważna jest minimalizacji liczby stanowisk pracy na linii montażowej.

Ze sformułowania problemu wynika, że balansowanie linii montażowej jest to wieloetapowy proces decyzyjny, polegający na alokacji określonego dopuszczalnego zbioru operacji do stanowisk pracy na linii montażowej w określonych dyskretnych chwilach czasu, zwanych cyklem montażu, z uwzględnieniem relacji kolejnościowych. Tak rozumiany balans jest procesem dynamicznym rozwijającym się w czasie. Liczba dopuszczalnych podzbiorów operacji utworzonych na danym etapie decyzyjnym (w danym cyklu), operacji spełniających ograniczenia kolejnościowe, zależy od czasów ϑ_i wykonywania operacji oraz długości cyklu c i może być znaczna. Wzajemna relacja między sumą czasów operacji tworzących dopuszczalne podzbiory a długością cyklu na danym etapie decyzyjnym stanowi podstawę

różnych reguł eliminacji tzw. podzbiorów nieperspektywicznych, tzn. takich, z których w następnych etapach nie da się utworzyć (wygenerować) zbiorów optymalnych w sensie przyjętego kryterium optymalizacyjnego. O eliminacji danego nieperspektywicznego podzbioru operacji na podstawie określonych reguł (zob. na przykład metodę programowania wieloetapowego w zastosowaniu do BLM [10],[11]) decyduje projektant linii montażowej, który w wieloetapowym procesie decyzyjnym wyznacza optymalny balans.

Analizując pracę linii montażowej dostrzegamy w niej nie tylko decydenta, który kierując się nadrzędnymi kryteriami, ustala podzbiory operacji przeznaczone do wykonania w określonym cyklu, reguły eliminacji nieperspektywicznych podzbiorów operacji i ostatecznie ustala optymalny balans linii montażowej. Widzimy również zbiór operatorów - monterów lub robotów przemysłowych, wykonujących zbiór operacji Ω. Liczność zbioru operatorów dokładnie odpowiada liczbie cykli potrzebnych do kompletnego zmontowania obiektu na linii montażowej. Liczba ta, jak widać, jest znacznie mniejsza niż liczba pojedynczych operacji zbioru Ω. Jest to oczywiste, gdyż na danym stanowisku pracy w określonym cyklu montażu (na danym etapie montażu) znajduje się tylko jedno stanowisko pracy z jednym monterem, który wykonuje tylko jemu przyznaczony określony podzbiór Ω_m operacji montażowych.

Dla celów formalizacji teoriogrowego modelu BLM przyjmujemy jednak, że monterów jest dokładnie, tyle ile operacji montażowych w zbiorze Ω. Będą oni dalej nazywani fikcyjnymi monterami. Po zakończeniu BLM ich uprawnienia, wynikające z przydziału do określonego stanowiska pracy, będą scedowywane na jednego określonego montera rzeczywistego, wykonującego wszystkie przydzielone operacje na danym stanowisku pracy. W ten sposób formalnie można już mówić o pewnej grze pierwotnej rozgrywającej się pomiędzy graczami - monterami fikcyjnymi na linii montażowej kierowanej przez gracza nadrzędnego - decydenta, który ustala reguły gry, sam jednak bezpośredniego udziału w grze nie bierze.

Z opisu przebiegu BLM wynika, że traktując proces balansowania jako określoną grę, mamy tu do czynienia z $N=n+1$ - osobową grą (decydent plus n monterów fikcyjnych). W tej grze każdy z n graczy na danym etapie procesu montażu ma różne możliwości należenia do określonych podzbiorów, które będziemy nazywali koalicjami. W związku ze skończonym zbiorem operacji Ω, oraz relacjami kolejności wykonywania operacji, liczba możliwości zrzeszania się w koalicji na danym etapie gry będzie również skończona. Możliwości należenia graczy do różnych koalicji na danym etapie gry będziemy nazywali ich strategiami. Przynależność gracza do określonej koalicji daje mu określoną wypłatę w grze. Będziemy uważali, że jego indywidualna wypłata poza koalicją bedzie prawie zawsze mniejsza niż jego wypłata wynikająca z podziału wygranej dla całej koalicji. Funkcja użyteczności, na podstawie której dla danej koalicji będziemy przypisywali jej wielkość wypłaty (na przykład w nowych polskich złotych - PLN), będzie odwrotnie proporcjonalna do nie wykorzystanego czasu pracy w danym cyklu. W ten sposób na danym etapie gry ta koalicja będzie wygrywajacą, dla której wielkość nie wykorzystanego czasu pracy będzie najmniejsza.

W następnym punkcie pracy przedstawimy niezbędne wiadomości dotyczące kooperacyjnej teorii gier i na tym tle pokażemy teoriogrowe podejście do analizy dynamicznych hierarchicznych systemów, która to analiza już bezpośrednio dotyczy teoriogrowego modelu BLM.

3. Wieloosobowe gry z koalicjami

3.1. Niezbędne pojęcia i definicje

Wieloosobową grę z koalicjami będziemy nazywali taką grę, w której udział bierze co najmniej trzech graczy z możliwością utworzenia co najmniej dwóch różnych koalicji. Każdy z graczy w danej grze ma określony skończony zbiór strategii, którymi gra. Wysokość indywidualnej wygranej każdego gracza (wypłaty w grze) zależy od jego strategii oraz możliwości kooperowania z innymi graczami. Określoną klasę podzbiorów (będących koalicjami zbioru graczy) będziemy nazywali strukturą koalicyjną. Dwie struktury koalicyjne są różne, jeżeli różnią się co najmniej jedną koalicją. Dalej sformułujemy dodatkowe warunki różnicujące struktury koalicyjne. Dopuszczalne są koalicje jednoosobowe. Koalicją pełną będziemy nazywali koalicję utworzoną ze wszystkich graczy biorących udział w grze. Koalicja nie zawierająca ani jednego gracza będzie koalicją pustą. Wynikiem wieloosobowej gry z koalicjami będziemy nazywali wektor wypłat wszystkich graczy tworzących określoną strukturę koalicyjną. Wynikiem gry, będącym w pewnym sensie w równowadze koalicyjnej (kooperacyjnej), będziemy nazywali wynik uzyskany na podstawie określonej procedury maxmin. Wynik taki zapewnia, że żaden gracz ani żadna koalicja nie będzie miała pretensji co do wysokości własnych wygranych ani też do wysokości wygranych koalicjantów.

Sformalizowany opis klasycznej kooperacyjnej teorii gier można znaleźć na przykład w [14] i tutaj nie będzie przedstawiany. Wspomnijmy tylko, że wśród kooperacyjnych wieloosobowych gier wyróżniamy dwie klasy gier: gry z wypłatami ubocznymi i gry bez wypłat ubocznych. W grze bez wypłat ubocznych gracze mogą koordynować swoje działania po to, aby osiągnąć pewien układ wypłat przewidziany w postaci normalnej gry, ale nie mogą zmieniać faktycznych wypłat poprzez żądanie od innych członków koalicji dodatkowych wypłat, na przykład honorariów, za podjęcie wspólnych działań. Należy zauważyć, że w literaturze ten dział teorii gier jest jeszcze mało zbadany. W grze z wypłatami ubocznymi swoją decyzję o utworzeniu koalicji gracze mogą uzależnić od wyników negocjacji o podział wspólnej wygranej tej koalicji.

Klasyczne elementy wieloosobowych gier z koalicjami w zastosowaniu do rozważanego problemu BLM stanowią tylko część zagadnień potrzebnych do sformułowania teoriogrowego modelu BLM. W celu dokładniejszego opisu należy uwzględnić dynamiczny charakter gry oraz hierarchiczną strukturę wymiany informacji w rozważanym systemie.

3.2. Teoriogrowe podejście do analizy dynamicznych systemów hierarchicznych

Przedstawiony w punkcie pierwszym problem BLM w terminologii teorii wieloosobowych gier z koalicjami uwidacznia, że rozważany system linii montażowej z jednym decydentem i określoną liczbą monterów jest systemem hierarchicznym. Proces podejmowania decyzji przez decydenta o alokacji operacji do stanowisk pracy na linii montażowej jest wieloetapowym dynamicznym procesem decyzyjnym. Zatem teoriogrowe podejście do analizy takich systemów jest punktem wyjścia do zbudowania teoriogrowego modelu BLM.

Rozwój teorii wieloetapowych hierarchicznych dynamicznych gier n - osobowych z koalicjami był zapoczątkowany w pracy [12]. Wiele informacji na ten temat można znaleźć w [17]. W pracach tych analiza struktury informacyjnej, z początku gier dwuosobowych, dała możliwość sformułowania pewnych prawidłowości co do dynamiki gry, na które nie pozwalały gry statyczne, gdyż rozwijanie się decyzyjnego procesu w czasie daje możliwość efektywnego wykorzystania napływu informacji, a stąd adaptacji do zmian warunków dynamicznego procesu, jakim jest proces podejmowania decyzji przez graczy z etapu na etap. W następnych pracach uogólniono otrzymane wyniki na przypadek n - osobowej gry o wybranych strukturach hierarchicznych oraz na n - osobową grę z ustaloną kolejnością ruchów graczy.

W niniejszej pracy, w celu otrzymania optymalnych rozwiązań w wieloetapowej hierarchicznej n - osobowej grze, wykorzystano metodę teorii gier, która polega na wyborze przez centrum takiego programu działań, który minimalizuje przyjęte kryterium optymalizacji, jakim jest czas wykonania przez graczy wszystkich zadań (operacji) z uwzględnieniem ograniczeń narzuconych przez centrum.

Analizę przedstawionego zadania przeprowadza się na podstawie elastycznie rozumianej zasady gwarantowanego wyniku (ZGW). Oznacza to, że centrum poszukuje takiej strategii (i odpowiadającej jej organizacji systemu - struktury koalicyjnej), która maksymalizuje ocenę a priori jakości funkcjonowania systemu z uwzględnieniem całej posiadanej i oczekiwanej informacji.

Można wyróżnić trzy zasadnicze klasy dynamicznych hierarchicznych n - osobowych gier z koalicjami [9]:

1) Dynamiczne gry z informacją a priori oraz wyborem a priori strategii przez graczy.
2) Dynamiczne gry z poetapową informacją i poetapowym wyborem strategii przez graczy.
3) Dynamiczne gry z informacją a priori i poetapowym wyborem strategii przez graczy.

W pierwszym przypadku gier dynamicznych na samym początku gry ustala się całą informację o grze - od początku gry do jej końca. Również gracze ustalają na początku gry określone swoje strategie postępowania. Jest to zatem najbardziej szeroka klasa n-osobowych gier dynamicznych, gdzie wymiana informacji jest największa. Oznacza to również, że na

początku gry ustalona jest największa możliwa wygrana w danej grze (NGW) dla określonej struktury koalicyjnej.

Druga klasa gier dotyczy przypadku, kiedy dla wielu dynamicznych systemów słuszne jest założenie, że informacja graczy na etapie ξ o działaniach partnerów w kolejnych etapach $\xi+1,\ldots,L$ jest nieistotna. Wobec tego otrzymujemy ograniczony zbiór wszystkich możliwych struktur informacyjnych.

A więc druga klasa gier obejmuje takie gry, w których gracze zgodnie ze swoimi strategiami na etapie ξ wykorzystują tylko informacje z przeszłości i stanu obecnego. Dla takich gier strategie wykorzystywane przez graczy na etapie ξ nie mają żadnej informacji a priori o przyszłych działaniach partnerów na kolejnych $\xi+1,\ldots L$ etapach gry. NGW w tym przypadku jest nieznane i może być kształtowane (zwiększane) z etapu na etap.

W trzecim przypadku zachodzi jednorazowo pełna wymiana informacji między centrum a graczami. Jest to więc jednoetapowy proces decyzyjny. Natomiast gracze, mając informacje o strategiach centrum, podejmują swoje decyzje osobno o strategiach (np. przynależności do koalicji) na każdym etapie. W tym przypadku centrum nie ma możliwości zwiększenia raz ustalonego przez siebie NGW.

4. Opis problemu BLM jako wieloosobowej hierarchicznej dynamicznej gry z koalicjami

Opis ten będzie zawierał definicję gry, analizę i syntezę struktury organizacyjnej hierarchicznego dynamicznego systemu, jakim jest linia montażowa podczas alokacji operacji do stanowisk pracy. Innymi słowy, opis ten będzie zawierał najważniejsze elementy tego systemu: strukturę informacyjną, hierarchiczną i koalicyjną. Na początku tego punktu zajmiemy się formalizacją teoriogrowego problemu BLM, zarówno co do postaci gry (punkt 4.1), jak i formalizacji zachowań graczy (punkt 4.2). Sformułujemy również wynik gry dynamicznej z koalicjami z tzw. rozszerzeniem informacyjnym gry (punkt 4.3), co pozwala na wyznaczenie optymalnej struktury informacyjnej BLM, a więc formalizuje zadanie syntezy BLM jako systemu dynamicznego.

4.1. Formalizacja problemu BLM jako dynamicznej gry z koalicjami

Teoriogrowy model funkcjonowania systemu linii montażowej z zadanymi uczestnikami gry i jednym centrum sterowania określony jest w następujący sposób:

1. Zadany jest zbiór elementów systemu $J_0=\{0,1,2,\ldots,n\}$ nazywanych dalej graczami, $|J_0|=N=n+1$.

Gracza z numerem "0" oznaczamy przez G_0 i nazywamy decydentem. Gracz ten nie bierze bezpośredniego udziału w grze. W jego jednak interesie gra jest prowadzona. Gracze z

numerami od 1 do n tworzą zbiór $J=\{1,2,3,...n\}$ graczy G_i, $i=1,2,...,n$, którzy bezpośrednio biorą udział w grze przy linii montażowej. Każdy gracz G_i charakteryzuje się czasem wykonania ϑ_i, $i=1,...,n$, określonego zadania. Decydent ustala kolejność wykonywania poszczególnych zadań. Zadany jest cykl c.

2. Gra przebiega w taki sposób, że w kolejnych następujących po sobie cyklach, których liczba z góry nie jest znana, ale jest skończona, udział bierze określony podzbiór zbioru J graczy. Oznaczmy liczbę cykli potrzebnych do wykonania całej pracy przez L_ξ, $\xi=0,1,...$. Liczba ta jest również liczbą etapów dynamicznej n - osobowej gry. Jeżeli nie będzie to wprowadzało nieporozumień, to niekiedy zamiast oznaczenia L_ξ będziemy stosowali oznaczenie L.

3. Gracz G_i, $i=1,...,n$ wykonuje swoje zadanie na agregacie znajdującym się na m - tym stanowisku pracy, $m=1,...,M$. Liczba M stanowisk pracy z góry również nie jest znana.

4. Każdy gracz ma określony zbiór $V^i_{\xi,\gamma}$ strategii $v^i_{\xi,\gamma}$ w grze w zależności od numeru etapu oraz ustalonej kolejności w grze zadanej macierzą $G=[\gamma_{k,i}]$, $k,i=1,...,n$ Elementy tej macierzy określone są przez (3). Dla gracza G_0 będziemy pisali $v^0_\xi \in V^0_\xi$, a jego strategie nie zależą od $\gamma \in G$.

Dynamiczny wieloetapowy proces przydziału zadań do stanowisk na linii montażowej opisany może być przez następujący układ równań:

$$X_{\xi+1}=f_\xi(X_\xi;v^0_\xi,v^1_{\xi,\gamma},...,v^n_{\xi,\gamma}),\quad X_\xi\in E^r \qquad \xi=0,1,... \tag{8}$$

$$X_0=A, \tag{9}$$

$$v^0_\xi\in V^0_\xi,\quad v^i_{\xi,\gamma}\in V^i_{\xi,\gamma},\quad i\in J,\gamma\in G,\quad \xi=0,1,... \tag{10}$$

gdzie: X_ξ, jest r-wymiarowym wektorem stanu systemu w chwili ξ (na etapie ξ), $r=0,1,2,...$ jest liczbą różnych struktur koalicyjnych, którą można utworzyć na danym etapie gry. Stan $X_0=A$, odzwierciedla stan gry na zerowym etapie gry. Jest to również stan zaawansowania prac na linii montażowej w końcowym etapie poprzedniej gry. W szczególnym przypadku $X_0=0$.

Cele C^i graczy G_i, $i\in J_0$ opisywane są funkcjami skalarnymi stanu końcowego linii montażowej

$$C^i(v^0,v^1_\gamma,...,v^n_\gamma)=g^i_\gamma(X_{L+1}),\quad i\in J_0,\gamma\in G \tag{11}$$

gdzie: $v_\gamma^i = \{v_{0,\gamma}^i, \ldots, v_{\xi,\gamma}^i\}$ jest to realizowane przez i-tego gracza zadanie, zaś $X = \{X_0, \ldots, X_{L+1}\}$ odpowiadająca temu zadaniu trajektoria. Cele graczy wyrażone są ich wypłatami $g_\gamma^i(\cdot)$. Funkcja wypłat gracza G_i jest funkcjonałem o postaci:

$$g_\gamma^i = g_\gamma^i(\Psi_L(v^0, v_\gamma^1 \ldots, v_\gamma^n)), \quad i \in \{0\} \cup J; \quad J = \{1,2,\ldots,n\}, \quad \gamma \in G, \tag{12}$$

określonym na zbiorze kartezjańskim $V^0 \times \cdots \times V^n$, $V^i = \prod_{\xi=0}^{L} V_{\xi,\gamma}^i, i \in J$ za pomocą odwzorowania

$$\Psi_L \div \prod_{i \in J_0} \prod_{\xi=0}^{L} V_{\xi,\gamma}^i \to \mathrm{X}_{L+1} \tag{13}$$

gdzie X_{L+1} - zbiór wszystkich możliwych końcowych punktów trajektorii dynamicznego systemu.

Analogicznie do (13) zdefiniujemy odwzorowanie

$$\Psi_\tau \div \prod_{i \in J_0} \prod_{\xi=0}^{\tau} V_{\xi,\gamma}^i \to \mathrm{X}_{\tau+1}, \quad \tau = 0,1,\ldots,L-1 \tag{14}$$

oraz

$$\Psi = (\Psi_0, \ldots, \Psi_L) \tag{15}$$

gdzie $\mathrm{X}_{\tau+1}$ - zbiór wszystkich możliwych końcowych punktów $X_{\tau+1}$ kawałków $(X_0, \ldots, X_{\tau+1})$ trajektorii $X = \Psi(v)$ generowanych przez układ (8) - (10).

Zakładamy dalej, że każdy z graczy stara się zwiększyć swoją wypłatę, używając dostępnych dla siebie strategii $v_{\xi,\gamma}^i$. Zakładamy również, że gracze mają dokładną informację o parametrach linii montażowej.

Centrum uwzględnia możliwość tworzenia się koalicji poszczególnych graczy, tzn. w pierwotnej grze Γ pewne zespoły graczy (zbiory) $K_\xi \in J$, na etapie ξ, $0 \le \xi \le L$ mogą łączyć się ze sobą w koalicje $K_\xi \in \alpha_\xi$, gdzie α_ξ - ustalona klasa podzbiorów zbioru J (zbiór struktur koalicyjnych na danym etapie). Gracz G_0 nie należy do żadnej koalicji.

Koalicja K_ξ ma określony zbiór fizycznie dostępnych wyborów $V_{\xi,\gamma}^K = \prod_{i \in K_\xi} V_{\xi,\gamma}^i$, z którego wybierana jest $v_{\xi,\gamma}^K = (v_{\xi,\gamma}^K / i \in K_\xi)$ na zasadzie dążenia do maksymalizacji funkcji wypłat dla koalicji. Na danym etapie podzbiory koalicji tworzone są w taki sposób, że utworzone dwie różne koalicje powinny się różnić co najmniej jednym graczem lub kolejnością występowania graczy. W ten sposób

$K_\xi = \left\{ \{K_{\xi,\gamma}^i / (\gamma_{k,i} = 1), k, i \in J\} / \forall_{k,l} \in J, K_{\xi,\gamma}^i \subseteq J, \gamma \in G \right\}$, gdzie $K_{\xi,\gamma}^i$ - koalicja, która w chwili ξ składa się z graczy G_i, spełniających warunek kolejnościowy. Zbiór wszystkich możliwych podzbiorów α_ξ złożony ze struktur koalicyjnych na etapie ξ oznaczmy przez $\Im_\xi = \left\{ K_\xi \in \alpha_\xi / \{K_{\xi,\gamma}^i \subseteq J\}, \gamma_{k,i} \in G; k, i \in J \right\}$ oraz $\Im = \prod_{\xi=0}^{L} \Im_\xi$.

Wynikiem $(v;\aleph) \in V \times \Im$ dynamicznej gry z koalicjami nazwiemy ciąg $(v;\aleph) = \{(v_0;\aleph_0),\ldots,(v_L;\aleph_L)\}$, gdzie $\aleph = (\aleph_0,\ldots,\aleph_L)$ jest programem struktur koalicyjnych. Każdemu wynikowi $(v;\aleph)$ przyporządkowujemy wektor wypłat graczy G_i, $i \in J$. Oznaczmy wobec tego przez $g_r^{i,\aleph}(\Psi(v))$ wypłatę gracza G_i w sytuacji, gdy $\Psi_L(v) \in X_{L+1}$.

Podsumowując, hierarchiczną dynamiczną grę z koalicjami można zdefiniować w następujący sposób:

$$\Gamma_a = \left\langle \alpha_\xi, \left\{ \left\{ V_{\xi,\gamma}^{K_\xi} \right\}_{K_\xi \in \alpha_\xi, \gamma \in G} \right\}_{\xi=0}^{L}, \left\{ g_G^{\aleph} \right\}_{\aleph \in \alpha_\xi}, \left\{ \Im_\xi \right\}_{\xi=0}^{L} \right\rangle \tag{16}$$

W tej grze nie ma możliwości dodatkowych wypłat dla graczy.

4.2. Formalizacja zachowań graczy

W dalszym ciągu rozpatrywana jest gra Γ_a. W tej grze każdy gracz G_i, $i \in J$ na etapie ξ $0 \le \xi \le L$ wybiera $(V_{\xi,\gamma}^i; K_{\xi,\gamma}^i)$. Załóżmy, iż niektórzy gracze mogą posiadać dodatkową informację o wyborach strategii przez innych graczy lub sami mogą generować różne informacje. Każdą taką grę w tym przypadku będziemy nazywali informacyjnym rozszerzeniem gry Γ_a. Proces wymiany informacji między graczami określa informacyjna struktura gry.

Quasi-informacyjnym rozszerzeniem (Q.I.R) dynamicznej gry Γ_a z koalicjami będziemy nazywali grę

$$\bar{\Gamma}_a = \left\langle \alpha_\xi, \left\{ \left\{ \bar{V}_{\xi,\gamma}^{K_\xi} \right\}_{K_\xi \in \alpha_\xi} \right\}_{\xi=0}^{L}, \left\{ \bar{g}_G^{\aleph} \right\}_{\aleph \in \alpha}, \left\{ \bar{\Im}_\xi \right\}_{\xi=0}^{L} \right\rangle \tag{17}$$

dla której zadane jest odwzorowanie

$$\bar{\pi} + \bar{V} \times \bar{\Im} \to V \times \Im \tag{18}$$

gdzie

$$\bar{V} = \prod_{\xi=0}^{L} \bar{V}_{\xi,\gamma=} = \prod_{\xi=0}^{L} \prod_{i \in J_0} \bar{V}_{\xi,\gamma}^i \qquad \bar{\Im} = \prod_{\xi=0}^{L} \bar{\Im}_\xi \tag{19}$$

Kompozycję $\bar{\pi}$ z projekcją $V \times \Im$ na $\prod_{i \in \aleph} V^i$ oznaczmy przez $\bar{\pi}^{\aleph}$, $\aleph \in J_0$, a na $\Im$ - przez $\bar{\pi}^{\Im}$.

Odwzorowanie (18) spełnia dwa warunki:

1) Funkcja celów graczy nie zmienia się wraz z napływem informacji o partnerach.

2) Gracze nie muszą wykorzystywać napływającej informacji, tzn. zbiory dopuszczalnych wyborów w zależności od otrzymanej informacji nie zawężają się, nie zmniejszają się również możliwości tworzenia koalicji.

Istnienie odwzorowania $\bar{\pi}$ zabezpiecza przed "błędnym kołem" w procesie przekazywania informacji. Reguły zachowania graczy na linii montażowej w grze Γ_α będziemy określali w klasie $\bar{\wp}$ quasi-informacyjnych rozszerzeń $\bar{\Gamma}_\alpha$.

Wyjaśnijmy jeszcze, że przez informacyjne rozszerzenie rozumiemy rozszerzenie, dla którego strategie każdego gracza mogą być interpretowane jako sposób reagowania na otrzymaną informację o strategiach partnerów w czasie procesu wymiany informacji.

Oznaczając zachowanie się graczy przez $\bar{p}$, możemy zdefiniować to zachowanie w następujący sposób:

Dla dowolnej Q.I.R. $\bar{\Gamma}_\alpha$ dynamicznej gry Γ_α zachowanie się $\bar{p}$ graczy G_i, $i \in J$ w grze $\bar{\Gamma}_\alpha$ określa para $(\bar{v};\bar{\aleph})$ jako strategia graczy G_i oraz ciąg koalicyjnych struktur w grze $\bar{\Gamma}_\alpha$.

Zachowanie się $\bar{p}$ graczy G_i wraz z wyborem przez centrum $\bar{v}^0$ tworzy wynik $(\bar{v};\bar{\aleph})$ gry $\bar{\Gamma}_\alpha$.

Wprowadźmy oznaczenie $\bar{R}(\bar{v}^0)$ dla zbioru racjonalnych, z punktu widzenia centrum, zachowań $\bar{p}$ graczy G_i podczas wyboru przez centrum strategii $\bar{v}^0 \in \bar{V}^0$. Zbiór $\bar{R}(\bar{v}^0)$ będziemy nazywali oceną zbioru racjonalnych zachowań, gdyż rzeczywistego zbioru centrum nie zna z powodu poetapowego rozwijania się informacji o dynamicznym procesie przydziału operacji do stanowisk pracy (przydziału graczy w kolejnych etapach balansowania linii montażowej).

Na podstawie przyjętego opisu przez największą gwarantowaną wygraną (NGW), jaką może osiągnąć centrum, określimy następujący wynik:

$$\bar{W}^0(\bar{R}) = \max_{\Gamma_\alpha \in \bar{\wp}} \max_{\bar{v}^0 \in \bar{V}^0} \min_{\bar{p} \in \bar{R}(\bar{v}^0)} g^0(\Psi_L(\bar{\pi}'^0(\bar{v}^0, \bar{p}))) \tag{20}$$

gdzie odwzorowanie $\bar{\pi}'^0 \div \bar{V}^0 \times \cdots \times \bar{V}^n \times \bar{\mathfrak{I}} \to V^0 \times \cdots \times V^n$ zadawane jest przy określeniu Q.I.R. $\bar{\Gamma}_\alpha$ gry Γ_α.

Jeżeli teraz przez $\bar{I}$ oznaczymy z kolei zbiór wszystkich możliwych struktur informacyjnych I, tzn. $I \in \bar{I}$, wówczas zadanie wyznaczania optymalnej struktury informacyjnej gry, a więc zadanie syntezy organizacyjnej hierarchicznej struktury traktujemy jako zadanie poszukiwania zarówno wartości, jak i strategii gwarantującej maxmin.

Zauważmy, iż opis zbioru $\bar{I}$ a priori jest nieznany. Również nie wiadomo, w jaki sposób można zbudować zbiór $\bar{R}(\bar{v}^0)$. Jednak z etapu na etap w wieloetapowym procesie przydzielania graczy na linii montażowej (w grze $\bar{\Gamma}_\alpha$) będziemy mogli stopniowo konkretyzować te zbiory pod warunkiem spełnienia przynajmniej najprostszych właściwości, oddających dążenie graczy do maksymalizacji swoich funkcji celów. Taką jedną z najprostszych właściwości jest właściwość indywidualnej racjonalności lub inaczej, zdrowy

rozsądek graczy. Daje to a priori NGW gracza G_i, którą on może sobie zapewnić w grze, jeżeli funkcje celów i strategie partnerów są mu nieznane.

Przyjęte założenie jest w pełni uzasadnione dla przypadku gry dwuosobowej o sumie niezerowej, które, jak wiemy, prowadzi do równowagi Nasha. Dla gry n - osobowej zasadniczą cechą jest możliwość tworzenia przez graczy koalicji wspólnego działania. Przy tym mamy już do czynienia z pojęciem kolektywnej racjonalności, tzw. "zdrowym rozsądkiem ogółu". Konkretyzacja tego pojęcia prowadzi do różnych klas gier dynamicznych z koalicjami.

Niech $\Re$ oznacza klasę zbiorów $\tilde{R}(\tilde{v}^0)$ racjonalnych zachowań graczy, wówczas oceną od góry dla nieznanego NGW - $\tilde{W}^0(\tilde{R})$ dla centrum przy wszystkich możliwych Q.I.R. dla $\tilde{\Gamma}_\alpha$, będzie wielkość $\tilde{M}(\Re)$ zdefiniowana w następujący sposób:

$$\tilde{M}(\Re) = \max_{\Gamma_\alpha \in \tilde{p}} \max_{\tilde{v}^0 \subset \tilde{v}^0} \max_{\tilde{R}(\tilde{v}^0) \in \Re} \min_{\tilde{p} \in \tilde{R}(\tilde{v}^0)} g^0(\Psi_L(\tilde{\pi}'^0(\tilde{v}^0, \tilde{p}))) \tag{21}$$

dla każdego $\Re$ inna, gdzie $\tilde{\pi}'^0$ jest takim zbiorem, gdzie $\tilde{\pi}' \in \tilde{\pi}'^0$. W celu konkretnego rozwiązania tego zadania na linii montażowej należy funkcję $\tilde{M}(\Re)$, określoną na funkcjonalnych przestrzeniach strategii graczy, przedstawić w postaci zwykłych ekstremalnych zadań określonych na wyjściowych zbiorach wyborów strategii.

4.3. Uwagi formalne

Na podstawie sformułowanego teoriogrowego modelu balansowania linii montażowej warto poczynić kilka uwag wyjaśniających ten model.

1) Zgodnie z kolejnością wchodzenia graczy do gry oraz wielkością cyklu, na poszczególnych etapach gry mogą tworzyć się różne struktury koalicyjne graczy. Koalicje graczy powstają tylko w ramach danego cyklu.
2) Cel poszczególnych graczy jest celem lokalnym. Jest to minimalizacja nie wykorzystanego czasu w określonym etapie gry. Cel ten gracze osiągają poprzez łączenie się w koalicje.
3) Nad globalnym celem czuwa decydent centralny. Celem globalnym jest minimalizacja czasu wykonania wszystkich operacji na linii montażowej lub ekwiwalentny cel - minimalizacja liczby stanowisk pracy.
4) Kooperujący gracze mogą się oczywiście ze sobą porozumiewać. Wymiana informacji dotyczy tylko etapu obecnego i poprzednich. Przejście do następnego etapu zależy wyłącznie od macierzy kolejności gry, którą to kolejność gracze znają.
   Mamy więc tu do czynienia z dynamiczną hierarchiczną grą z poetapową informacją i poetapowym wyborem strategii przez graczy.
5) Strategiami graczy są możliwości tworzenia koalicji na danym etapie gry w ramach cyklu, przy uwzględnieniu kolejności gry. Wobec tego w danej grze w ogóle można by było nic nie mówić o strategiach. Wprowadzenie jednak pojęcia strategii w takiej grze, naszym zdaniem, pomaga w zrozumieniu jej teoriogrowego charakteru.

5. Przykłady

5.1. Przykład pierwszy

W przykładzie tym rozpatrzymy proces montażu bez ograniczeń kolejnościowych, tzw. proces upakowania. Proces taki wydaje się być mało praktyczny, gdyż ustalona kolejność wykonywania operacji na linii montażowej jest wynikiem określonej technologii produkcji wyrobu. Tym niemniej nietrudno sobie wyobrazić całkiem nieabstrakcyjny problem montażu jakiegoś wyrobu, gdzie kolejność wykonania operacji jest nieistotna. Dalej jednak pozostaje ograniczenie wynikające z wielkości czasu cyklu c i zupełnie naturalnego wymogu - kompletności montażu. Proponowany przykład pozwoli na sprecyzowanie pojęcia koalicji graczy i ich struktur koalicyjnych oraz wyjaśni stosowanie procedur maxmin do rozwiązania określonego problemu kombinatorycznego, jakim jest w tym przypadku n - osobowa gra z koalicjami.

Niech wobec tego dane są: $n = 10$ - osobowy zbiór graczy $J = \{1,2,...,10\}$, wektor czasów wykonania poszczególnych operacji $\theta = \{9,15,7,18,5,12,19,10,4,13\}$ oraz cykl $c = 20$. Kryterium optymalnego montażu jest minimalizacja nie wykorzystanego czasu montażu lub, co jest tożsame z tym kryterium, minimalizacja liczby stanowisk pracy na linii montażowej.

W związku z tym, że funkcja użyteczności dla każdego gracza i koalicji jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości nie wykorzystanego czasu w ramach cyklu, przeto ani w tym przykładzie, ani w następnym nie będziemy podawali wypłat dla graczy lub koalicji w jakichś konkretnych jednostkach użyteczności (np. w złotych), lecz pozostaniemy przy jednostkach czasowych.

Jest oczywiste, że rozwiązanie zadania kombinatorycznego, jakim jest przedstawiony w przykładzie problem montażu, może się odbywać w drodze przeglądu zupełnego lub z zastosowaniem określonego algorytmu programowania matematycznego. Wiadomo, jednak, że dla dużej liczby operacji przy danym cyklu problemy te są bardzo trudne do rozwiązania, a stosowane algorytmy mało efektywne.

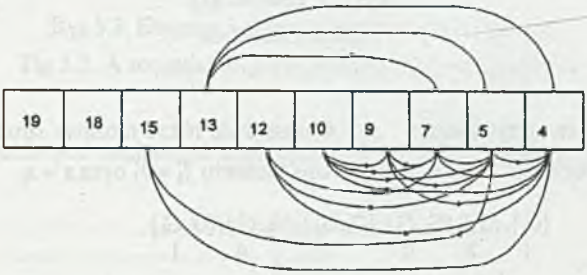
Z drugiej strony formułowanie zadań z wykorzystaniem metod teorii gier nic nie mówi o metodach rozwiązywania przedstawianych problemów, gdyż teoria gier jest teorią egzystencjalną, tzn. formułuje jedynie twierdzenia o istnieniu lub nieistnieniu rozwiązania.

Biorąc za podstawę poszukiwania rozwiązania optymalnego procedurę (20), można jednak przedstawić dość efektywny algorytm rozwiązania problemu sformułowanego w omawianym przykładzie (przynajmniej dla niedużej liczby graczy). Wychodząc z powyższego, rozwiązanie przykładowego problemu optymalizacyjnego może być otrzymane w następujący sposób:

1) Porządkujemy w kolejności nierosnącej czasy wykonania poszczególnych operacji. Zgodnie z procedurą (20) tworzymy wszystkie możliwe koalicje spełniające warunek długości cyklu.

2) Budujemy tablicę, w której pierwszy wiersz jest wspomnianym już nierosnącym ciągiem czasów wykonania operacji, zaś następne wiersze reprezentują obliczone straty czasowe w ramach kolejnych cykli montażu dla poszczególnych możliwych koalicji lub pojedynczych graczy.
3) Na podstawie tablicy konstruujemy drzewo gry, w którego w wierzchołku znajduje się decydent - gracz G_0, zaś gałęzie wychodzące z wierzchołka obrazują możliwe koalicje (strategie) uporządkowane według rosnących strat czasowych.
4) Dokonujemy wyboru kilku struktur koalicyjnych, a spośród nich jednej optymalnej, będącej w równowadze kooperacyjnej zgodnie z (20). Inne struktury jako ewidentnie złe nie są rozpatrywane.

Cztery kroki algorytmu zostały pokazane na kolejnych trzech rysunkach.

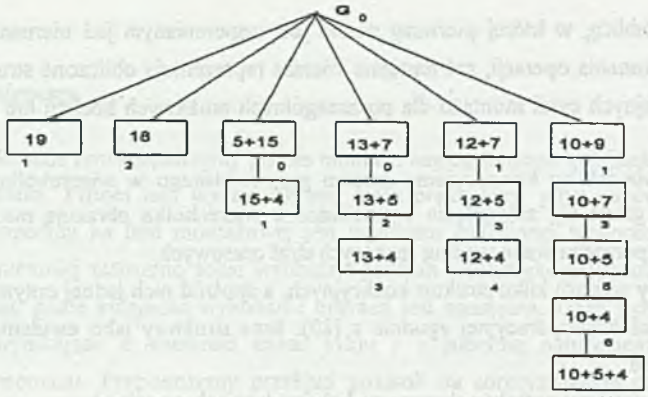


Rys.5.1. Graficzny obraz realizacji pierwszego kroku algorytmu
Fig.5.1. A graphic image of the implementation of the first step of the algorithm

Tablica 5.1

Czasy wykonywania operacji w kolejności nierosnącej

19	18	15	13	12	10	9	7	5	4	S
1	2	0	0	1	1	4	8	11		T
		1	2	3	3	6	9			R
			3	4	5	7	17			A
					6	13				T
					11					Y



Rys.5.2. Drzewo gry

Fig.5.2. Game tree

W rezultacie otrzymujemy: $L_c = 6$ oraz dwie różne możliwe struktury koalicyjne z identycznymi parametrami, tzn. czasem trwania montażu $T_1 = T_2$ oraz $s_1 = s_2$

$$\underset{1}{\{G_7\}},\underset{2}{\{G_4\}},\underset{0}{\{G_2,G_3\}},\underset{0}{\{G_3,G_{10}\}},\underset{4}{\{G_6,G_9\}},\underset{1}{\{G_1,G_8\}}$$

$$T_1 = 119, \quad s_1 = 8$$

$$\underset{1}{\{G_7\}},\underset{2}{\{G_4\}},\underset{1}{\{G_2,G_9\}},\underset{2}{\{G_5,G_{10}\}},\underset{1}{\{G_3,G_6\}},\underset{1}{\{G_1,G_8\}}$$

$$T_2 = 119, \quad s_2 = 8$$

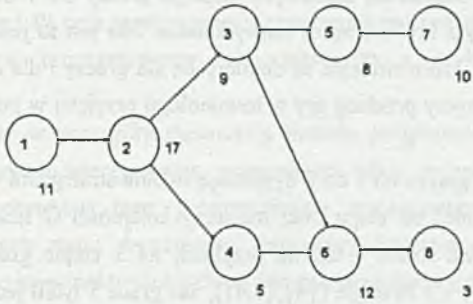
W związku z tym, że kolejność wykonywania zbiorów operacji na danych stanowiskach pracy nie jest istotna, różnych struktur koalicyjnych typu pierwszego i drugiego będzie dokładnie 6! = 720.

Na zakończenie tego przykładu zwróćmy uwagę na to, że tylko teoria gier daje odpowiedź na pytanie, która z dwóch otrzymanych struktur koalicyjnych jest lepsza. Widać wyraźnie, że drugi typ struktur koalicyjnych przy tych samych parametrach T i s zapewnia równowagę wypłat dla koalicjantów większą niż struktura pierwsza. Dlatego też taką strukturę należy wybrać do realizacji.

5.2. Przykład drugi

Jako drugi przykład rozpatrzymy teoriogrowy opis procesu montażu z uwzględnieniem określonej kolejności operacji montażowych. Dane do przykładu pokazano na rys.5.3. Pochodzą one z [10]. Na rysunku tym węzły diagramu obrazują operacje. Numery operacji

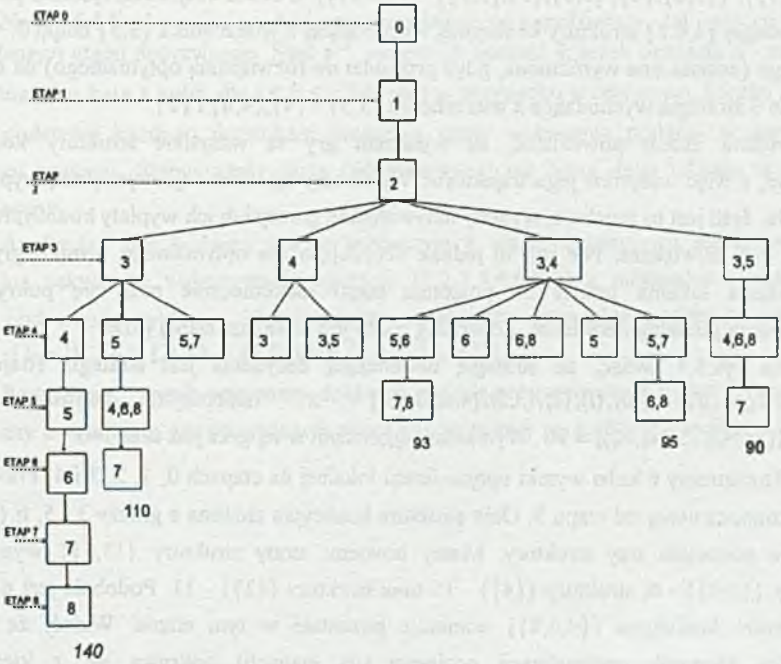
zapisano w węzłach, a czasy operacji - obok węzłów. Łuki przedstawiają ograniczenia kolejności wykonania operacji. Stąd łatwo już zbudować macierz kolejności G. Założono cykl montażu $c = 20$.



Rys.5.3. Diagram kolejności wykonywania operacji

Fig.5.3. A sequetial diagram of performing of operations

Drzewo gry z możliwymi strukturami koalicyjnymi w zależności od etapu gry przedstawiono na rys.5.4.



Rys.5.4. Drzewo gry

Fig. 5.4. Game tree

Na rys.5.4 pokazano tylko niektóre strategie decydenta (gracza G_0) do końca gry. Dla tych strategii zaznaczono również wyniki gry jako odpowiednie czasy zakończenia wszystkich operacji. Przedstawienie wszystkich możliwych strategii graczy od 1 do 8 oraz wszystkich strategii decydenta byłoby z braku miejsca niewykonalne. Nie jest to jednak potrzebne, gdyż już od 4 etapu gry widać, które strategie są dominujące dla graczy i dla decydenta. Aby się o tym przekonać, zinterpretujmy przebieg gry w terminologii przyjętej w punkcie 3 i 4 niniejszej pracy.

Przede wszystkim gracze od 1 do 8 dysponują swoimi strategiami wyłącznie w zakresie danego etapu. W zależności od etapu oraz macierzy kolejności G liczba tych strategii dla poszczególnych graczy jest różna. I tak na przykład, na 3 etapie gracz 3 ma 3 strategie ({3},{3,4},{3,5}), gracz 4 - 2 strategie ({4},{3,4}), zaś gracz 5 tylko jedną -{3,5}. Decydent w tym przypadku ma 4 strategie: {{1},{2},{3}}; {{1},{2},{4}}; {{1},{2},{3,4}} oraz {{1},{2},{3,5}}. Zauważmy w tym miejscu, że dla decydenta są to zarazem struktury koalicyjne będące wynikami gry na etapie 3. Na etapie 3 można również wyróżnić 4 struktury koalicyjne tworzone przez graczy (tu są one zdegenerowane do postaci pojedynczego gracza lub koalicji dwóch graczy): $\mathfrak{I}_3$ = [{{3}}, {{4}},{{3,4}},{{3,5}}]. Na etapie 4 struktury koalicyjne są już widoczne w całej okazałości. Są to 4 struktury: $\mathfrak{I}_4$ =[{{4},{5},{5,7}}; {{3},{3,5}}; {{5,6},{6}; {6,8},{5},{5,7}}; {{4,6,8}}]. Z braku miejsca na rysunku pokazano tylko strategię {4,6,8} struktury koalicyjnej wychodzącej z wierzchołka {3,5} etapu 3. Oprócz tej strategii (została ona wyróżniona, gdyż prowadzi do rozwiązania optymalnego) na etapie 4 są jeszcze 3 strategie wychodzące z wierzchołka {3,5} - {4},{4,6} i {7}.

Można zatem powiedzieć, że wynikiem gry są wszystkie struktury koalicyjne decydenta, a więc wszystkie jego trajektorie. Wybieramy tę, która daje największą wypłatę dla decydenta. Jeśli jest to możliwe, wypłaty indywidualne graczy lub ich wypłaty koalicyjne winny również być największe. Nie jest to jednak decydujące dla optymalnego wyniku gry, gdyż optymalizacja lokalna graczy na poziomie etapu niekoniecznie musi się pokrywać z optymalizacją globalną decydenta. Zobaczmy, jak to jest w analizowanej grze.

Na rys.5.4 widać, że strategią dominującą decydenta jest strategia (trajektoria) $X = \{X_0, X_1, \ldots, X_8\} = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3,5\},\{4,6,8\},\{7\}\}$ z najlepszym wynikiem gry $(\nu,\aleph) = \{(\nu_0,\aleph_0),\ldots,(\nu_8,\aleph_8)\} = 90$. Wynikiem najgorszym w tej grze jest czas 140.

Rozpatrzmy z kolei wyniki optymalizacji lokalnej na etapach 0, 1, 2, 3 i 4. Praktycznie analizę rozpoczniemy od etapu 3. Otóż struktura koalicyjna złożona z graczy 3 i 5, tj.{{3,5}}, dominuje pozostałe trzy struktury. Mamy bowiem: straty struktury {{3,5}} wynoszą 3, struktury {{3,4}} - 6, struktury {{4}} - 15 oraz struktury {{3}} - 11. Podobnie jest dla etapu 4. Struktura koalicyjna {{4,6,8}} dominuje pozostałe w tym etapie. Widać, że w tym przypadku kierunek optymalizacji poziomej (na etapach) pokrywa się z kierunkiem optymalizacji pionowej (po trajektorii decydenta). Pytanie, czy jest to prawidłowość, która dotyczy każdej omawianej w pracy gry? Bez odpowiedniej dalszej analizy, którą w tym

opracowaniu niestety z braku miejsca musimy pominąć, nie da się tak ad hoc na to pytanie odpowiedzieć. W związku z tym, że nie narysowaliśmy całego drzewa gry, może powstać podejrzenie, że otrzymany optymalny wynik gry z analizy tylko fragmentu drzewa nie jest wynikiem optymalnym! W celu rozstrzygnięcia tego problemu rozwiążmy jeszcze raz tę grę, ale już za pomocą programowania wieloetapowego z wykorzystaniem algorytmu szeregowania.

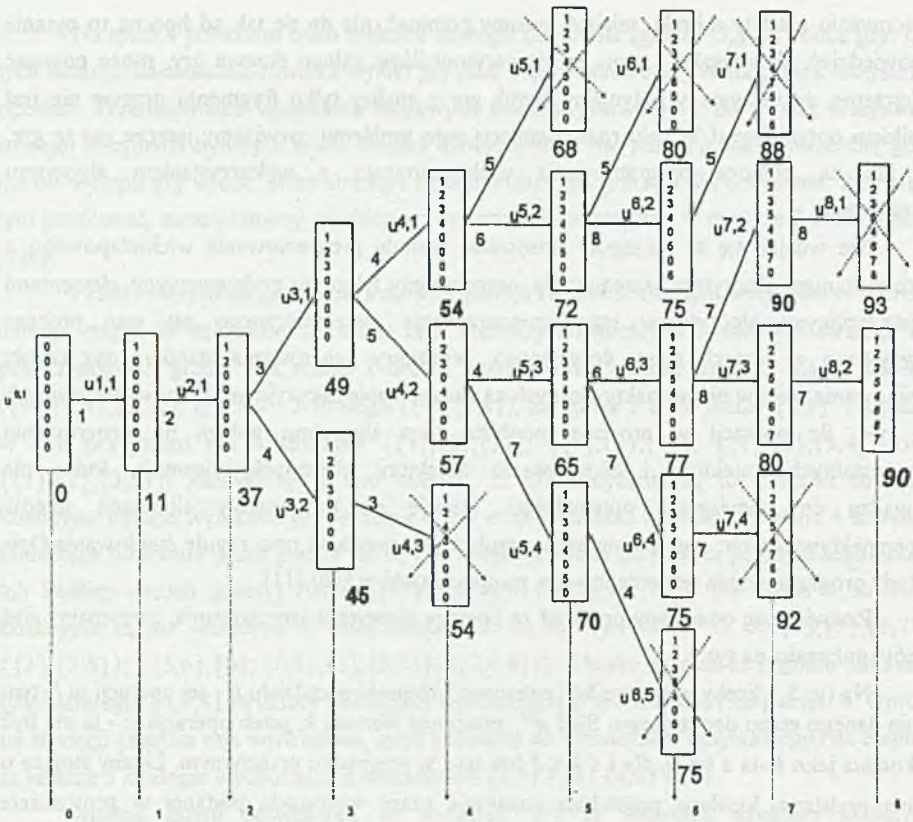
Nie wdając się w szczegóły stosowania metody programowania wieloetapowego z wykorzystaniem algorytmu szeregowania, wspomnijmy tylko, że podstawowymi elementami konstrukcyjnymi algorytmów tego programowania matematycznego są: stan procesu decyzyjnego w ramach etapu decyzyjnego, procedury generowania stanów oraz reguły eliminowania stanów nieperspektywicznych na danym etapie decyzyjnym. Etapów decyzyjnych jest tyle, ile operacji w procesie montażu. Idea algorytmu polega na generowaniu dopuszczalnych trajektorii i eliminowaniu trajektorii nieperspektywicznych, które nie prowadzą do rozwiązania optymalnego. Stosuje się trzy reguły eliminacji stanów nieperspektywicznych: regułę dominacji, regułę wyczerpywania oraz regułę sondowania.Opis metody programowania wieloetapowego można znaleźć w [10],[11].

Rozwiązując omawiany przykład za pomocą algorytmu szeregowania, otrzymamy sieć stanów pokazaną na rys.5.5.

Na rys.5.5 liczby opisujące łuki oznaczają kolejność przydziału n - tej operacji w l -tym stanie danego etapu decyzyjnego. Stąd $u^{n,l}$ przyjmuje wartość k, jeżeli operacja n - ta ma być wykonana jako k -ta z kolei, dla $1 \le k \le \xi$ lub zero w przypadku przeciwnym. Liczby stojące u dolnej podstawy każdego prostokąta oznaczają czasy wykonania podanej w prostokącie sekwencji operacji. Stany przekreślone (zdominowane) nie biorą dalej udziału w procesie decyzyjnym.

Analizując sieć widzimy, że w końcowym 8 etapie decyzyjnym znaleziono jedną optymalną sekwencję wykonywania operacji: (1,2,3,5,4,6,8,7) z minimalnym czasem 90. Biorąc pod uwagę cykl $c = 20$ natychmiast znajdujemy optymalne podzbiory operacji w postaci: $\Omega_1 = \{1\}, \Omega_2 = \{2\}, \Omega_3 = \{3,5\}, \Omega_4 = \{4,6,8\}, \Omega_5 = \{7\}$.

Reasumując: wynik otrzymany dokładną metodą programowania matematycznego jest identyczny z wynikiem gry otrzymanym przez nas wcześniej na podstawie analizy niepełnego drzewa gry.



Rys.5.5. Sieć stanów algorytmu szeregowania

Fig. 5.5. Network of states for sequencing algorithm

6. Podsumowanie i wnioski końcowe

W pracy, wykorzystując teoriogrowe podejście, przedstawiono sformalizowany opis problemu BLM jako wieloosobowej hierarchicznej dynamicznej gry z koalicjami. Jak widać, w ogólnym przypadku tworzenie teoriogrowego modelu problemu BLM nastręcza wiele problemów natury czysto pojęciowej, gdyż teoria gier jest teorią normatywną, tzn., że jej przedmiotem badań są nie tyle same modele konfliktów (gier) jako takie, ile zawartości przyjmowanych w grach zasad optymalności. Te zaś mogą być bardzo różne i niejednokrotnie sprzeczne ze sobą. Oznacza to praktycznie, że jednego wspólnego dla wszystkich gier tłumaczenia pojęcia optymalności jeszcze nie znaleziono. Dlatego też, zanim się powie o najwygodniejszym zachowaniu się gracza w grze, niezbędne jest ustalenie, w jakim sensie ta wygoda jest rozumiana.

Sformułowana zasada optymalności w rozpatrywanej grze na linii montażowej, jaką jest minimalizacja nie wykorzystanego czasu pracy podczas alokacji graczy do stanowisk roboczych na tej linii, jest zasadą czysto techniczną i tak naprawdę nie wiadomo, w jaki sposób poszczególni gracze mają ją realizować. Jest to dopiero jasne na poziomie koalicji.

Na zakończenie pracy można sformułować kilka wniosków:

1) Teoriogrowy model balansowania linii montażowej przynajmniej dla problemu klasycznego, tzn. bez dodatkowych ograniczeń i niedużej liczby operacji, w naturalny sposób prowadzi do optymalnego rozwiązania poprzez analizę niepełnego drzewa gry.
2) Odpowiedź na pytanie, jaki fragment drzewa gry należy wygenerować w celu znalezienia rozwiązania optymalnego (bez budowania całego drzewa gry), musi być rozstrzygana poetapowo szukając strategii dominujących dla decydenta i poszczególnych graczy .
3) W przypadku gdy takie postępowanie okaże się niemożliwe, należy wygenerować całe drzewo gry lub grę rozwiązać metodą programowania wieloetapowego.

LITERATURA

1 Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych. Praca zbiorowa pod kierunkiem H. Kowalowskiego. WNT, Warszawa 1984. ss. 33-38.

2 Basar T. & Haurie A., Editors: Advances in Dynamic Game and Applications. V.1 of the Series: Annals of the International Society of Dynamic Games. Birkchacuser, Boston, 1994.

3 Bryton B.: Balancing of a Continuous Production Line. Unpublished. M.S. Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois 1954.

4 Carraro C. & Filar J.A., Editors: Control and Game - Theoretic Models of the Environment. V.2 of the Series: Annals of the International Society of Dynamic Games. Birkhaeuser, Boston 1995.

5 Hagedorn P., Knobloch H.W., & Olsder G.J., Editors.: Differential Games and Applications. Proceedings of a Workshop, Enschede, 1977. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer - Verlag, Berlin. Heidelberg. New York 1977.

6 Jong-Tae Lim, S.M. Meerkov, Ferudun Top.:Homogeneous, Asymptotically Reliable Serial Production Lines: Theory and a Case Study. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. 35. No. 5. May 1990.pp.524-534.

7 Kałuski J.: Zastosowanie procesów Markowa do oceny niektórych parametrów systemu linii montażowych z magazynem.ZN, Pol. Śląskiej. Seria: AUTOMATYKA z.115. Gliwice 1994. ss. 47-59.

8 Kimmel M.:Zagadnienia statystyczne w procesie montażu.ZN, Pol. Śląskiej. Seria: AUTOMATYKA z.47.Gliwice 1979. ss 107-116.

9 Krutov B.P., Novikova N.M.:Teoretiko-igrowoj analiz mnogourowniwych dinamiczeskich ISU. Wyczislitielnyj Centr AN SSSR, Moskwa 1989.

10. Marecki F.: Modele matematyczne i algorytmy alokacji operacji i zasobów na linii montażowej.ZN, Pol. Śląskiej. Seria: AUTOMATYKA z. 82. Gliwice 1986.

11. Marecki F: Control of Discrete Process. 5 - th International Conference on " Control System and Computer Science", Politechnical Institute of Bucharest, Bucharest 1983.

12. Novikova N.M.:Ierrarchiczeskaja igra N-lic s uprawlajemoj koalicionnoj strukturoj. Wiestnik MGU, ser. "Wyczislitielnaja Matematika i Kibernetika", No.2. 1979.

13. Olsder J.G., Editors.: New Trends in Dynamic Games and Applications.V.3 of the Series: Annals of the International Society of Dynamic Games. Birkhaeuser, Boston 1995.

14. Owen G.: Teoria gier. PWN, Warszawa 1975.

15. Salveson M.E.: The Assembly Line Balancing Problem. The Journal of Industrial Engineering, 1955, V.6, pp.18 - 25.

16. Salveson M.E.: The Assembly Line Balancing Problem.Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1955, V.77, No 16, pp.939 - 947.

17. Świerniak A.: Podejmowanie decyzji w sytuacjach konfliktowych. Podstawy teoretyczne. Wydanie II. Skrypty Uczelniane Pol. Śląskiej, Nr 1791, Gliwice 1993.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Franciszek Marecki

Wpłynęło do Redakcji do 30.06.1996 r.

Abstract

The author of this paper attemted to apply dynamic *n*- person game with coalitions to describe particular discrete industrial processes, i.e. the assembly lines. The presented game-theoretical model will concern the widely know classic problem of assembly line balancing without taking into account additional constraints. The only factors that are taken into consideration are: a set of operations with sequential relations and time of operations for a given assembly line cycle.

In the second point of this paper a classic problem of assembly line balancing is formulated and the prospect of game-theoretical process description of a multi-stage allocation to work places is presented. In the third point of the paper a game-theoretical approach to dynamic hierarchical systems analysis is shown. As a consequece a model of assembly line balancing problem in the form of dynamic *n*- person game with coalitions is introduced in the fourth point. The model is hierarchical, i.e. the central decision maker, who realises the global goal and establishes the order of performing particular tasks on the assembly line, is determined. Local decisions makers (players) who perform local tasks on the aggregate placed in a particular work place and can form appropriate coalitions, are also determined. A formalised description of players' behaviour as well as the *maxmin* result of the game are given.

Afterwords, in the fifth point, two examples of game-theoretical representations of simple assembly line balancing problems without additional constraints are solved. A multi-stage programming method has been applied to solve the second game problem. Finally, some remarks and conclusions about the application of game theory in discrete processes as well as appropriate references, are presented.